PINOSIERRA	2ª EVALUACIÓN	CURSO 2012/13
	ASIGNATURA:	FECHA.
	ALUMNO:	2º BACHILLERATO CNS

Grupo A

1.- Dada la recta $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{1}$ y el plano π: 2x + y - 2z + 1 = 0 **(3 ptos)**

a) Calcula la ecuación de un plano perpendicular al plano π y que contenga a la recta r.
b) Hallar la ecuación de la recta simétrica de la recta r respecto del plano π.
c) Calcula los puntos de la recta r que se encuentran a 2unidades de distancia del plano π.

2.- Dadas las rectas: $r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2}$; $s \equiv \frac{x-5}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$, se pide: **(3,5 ptos)**

a) Determinar la ecuación de la recta t que pasa por el punto Q(1, -3, 0) y que corta a r y s.
b) Calcula la ecuación de la perpendicular común a las rectas r y s, las coordenadas de sus puntos de corte con ellas y la distancia mínima entre las rectas r y s.
c) Determina la ecuación del plano que es paralelo a las rectas r y s y que pasa por el punto P(-2, 3, 4)

3.- Dadas las rectas: $r \equiv x+2 = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$ y $s \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y}{-1} = z-a$ **(2,25 ptos)**

a) Hallar el valor de a para que las rectas estén contenidas en el mismo plano.
b) Para el valor de a obtenido en el apartado anterior, calcula la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s, el punto de corte de estas rectas y el ángulo que forman.

4.- Discutir según los valores de λ la posición relativa de los planos: **(1,25 ptos)**

$$\pi_1 \equiv 6x + 4y + 2\lambda z = 2$$
$$\pi_2 \equiv \lambda x + y - z = 2$$
$$\pi_3 \equiv 5x + 3y + 3z = 2\lambda$$

PINOSIERRA	2ª EVALUACIÓN	CURSO 2012/13
	ASIGNATURA:______________________	FECHA.__________
	ALUMNO:______________________	2º BACHILLERATO CNS

Grupo B

1.- Dadas las rectas: $r \equiv \dfrac{x+3}{-1} = \dfrac{y-2}{-2} = z$; $s \equiv \dfrac{x+1}{4} = y = \dfrac{z+3}{-3}$, se pide:

a) Determina la ecuación del plano que es paralelo a las rectas r y s y que pasa por el punto P(-1, 2, -4)

b) Determinar la ecuación de la recta t que pasa por el punto Q(0, -2, 7) y que corta a r y s.

c) Calcula la ecuación de la perpendicular común a las rectas r y s, las coordenadas de sus puntos de corte con ellas y la distancia mínima entre las rectas r y s **(3,5 ptos)**

2.- Dados el plano $\pi \equiv 2x - 3y + z = 5$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-1}{-1}$, se pide: **(3 ptos)**

a) Hallar la ecuación de la recta simétrica de la recta r respecto del plano π.

b) Calcula los puntos de la recta r que se encuentran a $\sqrt{14}$ unidades de distancia del plano π.

c) Calcula la ecuación de un plano perpendicular al plano π y que contenga a la recta r.

3.- Sean la recta r $\equiv \dfrac{x-1}{m} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z-1}{2}$, y el plano $\pi \equiv 2x - y + kz = 0$. **(2,25 ptos)**

a) Calcular m y k para que la recta esté contenida en el plano.

b) Para m = -1 y k = 3 calcula el ángulo que forman la recta y el plano y la ecuación de la recta proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π.

4.- Discutir según los valores de a la posición relativa de los planos: **(1,25 ptos)**

$\pi_1 \equiv x - y = 2$

$\pi_2 \equiv ax + y + 2z = 0$

$\pi_3 \equiv x - y + az = 1$

2ª evaluación 2º Bachillerato CNS (2012/2013)

(A)

(1) $P_r(3,-1,5)$ a) $\alpha \perp \pi \Rightarrow \vec{n}_\pi$ es v. director de α

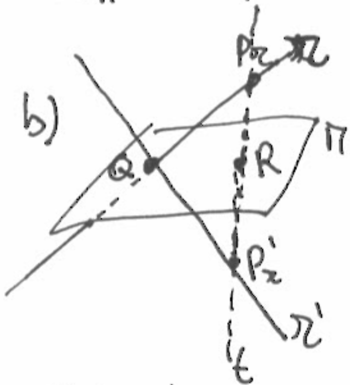
$\vec{v}_r(2,-1,1)$ $\alpha \supset r \Rightarrow P_r, \vec{v}_r \in \alpha$

