

**2ª EVALUACIÓN****CURSO 2014/15**

ASIGNATURA: _____ FECHA: 4/02/2015

ALUMNO: _____ 2º BACHILLERATO: _____

Grupo A

1.- Se consideran las rectas: $r: x = y - 6 = \frac{z - 5}{2}$; $s: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -4 + 3\lambda \\ z = 0 \end{cases}$. Hallar la ecuación de la recta

que contiene al punto $P(2, -1, 1)$ y cuyo vector dirección es perpendicular a los vectores dirección de las rectas anteriores. **(0.75 pto)**

2.- Sean las rectas: $r \equiv x - 2 = \frac{y - 1}{k} = \frac{z + 1}{-2}$ $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$

- a) Hallar k para que r y s sean coplanarias. **(1 pto)**
- b) Para el valor anterior de k , hallar la ecuación del plano que contiene a ambas rectas. **(1 pto)**
- c) Para el valor anterior de $k=2$ hallar la ecuación de la recta perpendicular común a las rectas dadas. **(1,5 pto)**

3.- Se consideran la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$ y el punto $P(1, 1, 1)$. Dado el punto $Q(0, 0, 0)$ de

r , hallar todos los puntos A contenidos en r tales que el triángulo de vértices A , P y Q tenga área 1 u^2 . **(1,5 puntos)**

4º a) Halla la ecuación de la esfera que pasa por los puntos $A(4, 1, -3)$ y $B(3, 2, 1)$ y que tiene su centro en la recta $r \equiv \frac{x - 8}{2} = y - 3 = \frac{z + 4}{-1}$ **(1,5 puntos)**

b) Hallar la posición relativa de la esfera anterior con el plano $\pi: 2x - y + 2z + 1 = 0$ **(0,5 puntos)**

5º) .- Dado el sistema

$$\begin{cases} 2x + \lambda y + \lambda z = 1 - \lambda ; \\ x + y + (\lambda - 1)z = -2\lambda ; \\ (\lambda - 1)x + y + z = \lambda - 1 ; \end{cases} \text{ , se pide:}$$

- a) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro λ . **(2,25 pto)**
- b) Resolver cuando tenga más de una solución
- c) Interpretar geoméricamente

1º Construimos Π_1 que contiene a $\vec{v}_r \times \vec{v}_s$ y a P_1

(A) (2)

$$\Pi_1 \equiv \begin{cases} P_1 = (2, 1, -1) \\ \vec{v}_r = (1, 2, -2) \\ \vec{v}_r \times \vec{v}_s = (2, -4, -3) \end{cases} \quad \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2)(-14) - (y-1)(1) + (z+1)(-8) = 0$$

$$\boxed{-14x - y - 8z + 21 = 0}$$

2º Construimos Π_2 que contiene a $\vec{v}_r \times \vec{v}_s$ y a P_2

$$\Pi_2 \equiv \begin{cases} P_2 = (1, 2, 0) \\ \vec{v}_s = (1, -1, 2) \\ \vec{v}_r \times \vec{v}_s = (2, -4, -3) \end{cases} \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

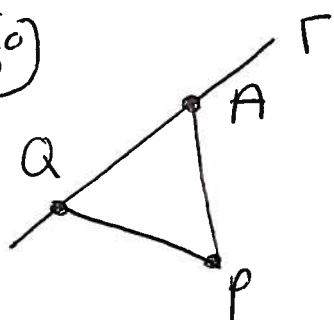
$$(x-1)(11) - (y-2)(-7) + z(-2) = 0$$

$$11x - 11 + 7y - 14 - 2z = 0$$

$$\boxed{11x + 7y - 2z - 25 = 0}$$

La perpendicular común es $\begin{cases} -14x - y - 8z + 21 = 0 \\ 11x + 7y - 2z - 25 = 0 \end{cases}$

(3º)



$$r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

$$A = (\lambda, \lambda, -\lambda)$$

$$\vec{QA} = (\lambda, \lambda, -\lambda)$$

$$\vec{QP} = (1, 1, 1)$$

$$S = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |(2\lambda, -2\lambda, 0)| = 1$$

$$\sqrt{8\lambda^2} = 2$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{2}$$

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$A_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad A_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

(A)

$$(1) r: x = y - 6 = \frac{z - 5}{2}$$

$$P_r = (0, 6, 5)$$

$$\vec{V}_r = (1, 1, 2)$$

$$s: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -4 + 3\lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

$$P_s = (3, -4, 0)$$

$$\vec{V}_s = (1, 3, 0)$$

$$P = (2, -1, 1)$$

$$\vec{V}_r \times \vec{V}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-6, 2, 2)$$

$$\boxed{\frac{x-2}{-6} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{2}}$$

