1º.-Dados los puntos $A(3,1,4)$ , $B(2,1,3)$ y $C(1,1,9)$, calcular:

a) El área del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$:
b) La altura sobre el lado $\overline{AB}$
c) La longitud de la mediana que pasa por el vértice $C$

**Solución:**

**a)**

$$\overrightarrow{BA}=[1,0,1] \quad \text{y} \quad \overrightarrow{BC}=]-1,0,6]$$

$$A_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|[0,-7,0]=\frac{7}{2} \text{ unid. de a.}$$

**b)** Sea "$h$" la altura sobre el lado $\overline{AB}$:

$$A=\frac{\text{base } x\ h}{2} \Rightarrow h=\frac{2A}{\text{base}}=\frac{7}{|[-1,0,-1]|}=\frac{7}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2} \text{ uni. de long.}$$

**c)** La mediana que pasas por $C$ va de dicho vértice a la mitad del lado $\overline{AB}$ , es decir al punto $C'=\left(\frac{5}{2},1,\frac{7}{2}\right)$, luego mide:

$$d_{\overline{CC'}}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{-11}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{65}{2}}=\frac{\sqrt{130}}{2} \text{ uni. de long.}$$

---

2º.-Encontrar los puntos de la recta $\begin{cases} x+3y-z+7=0 \\ x-2y+z+2=0 \end{cases}$ que distan $\sqrt{17}$ unidades de longitud del origen

**Solución:**

$$\begin{cases} x+3y-z+7=0 \\ x-2y+z+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{vector director } [1,-2,-5] \\ \text{Punto: } (-4,-1,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4+\lambda \\ y=-1-2\lambda \\ z=-5\lambda \end{cases}$$

luego los puntos de esa recta tiene la forma:

$$(-4+\lambda,-1-2\lambda,-5\lambda)$$

y el vector que une cualquier punto de la recta con el origen es:

$$[-4+\lambda,-1-2\lambda,-5\lambda]$$

luego $$\left\|[-4+\lambda,-1-2\lambda,-5\lambda]\right\|=\sqrt{17}$$

que resolviendo nos permite encontrar dos valores de $\lambda \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \dfrac{15}{2} \end{cases}$, luego los puntos buscados son $(-4,-1,0)$ y $\left(\dfrac{7}{2},-16,\dfrac{-75}{2}\right)$

---

3º.-Calcular el radio de la circunferencia que pasa por los puntos $A(1,0,0)$ , $B(0,1,0)$ y $C(0,0,1)$

**Solución:**

Los tres puntos dados y el centro tiene que estar en el. mismo plano, es decir en :

$$plano\begin{cases} \overrightarrow{AB} = [-1,1,0] \\ \overrightarrow{AC} = [-1,0,1] \\ A(1,0,0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1-\lambda-\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

Luego todos los puntos de plano tiene la forma:

$$(1-\lambda-\mu,\lambda,\mu)$$

El centro *M* de la circunferencia equidista de los tres puntos *A*,*B* y *C:*

$$d_{M,A}^2 = (-\lambda-\mu)^2+\lambda^2+\mu^2 = 2\lambda^2+2\lambda\mu+2\mu^2$$

$$d_{M,B}^2 = (1-\lambda-\mu)^2+(\lambda-1)^2+\mu^2 = 2\lambda^2+2\lambda\mu+2\mu^2-4\lambda-2\mu+2$$

$$d_{M,C}^2 = (1-\lambda-\mu)^2+\lambda^2+(\mu-1)^2 = 2\lambda^2+2\lambda\mu+2\mu^2-2\lambda-4\mu+2$$

igualando dos a dos y simplificando:

$$\begin{cases} 4\lambda+2\mu = 2 \\ 2\lambda+4\mu = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{3} \\ \eta = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Luego el centro de la circunferencia es: $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$