COLEGIO INTERNACIONAL PINOSIERRA	**2ª EVALUACIÓN**	**CURSO 2013/14**
	ASIGNATURA:________________________	FECHA.____________
	ALUMNO:________________________	2º BACHILLERATO: __

Grupo A

1.- Dadas las rectas: $r \equiv x+2 = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{3}$ y $s \equiv \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y}{-1} = z-a$

a) Para qué valores de a las rectas r y s se cruzan **(0,75 puntos)**

b) Para a = -2, determinar la recta que pasa por el punto A(1, -1, 0) y corta a las rectas r y s. **(1 punto)**

c) Para ese valor de a calcular la distancia entre las rectas r y s. **(0,5 puntos)**

d) Calcular la ecuación de un plano paralelo a las rectas r y s que pasa por el punto P(-3, 1, -1) **(0,75 puntos)**

2.- Dado el plano π: x − 5y + 2z − 3 = 0, y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 4-\lambda \\ y = -1-3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$

a) Hallar un punto P de la recta r , de manera que la distancia de P al plano π sea 1u. **(1 punto)**

b) Calcular el punto simétrico de Q(2, -1, 3) respecto del plano π **(1 punto)**

c) Hallar la ecuación de la recta simétrica de la recta r respecto del plano π. **(1 punto)**

3.- Los puntos A(2, 4, -3) y B(-4, 4, 7) son los extremos del diámetro de una esfera.

a) Obtener su ecuación cartesiana.

b) Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera en el punto A(2, 4, -3) **(1,75 puntos)**

4.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} (m-1)x+y+z=m \\ y+z=1 \\ x+(m-1)y-z=0 \end{cases}$

a) Discutirlo según los diferentes valores del parámetro m.

b) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado

c) Interpretar geométricamente

(2,25 puntos)

A ①

① a) $P_r = (-2, 1, 0)$

$\vec{V_r} = (1, -2, 3)$

$\frac{\vec{V_r}}{\vec{V_s}} = \frac{1}{3} \neq \frac{-2}{-1} \neq \frac{3}{1}$ No son paralelas

$P_s = (-1, 0, a)$

$\vec{V_s} = (3, -1, 1)$

$\vec{P_rP_s} = (1, -1, a)$

$$\begin{vmatrix} \vec{P_rP_s} \\ \vec{V_r} \\ \vec{V_s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - a - 9 - (-6a - 3 - 1) = 5a - 7$$

$a = 7/5$

Si $a = 7/5$ se cortan, si $a \neq 7/5$ se cruzan

b) Para $a = -2$ $A = (1, -1, 0)$

1º Hallamos un plano que contiene a r y a A

$$\Pi_1 = \begin{cases} P_r = (-2, 1, 0) \\ \vec{V_r} = (1, -2, 3) \\ \vec{P_rA} = (3, -2, 0) \end{cases} \Rightarrow \Pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$6(x+2) + 9(y-1) + 4z = 0$

$\Pi_1: 6x + 9y + 4z + 3 = 0$

t corta a r y s y pasa por A

$$\boxed{t = \begin{cases} 6x + 9y + 4z + 3 = 0 \\ -x - 4y - z - 3 = 0 \end{cases}}$$

2º Hallar un plano que contiene a s y a A

$$\Pi_2 = \begin{cases} P_s = (-1, 0, -2) \\ \vec{V_s} = (3, -1, 1) \\ \vec{P_sA} = (2, -1, 2) \end{cases} \quad \begin{vmatrix} x+1 & y & z+2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$-(x+1) - 4y - (z+2) = 0$

$\Pi_2 \equiv -x - 4y - z - 3 = 0$

) $\vec{P_rP_s} = (1, -1, -2)$

$$\vec{V_r} \times \vec{V_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, 8, 5) \quad \begin{vmatrix} \vec{P_rP_s} \\ \vec{V_r} \\ \vec{V_s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 9 + 2 - 12 + 1 + 3$$

$$d(r, s) = \frac{|17|}{\sqrt{1+64+25}} = \frac{17}{\sqrt{90}} = \boxed{\frac{17\sqrt{10}}{30}}$$