(2)

$$a) P_r = (2, 1, -1)$$

$$P_s = (1, 2, 0)$$

$$\vec{V}_r = (1, K, -2)$$

$$\vec{V}_s = (1, -1, 2)$$

$$\frac{\vec{V}_r}{\vec{V}_s} = \frac{1}{1} = \frac{K}{-1} \neq \frac{-2}{2}$$

No pueden ser paralelos

$$\vec{P_r P_s} = (-1, 1, 1)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{P_r P_s} \\ \vec{V}_r \\ \vec{V}_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & K & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2K - 2 - 1 + K - 2 + 2 = 0$$

$$-3K = 3 \quad \boxed{K = -1}$$

Si $K = -1$ r y s se cortan en un punto

$$b) \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \boxed{x+y-3=0}$$

c) Si $K = 2$ r y s se cruzan

$$\vec{V}_r \times \vec{V}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (2, -4, -3)$$

(4) (3)

$$4^o) a) A = (4, 1, -3) \quad B = (3, 2, 1)$$

$$r = \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+4}{-1} \quad \begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=-4-\lambda \end{cases} \quad P_r = (3+2\lambda, 3+\lambda, -4-\lambda) = C$$

$$\vec{AC} = (2\lambda+4, \lambda+2, -\lambda-1) \quad r = |\vec{AC}| = \sqrt{4\lambda^2+16+16\lambda+\lambda^2+4+4\lambda+\lambda^2+1+2\lambda}$$

$$\vec{BC} = (2\lambda+5, \lambda+1, -\lambda-5) \quad r = |\vec{BC}| = \sqrt{4\lambda^2+25+20\lambda+\lambda^2+1+2\lambda+\lambda^2+25+10\lambda}$$

$$|\vec{AC}| = |\vec{BC}| \rightarrow 22\lambda + 21 = 32\lambda + 51$$

$$-10\lambda = 30 \quad \boxed{\lambda = -3}$$

$$C = (2, 0, -1) \quad r = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\boxed{(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9}$$

$$b) \pi: 2x - y + 2z + 1 = 0 \quad C = (2, 0, -1)$$

$$d(C, \pi) = \frac{|4 - 0 - 2 + 1|}{\sqrt{9}} = \frac{3}{3} = 1 < r \Rightarrow \text{el plano es secante con la esfera}$$

(5°)

$$\begin{cases} 2x + \lambda y + \lambda z = 1 - \lambda \\ x + y + (\lambda - 1)z = -2\lambda \\ (\lambda - 1)x + y + z = \lambda - 1 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda - 1 \\ \lambda - 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 2 + \lambda(\lambda - 1)^2 + \lambda - \lambda(\lambda - 1) - \lambda - 2(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0 \quad \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

$$a) \text{ Si } \lambda \neq -1 \text{ y } 2 \quad |A| \neq 0 \quad \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 3 \quad \text{S.C. } D_0$$

$$b) \text{ Si } \lambda = -1$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 2 < n^{\circ} \text{ incógnitas}$$

S.C. I

$$\begin{aligned} 2F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1 \end{aligned}$$

(A)

a) Si $\lambda = +2$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \text{rang}(A) = 1 \quad \text{S. I.}$$

$$\text{rang}(A^*) = 2$$

b) Si $\lambda = -1$

$$\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ 3y - 3z = -2 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \begin{aligned} &= 2 \\ &= -2 \\ &= \lambda \end{aligned}$$

$$y = \frac{-2 + 3\lambda}{3} \quad x = \frac{2 + y + z}{2} = \frac{6 + 2(3\lambda + 3\lambda) + 3\lambda}{6} = \frac{4 + 3\lambda}{3}$$

$$\begin{cases} x = \frac{4 + 3\lambda}{3} \\ y = -\frac{2 + 3\lambda}{3} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Si $\lambda \neq -1, 2$ y $\lambda \neq 3$ 3 planos que se cortan en un pto

• Si $\lambda = -1$

$$\text{rang}(\Pi_1, \Pi_2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right) \quad \text{rang}(\Pi_1, \Pi_2) = 2 \quad \text{se cortan}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \Pi_2 & \Pi_3 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \quad \text{rang}(\Pi_2, \Pi_3) = 2 \quad \text{se cortan}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \Pi_1 & \Pi_3 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \quad \text{rang}(\Pi_1, \Pi_3) = 1 \quad \text{coincidentes}$$

Π_1 y Π_3 son coincidentes y Π_2 los corta.

