1º.-a) Encontrar la ecuación general del plano que pasa por los puntos $A(1,1,5)$, $B(2,2,3)$ y $C(2,1,5)$

Solución:

El plano contiene lo vectores $\overrightarrow{AB}=[1,1,-2]$ y $\overrightarrow{AC}=[1,0,0]$ y el vector genérico $[x-1,y-1,z-5]$, luego su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z-5 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2y-z+7=0$$

b) ¿En qué punto corta al plano anterior la recta que es perpendicular a dicho plano y pasa por el punto $D(0,2,0)$

Solución:

La recta perpendicular al plano contiene el vector $[0,-2,-1]$, luego su ecuación paramétrica es:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=2-2\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}$$

$-2(2-2\lambda)+\lambda+7=0 \Rightarrow \lambda=-1$

Luego la recta corta al plano en el punto $(0,4,1)$

2º.-a) La recta s_1 pasa por los puntos $M(1,0,3)$ y $N(2,1,1)$; Encontrar la recta s_2 que es perpendicular a s_1 y pasa por el punto $P(1,0,1)$

Solución:

La ecuación de la recta $s_1 : \begin{cases} \text{vector } \overrightarrow{MN}\text{: } [1,1,-2] \\ \text{punto } M \end{cases}$ es: $s_1 :: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=3-2\lambda \end{cases}$; por lo que todo punto de la recta tendrá la forma: $(1+\lambda,\lambda,3-2\lambda)$; Sea Q el punto en que la recta s_2 corta a la s_1, entonces un vector genérico de la recta s_2 tendrá la forma:

$$[\lambda,\lambda,2-2\lambda]$$

como dicho vector debe ser perpendicular a $[1,1,-2]$, se debe cumplir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 2-2\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

y la recta buscada será: $\begin{cases} \text{vector::}\left[\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right] \Leftrightarrow [1,1,1] \\ \text{Punto } P \end{cases}$

es decir : $$s_2 :: \begin{cases} x = 1+\mu \\ y = \mu \\ z = 1+\mu \end{cases}$$

b) Encontrar el punto de corte de las rectas s_1 y s_2

Solución: Según el razonamiento anterior, ambas rectas se cortan en el punto Q, es decir, el punto de s_1 en el que $\lambda = \dfrac{2}{3}$,o sea el punto $\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{7}{3}\right)$

3º.- Encontrar la posición relativa de las rectas $r :: \begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ 2x-y+z-3=0 \end{cases}$ y $s :: \dfrac{x}{2} = y-2 = 5-z$

Solución:

Dado que el sistema:

$\begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ 2x-y+z-3=0 \\ x-2y+4=0 \\ y+z-7=0 \end{cases}$ es compatible y determinado, ambas rectas se cortan en el punto $(0,2,5)$