1) Plano paralelo a r y s que pasa por $P = (-3, 1, -1)$

$\vec{n} = (1, 8, 5)$ $x + 8y + 5z + D = 0$

$\vec{V_r} \times \vec{V_s}$ $-3 + 8 - 5 + D = 0$ $D = 0$

$\boxed{\Pi \equiv x + 8y + 5z = 0}$

②

$\Pi: x-5y+2z-3=0$

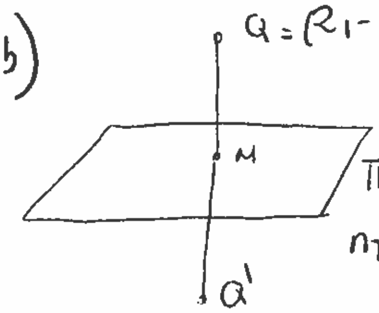
$P_r=(4-\lambda, -1-3\lambda, -2\lambda)$

$$d(P_1 P_r)=\frac{|4-\lambda-5(-1-3\lambda)+4\lambda-3|}{\sqrt{1+25+4}}=1$$

$$\frac{|6+10\lambda|}{\sqrt{30}}=1 \quad \begin{cases} 6+10\cancel{\lambda}=\sqrt{30} & \lambda_1=\dfrac{\sqrt{30}-6}{10} \\ 6+10\lambda=-\sqrt{30} & \lambda_2=\dfrac{-\sqrt{30}-6}{10} \end{cases}$$

$P_1=\left(\frac{46-\sqrt{30}}{10}, \frac{8-3\sqrt{30}}{10}, \frac{6-\sqrt{30}}{5}\right)$ $\quad P_2=\left(\frac{46+\sqrt{30}}{10}, \frac{8+3\sqrt{30}}{10}, \frac{6+\sqrt{30}}{10}\right)$

b) $Q=(2,-1,3)$



$\Pi \equiv x-5y+2z-3=0$

$n_\Pi=(1,-5,2)$

1º Calculamos la recta $\perp$ a Π que pasa por Q

$$r\equiv\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-1-5\lambda \\ z=3+2\lambda \end{cases}$$

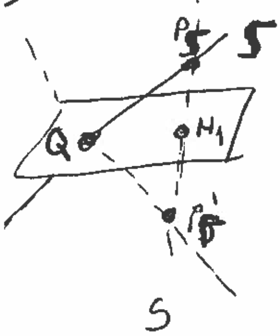
2º Calculamos $M=r\cap\Pi$

$2+\lambda-5(-1-5\lambda)+2(3+2\lambda)-3=0 \Rightarrow M=\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$

$30\lambda+10=0 \quad \lambda=-1/3$

3º $Q'=2M-Q=\left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right)-(2,-1,3)=\boxed{\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right)}$

c) $\vec{v_r}\cdot\vec{n_\Pi}=(-1,-3,-2)(1,-5,2)=-1+15-4\neq 0$ r y Π se cortan en 1 punto



Simétrico de P_r

$P_r=(4,-1,0)$ $\quad \vec{n_\Pi}=(1,-5,2)$

S. recta $\perp$ a Π que pasa por P_r

$$s\equiv\begin{cases} x=4+\mu \\ y=-1-5\mu \\ z=2\mu \end{cases}$$

$4+\mu-5(-1-5\mu)+2(2\mu)-3=0$

$4+\mu+5+25\mu+4\mu-3=0 \quad 30\mu+6=0 \quad \mu=-1/5$

$M_1=\left(\frac{19}{5}, 0, -2/5\right)$ $\quad P_r'=2M_1-P_r=\left(\frac{18}{5}, 1, -\frac{4}{5}\right)$

A ③

Hallamos Q punto de intersección de Π y r

$4-\lambda-5(-1-3\lambda)-4\lambda-3=0 \qquad 10\lambda+6=0 \qquad \lambda=-3/5$

$Q=\left(\frac{23}{5}, \frac{4}{5}, 6/5\right)$

Recta simétrica pasa por Q y P_r'

$$r' \begin{cases} Q=\left(\frac{23}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right) \\ P_r'=\left(\frac{18}{5}, 1, -\frac{4}{5}\right) \end{cases} \qquad \vec{P_r'Q}=\left(1, -\frac{1}{5}, 2\right)$$

$$\boxed{r': \frac{x-18/5}{1}=\frac{y-1}{-1/5}=\frac{z+4/5}{2}}$$

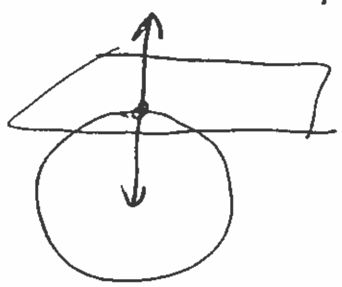
③ $A=(2,4,-3) \qquad B=(-4,4,7)$

a) $\vec{AB}=(-6,0,10) \qquad r=\frac{|\vec{AB}|}{2}=\frac{\sqrt{136}}{2}=\boxed{\sqrt{34}}$