• Si $\lambda = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \text{los 3 planos son paralelos}$$

**2ª EVALUACIÓN****CURSO 2014/15**

ASIGNATURA: _____ FECHA: _____

ALUMNO: _____ 2º BACHILLERATO: ____

Grupo B

1.- Dados los puntos A(1, 0, 1) y B(0, 2, 0), y el plano $\pi \equiv x - 2y - z - 7 = 0$, determinar la

ecuación del plano que es perpendicular al plano π y que pasa por los puntos A y B (0,75 pts)

2.- Sean las rectas: $r \equiv \begin{cases} x - 2y - 6z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$ $s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{a} = z$

a) Determinar la posición relativa de r y s según los valores de a.

(1 pto)

b) Calcular la distancia entre r y s cuando $a = -2$.

(1 pto)

c) Para $a=1$ hallar la ecuación de la perpendicular común

(1,5 pts)

3.- Hallar los puntos de la recta $r \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{-1}$, cuya distancia al plano

$\pi: 2x - y + 2z + 1 = 0$ es igual a 1u.

(1,5 pts)

4.- Halla las ecuaciones de las esferas tangentes a los planos $x - 2z - 8 = 0$ y $2x - z + 5 = 0$ y que

tienen su centro en la recta: $r \equiv \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$

(2 puntos)

5.- Dado el sistema $\begin{cases} y + z = 1 \\ (\lambda - 1)x + y + z = \lambda \\ x + (\lambda - 1)y - z = 0 \end{cases}$ Se pide:

a) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro λ .

b) Resolver cuando tenga más de una solución

c) Interpretar geoméricamente

(2,25 pts)

$$\left(\begin{array}{c} (\\ 2,1 \\ \times \end{array} \right) \# 2 + 3 \left(\begin{array}{c} (\\ 2 + 3 \end{array} \right)$$

(1)

(B)

① $A = (1, 0, 1)$ $B = (0, 2, 0)$ $\Pi \equiv x - 2y - z - 7 = 0$

$$\Pi \equiv \begin{cases} A = (1, 0, 1) \\ B = (0, 2, 0) \\ \vec{n}_{\Pi} = (1, -2, -1) \end{cases} \quad \overrightarrow{AB} = (-1, 2, -1) \quad \Pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)(-4) - y(2) + (z-1)(0) = 0 \quad \boxed{-4x - 2y + 4 = 0} \quad \Pi'$$

② $r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\lambda \end{cases} \quad P_r = (0, 0, -\frac{1}{6}) \quad P_s = (0, -1, 0)$

$$\vec{v}_r = (-1, 1, -\frac{1}{2}) \quad \vec{v}_s = (2, 0, 1)$$

$$\frac{\vec{v}_r}{\vec{v}_s} = \frac{-1}{2} = \frac{1}{a} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} \quad \text{Si } a = -2 \quad r \text{ y } s \text{ son } \parallel$$

$$\overrightarrow{P_r P_s} = (0, -1, \frac{1}{6}) \quad \left| \begin{array}{c} \overrightarrow{P_r P_s} \\ \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \end{array} \right| = \frac{a+2}{3} = 0 \Rightarrow \boxed{a = -2} \quad \text{Si } a \neq -2 \quad \text{Se cruzan.}$$

b) Como si $a = -2$ son paralelos

$$d(P_r, s) = \frac{|\overrightarrow{P_r P_s} \times \vec{v}_s|}{|\vec{v}_s|} = \frac{\frac{\sqrt{51}}{3}}{3} = \boxed{\frac{\sqrt{51}}{9} u}$$

$$|\overrightarrow{P_r P_s} \times \vec{v}_s| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1/6 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -2)$$

c) Si $a = +1$ r y s se cruzan

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -1/2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3, 0, -6) = (1, 0, -2)$$

1º Construye Π_1 que contiene a r y $\vec{v}_r \times \vec{v}_s$

B (2)

$$\Pi_1 \equiv \begin{cases} P_r = (0, 0, -1/6) \\ \vec{v}_r = (-1, 1, -1/2) = (-2, 2, -1) \\ \vec{v}_r \times \vec{v}_s = (1, 0, -2) \end{cases} \quad \begin{vmatrix} x & y & z + \frac{1}{6} \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$x(-4) - y(5) + (z + \frac{1}{6})(-2) = 0 \quad \boxed{-4x - 5y - 2z + \frac{1}{3} = 0}$$