$C=\frac{A+B}{2}=(-1,4,2)$

$$\boxed{S: (x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=34}$$

b) $\vec{AC}=(-3,0,5) \qquad A=(2,4,-3)$



$\vec{n}=(-3,0,5)$

$-3x+5z+D=0$

$-6-15+D=0$

$D=21$

$$\boxed{\Pi: -3x+5z+21=0}$$

)
$$|A| = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & -1 \end{vmatrix} = -m+1+\cancel{1} - (\cancel{1}+(m-1)^2) = -m+1-m^2-1+2m = -m^2+m = 0$$

$m=0$

$m=1$

) <u>Caso 1</u> Si $m \neq 0$ y 1 $rang(A) = rang(A^*) = 3 = n^o$ incógnitas. Aplicando el teorema de Rouche el sistema es compatible determinado (1 Solución única)

<u>Caso 2</u> Si $m=0$ $|A|=0$ $rang(A)<3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

$rang(A) = rang(A^*) < n^o$ incógnitas aplicando el teorema de Rouche el sistema es compatible indeterminado

<u>Caso 3</u> $m=1$ $|A|=0$ $rang(A)<3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$rang(A) = rang(A^*) < 2$ Aplicando el teorema de Rouche el sistema es compatible indeterminado

b) $\begin{cases} -x+y+z=0 \\ y+z=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=1-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$ <u>Caso 2</u> $m=0$

$\begin{cases} x-z=0 \\ y+z=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=t \end{cases}$ <u>Caso 3</u> $m=1$

c) <u>Caso 1</u> los 3 planos se cortan en 1 punto

<u>Caso 2</u> Π_1 y Π_3 son coincidentes y Π_2 los corta en una recta

<u>Caso 3</u> Π_1 y Π_2 son coincidentes y Π_3 los corta en una recta

COLEGIO INTERNACIONAL PINOSIERRA	**2ª EVALUACIÓN**	**CURSO 2013/14**
	ASIGNATURA:______________________	FECHA.__________
	ALUMNO:______________________	2º BACHILLERATO: __

Grupo B

1.- Dadas las rectas $r \equiv \frac{x+3}{-2} = y-3 = \frac{z-1}{5}$ y $s \equiv x+4 = \frac{y}{-1} = \frac{z+5}{2}$

a) Hallar la ecuación general del plano π que contiene a r y es paralelo a s. **(0,75 puntos)**
b) Determinar la distancia de r a s **(0,5 puntos)**
c) Calcular la ecuación de la recta perpendicular a las rectas r y s y que las corta **(1 pto)**
d) Calcular el punto simétrico de P(-1, 2, -2) respecto de la recta s. **(1 pto)**

2.- Se consideran la recta $r \equiv \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 - 4\lambda \\ z = -3 + 5\lambda \end{cases}$ y el plano π: 2x + y + mz = n. Se pide:

a) ¿Para qué valores de m y n son paralelos r y π?.Para esos valores hallar la distancia de r a s **(1 Punto)**
b) Para m = 1 y n =2 calcular la ecuación de la recta proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π **(1 punto)**
c) Calcula los puntos de la recta r que se encuentran a 2unidades de distancia del plano π. **(1 Punto)**

3.- Los puntos A(5, 0, -1) y B(-3, 6, 1) son los extremos del diámetro de una esfera.
a) Obtener su ecuación cartesiana.
b) Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera en el punto A(5, 0, -1) **(1,75 puntos)**

4.- Discute y resuelve, cuando sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales, según los diferentes valores del parámetro a.

$$\left.\begin{array}{l} (k+1)x + 3y + kz = 1 \\ 3x + (k+1)y + 2z = k-1 \\ kx + 2y + kz = 2 \end{array}\right\}$$

a) Discutirlo según los diferentes valores del parámetro m.
b) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado
c) Interpretar geométricamente

(2,25 puntos)

OPCION B

B ①

① $P_r = (-3, 3, 1)$ $\quad P_s = (-4, 0, -5)$

$\vec{v_r} = (-2, 1, 5)$ $\quad \vec{v_s} = (1, -1, 2)$

a) $\vec{v_r} \times \vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (7, 9, 1)$

$7x + 9y + z + D = 0 \quad P_r \Rightarrow -21 + 27 + 1 + D = 0 \quad D = -7$

$\boxed{\Pi: 7x + 9y + z - 7 = 0}$

b) $\frac{\vec{v_r}}{\vec{v_s}} \Rightarrow \frac{-2}{1} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{5}{2}$ no son paralelos

$\vec{P_rP_s} = (-1, -3, -6)$

Se cruzan.

$d(r, s) = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & -3 & -6 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\sqrt{49 + 81 + 1}} = \dfrac{|-2 - 15 - 12 + 6 - 12 - 5|}{\sqrt{131}} = \dfrac{40}{\sqrt{131}}$ u

c) Perpendicular común a r y a s

$\Pi_1 = \begin{cases} P_r = (-3, 3, 1) \\ \vec{v_r} = (-2, 1, 5) \\ \vec{v_r} \times \vec{v_s} = (7, 9, 1) \end{cases}$ $\quad \Pi_1: \begin{vmatrix} x+3 & y-3 & z-1 \\ 7 & 9 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$

$44(x+3) - 37(y-3) + 25(z-1) = 0$

$\boxed{\Pi_1: 44x - 37y + 25z + 218 = 0}$

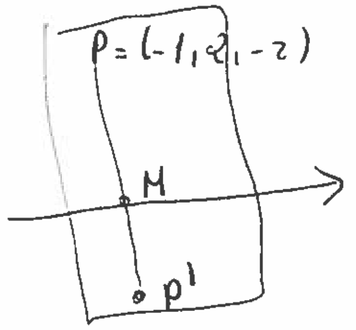
$\Pi_2 = \begin{cases} P_s = (-4, 0, -5) \\ \vec{v_s} = (1, -1, 2) \\ \vec{v_r} \times \vec{v_s} = (7, 9, 1) \end{cases}$ $\quad \Pi_2: \begin{vmatrix} x+4 & y & z+5 \\ +1 & -1 & 2 \\ 7 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$-19(x+4) + 13y + 16(z+5) = 0$

$\boxed{\Pi_2: -19x + 13y + 16z + 4 = 0}$

La perpendicular común $\begin{cases} 44x - 37y + 25z + 218 = 0 \\ -19x + 13y + 16z + 4 = 0 \end{cases}$

1)



$\vec{v}_s = \vec{n}_\Pi = (1,-1,2)$

Calculamos el plano $\Pi \perp$ a s y que pasa por P

$\Pi: x - y + 2z + D = 0$

$-1 - 2 - 4 + D = 0 \quad D = 7$

$\Pi \; x - y + 2z + 7 = 0$

$s \equiv \begin{cases} x = -4 + t \\ y = -t \\ z = -5 + 2t \end{cases}$

Calculamos $M = s \cap \Pi$

$(-4+t) + t + 2(-5+2t) + 7 = 0$

$-4 + t + t - 10 + 4t + 7 = 0$

$6t - 7 = 0 \qquad t = 7/6$

$M = \left(\frac{-17}{6}, \frac{-7}{6}, \frac{-8}{3} \right)$

$M = \frac{P + P'}{2} \qquad P' = 2M - P = \left(\frac{-17}{3}, \frac{-7}{3}, \frac{-16}{3} \right) - (-1, 2, -2) = \boxed{\left(\frac{-14}{3}, \frac{-13}{3}, \frac{-10}{3} \right)}$

2) $P_r = (-3, 2, -3) \qquad \vec{n}_\Pi = (2, 1, m) \qquad \Pi \equiv 2x + y - \frac{4}{5}z - n = 0$