2º Construye Π_2 que contiene a s y $\vec{v}_r \times \vec{v}_s$

$$\Pi_2 \equiv \begin{cases} P_s = (0, -1, 0) \\ \vec{v}_s = (2, 1, 1) \\ \vec{v}_r \times \vec{v}_s = (1, 0, -2) \end{cases} \quad \begin{vmatrix} x & y+1 & z \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$x(-2) - (y+1)(-5) + z(-1) = 0 \quad -2x + 5y + 5 - z = 0 \quad \boxed{-2x + 5y - z + 5 = 0}$$

la perpendicular común es $\begin{cases} -12x - 15y - 6z - 1 = 0 \\ -2x + 5y - z + 5 = 0 \end{cases}$

(3) $P_r = (3+\lambda, 5+\lambda, -1-\lambda)$ $\Pi = 2x - 5y + 2z + 1 = 0$

$$d(P_r, \Pi) = \frac{|2(3+\lambda) - 5(5+\lambda) + 2(-1-\lambda) + 1|}{\sqrt{9}} = 1 \quad |\lambda| = 3 \quad \lambda = \pm 3$$

$P_1 = (6, 8, -4)$ $P_2 = (0, 9, 2)$

(4) $C = (-2, 0, \lambda)$ $d(C, \Pi_1) = d(C, \Pi_2)$

$\Pi_1: x - 2z - 8 = 0$

$\Pi_2: 2x - z + 5 = 0$

$$\frac{|-2 - 2\lambda - 8|}{\sqrt{5}} = \frac{|-4 - \lambda + 5|}{\sqrt{5}} = r$$

$$|-2\lambda - 10| = |- \lambda + 1|$$

$$\begin{cases} -2\lambda - 10 = -\lambda + 1 \\ -\lambda = -11 \end{cases} \quad \boxed{\lambda = -11}$$

$$-2\lambda - 10 = \lambda - 1$$

$$-3\lambda = 9 \quad \boxed{\lambda = -3}$$

(1) Si $\lambda = -11$ $C = (-2, 0, -11)$

(2) Si $\lambda = 3$ $C = (-2, 0, 3)$

$$r = \frac{|-2 + 22 - 8|}{\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}} \quad r = \frac{|-2 + 6 - 8|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$S_1: (x+2)^2 + y^2 + (z-11)^2 = \frac{144}{5}$

$S_2: (x+2)^2 + y^2 + (z+3)^2 = \frac{16}{5}$

$$(5) \begin{cases} y+z=1 \\ (\lambda-1)x+y+z=\lambda \\ x+(\lambda-1)y-z=0 \end{cases}$$

B (3)

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & -1 \end{pmatrix} \quad |A| = \cancel{1}(\lambda-1)^2 - \cancel{1}(\lambda-1) = \lambda^2 + \cancel{1} - 2\lambda + \lambda - \cancel{1} = \lambda^2 - \lambda = 0$

$\boxed{\lambda=0 \quad \lambda=1}$

1°) Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$ $|A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 3 = n^\circ \text{ incógnitas}$ S.C.D

2°) Si $\lambda=0$ $|A|=0 \Rightarrow \text{rang}(A) < 3$

$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ -1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 2$ S.C.I.

3°) Si $\lambda=1$ $|A|=0 \Rightarrow \text{rang}(A) < 3$

$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 2$ S.C.I

b) Si $\lambda=0$

$$\begin{cases} -x+y+z=0 \\ y+z=1 \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-t+t \\ y=1-t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1-t \\ z=t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Si $\lambda=1$

$$\begin{cases} x-z=0 \\ y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

c) Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$ 3 planos que se cortan en un punto

Si $\lambda=0$

$n_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ -1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \quad (n_1, n_2) \quad \frac{0}{-1} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{1}{1} = \frac{1}{0} \text{ Se cortan}$

$(n_1, n_3) \quad \frac{0}{-1} \neq \frac{1}{-1} \text{ Se cortan}$

$(n_2, n_3) \quad -1 \neq 1 \neq 1 = 0 \text{ Son coincidentes}$

Π_2 y Π_3 son coincidentes y Π_1 lo corta



Si: $\lambda = 1$

$$\begin{array}{l} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \Pi_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \ominus & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Π_1 y $\Pi_2 =$ coincidentes

Π_1 y Π_3 secantes