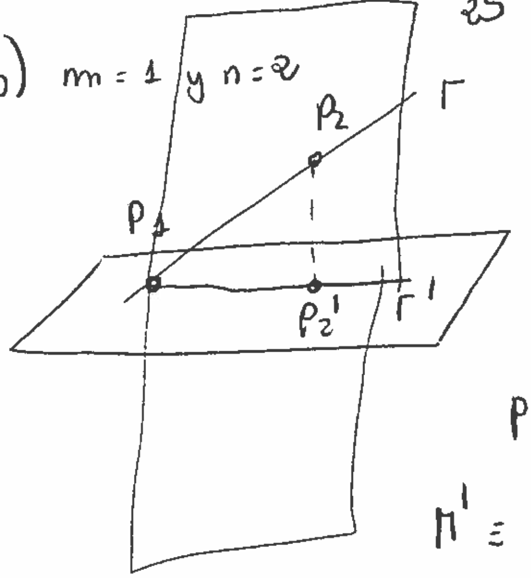
$\vec{V}_r = (0, -4, 5) \qquad \vec{n}_\Pi = (2, 1, -4/5)$

a) r y Π son $\parallel$ si $\vec{V}_r \cdot \vec{n}_\Pi = 0 \quad -6 + 2 - 5m = 0 \quad m = 4/5$

Si $m = \frac{4}{5}$ r y Π son paralelos para cualquier valor de n

$d(P_r, \Pi) = \frac{\left| -6 + 2 - \frac{12}{5} - n \right|}{\sqrt{4 + 1 + \frac{16}{25}}} = \frac{\left| -30 + 10 - 12 - 5n \right|}{\sqrt{100 + 25 + 16}} = \boxed{\frac{|5n - 32|}{\sqrt{141}}}$

b) $m = 1$ y $n = 2$



1º Calculamos la intersección de r y Π

$r \equiv \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 - 4\lambda \\ z = -3 + 5\lambda \end{cases} \qquad \Pi \; 2x + y + z - 2 = 0$

$-6 + 2 - 4\lambda - 3 + 5\lambda - 2 = 0$

$\lambda = 9$

Plano $\perp$ a Π que contiene a r

$\Pi' \equiv \begin{vmatrix} x+3 & y-2 & z+3 \\ 0 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -9x + 10y + 8z - 23 = 0$

$r' = \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ -4x + 16y + 8z = 23 \end{cases}$ la recta proyección ortogonal es la $\cap$ de Π y Π'

c) $r = \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 - 4\lambda \\ z = -3 + 5\lambda \end{cases}$ Π $2x + y + z - 2 = 0$ $P_1 = (2\sqrt{6} + 6, -8\sqrt{6} - 34, 42 + 10\sqrt{6})$ $P_2 = (-2\sqrt{6} + 6, +8\sqrt{6} - 34, 42 - 10\sqrt{6})$

$$\frac{|2(-3) + 2 - 4\lambda + -3 + 5\lambda - 2|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = 2$$

$|-6 + 2 - 4\lambda - 3 + 5\lambda - 2| = 2\sqrt{6}$ $|\lambda - 9| = 2\sqrt{6} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \lambda = 2\sqrt{6} + 9 \\ \lambda = -2\sqrt{6} + 9 \end{matrix}}$

3) a) $C = \frac{A+B}{2} = (1, 3, 0)$

$\vec{AC} = C - A = (-4, 3, 1)$ $r = \sqrt{16 + 9 + 1} = \sqrt{26}$

$(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z)^2 = 26$

b) $-4x + 3y + z + D = 0$ $\boxed{-4x + 3y + z - 21 = 0}$

$-20 + 0 - 1 + D = 0$

4) $\begin{vmatrix} K+1 & 3 & K \\ 3 & K+1 & 2 \\ K & 2 & K \end{vmatrix} = (K^2 + 2K + 1)K + 6K + 6K - (K^3 + K^2 + 4K + 4K + 4) = K^2 - 4$ $K = \pm 2$

a) Caso 1 Si $K \neq \pm 2$ rang(A) = rang(A^*) = 3 aplicando el teorema de Rouche el sistema es compatible determinado; (Solución única)

Caso 2 $K = 2$

$\left(\begin{array}{ccc|c} \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{1} \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$ rang(A) = rang(A^*) = 2 < nº incógnitas, aplicando el teorema de Rouche el sistema es compatible indeterminado

Caso 3 Si $K=-2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{rang}(A) = 2 \neq \text{ran}(A') = 2$

~~Sistema incompatible~~

Sistema compatible indeterminado

i) Para $K=2$

$$3x+3y+2z=1$$
$$x+y=-1$$

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=-1-\lambda \\ z=\dfrac{1-3\lambda+3+3\lambda}{2}=2 \end{cases}$$

Si $K \neq \pm 2$ 3 planos que se cortan en 1 punto

Si $K=+2$ 2 planos coincidentes y 1 que los corta

Si $K=-2$ 3 planos que se cortan ~~2 a 2~~ en una recta