$\vec{n}_\pi(2,1,-2)$

$$\alpha \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \alpha \equiv x-3+6(y+1)+4(z-5)=$$

$$\alpha \equiv x+6y+4z-17=0$$

b)



Q = pto de corte de r con π

$2(3+2\lambda)+(-1-\lambda)-2(5+\lambda)+1=0$

$\lambda-4=0 \Rightarrow \lambda=4$

$Q(11,-5,9)$

Recta $t \perp \pi$ que pasa por $P_r \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x=3+2\mu \\ y=-1+\mu \\ z=5-2\mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$

R = pto de corte de t con π

$2(3+2\mu)+(-1+\mu)-2(5-2\mu)+1=0$

$9\mu-4=0 \Rightarrow \mu=4/9 \Rightarrow R\left(\frac{35}{9}, \frac{-5}{9}, \frac{37}{9}\right)$

$R=\dfrac{P_r+P'_r}{2} \Rightarrow P'_r = 2R-P_r = \left(\frac{70}{9}, \frac{-10}{9}, \frac{74}{9}\right)-(3,-1,5)$

$P'_r=\left(\frac{43}{9}, \frac{-1}{9}, \frac{29}{9}\right)$

El vector director de la recta simétrica es

$\vec{QP'_r}=\left(\frac{-56}{9}, \frac{44}{9}, \frac{-52}{9}\right) \simeq (-56,44,-52) \simeq (14,-11,13)$

$$r' \equiv \frac{x-11}{14}=\frac{y+5}{-11}=\frac{z-9}{13}$$

c) $P(3+2\lambda, -1-\lambda, 5+\lambda) \Rightarrow d(P,\pi)=2$

$$\frac{|2(3+2\lambda)+(-1-\lambda)-2(5+\lambda)+1|}{\sqrt{4+1+4}}=2 \; ; \; |\lambda-4|=6$$

$\lambda-4=6 \Rightarrow \lambda=10 \Rightarrow P_1(23,-11,15)$

$\lambda-4=-6 \Rightarrow \lambda=-2 \Rightarrow P_2(-1,1,3)$

(2)

(2) a) t corta a r ⇒ Son coplanarias ⇒ $\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$\pi_1 \equiv \{Q, P_r, \vec{v}_r\}$

t corta a s ⇒ Son coplanarias ⇒ $\pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z \\ -4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\pi_2 \equiv \{Q, P_s, \vec{v}_s\}$

La recta t es la intersección de estos planos

$$t \equiv \begin{cases} 10x + 4y - 3z + 2 = 0 \\ -4x + 7y + 5z + 25 = 0 \end{cases}$$

b) Recta $t \perp r$, $t \perp s$ $\left\{ \vec{v}_t = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = (-1, 1, -2) \times (3, 1, 1) = (3, -5, -4) \right.$

t corta a r ⇒ Tienen un punto $Q(-\lambda, 1+\lambda, 2-2\lambda)$ en común

t corta a s ⇒ Tienen un punto $P(5+3\mu, \mu, -1+\mu)$ en común

$\vec{PQ} \simeq \vec{v}_t(3, -5, -4) \Rightarrow (-5-3\mu-\lambda, 1+\lambda-\mu, 3-2\lambda-\mu)$

$$\frac{-5-\lambda-3\mu}{3} = \frac{1+\lambda-\mu}{-5} = \frac{3-2\lambda-\mu}{-4}$$

$25 + 5\lambda + 15\mu = 3 + 3\lambda - 3\mu$ $\left\{ \begin{array}{l} 2\lambda + 18\mu = -22 \\ -14\lambda - \mu = -11 \end{array} \right.$

$-4 - 4\lambda + 4\mu = -15 + 10\lambda + 5\mu$

$14\lambda + 126\mu = -154$ $\quad \lambda = \frac{22}{25} \Rightarrow Q\left(\frac{-22}{25}, \frac{47}{25}, \frac{6}{25}\right)$

$-14\lambda - \mu = -11$

$125\mu = -165 \Rightarrow \mu = \frac{-33}{25} \Rightarrow P\left(\frac{26}{25}, \frac{-33}{25}, \frac{-58}{25}\right)$

$$t = \begin{cases} x = -\frac{22}{25} + 3\alpha \\ y = -\frac{33}{25} - 5\alpha \\ z = \frac{-58}{25} - 4\alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R};$$

$d(r,s) = |\vec{PQ}| = \sqrt{\left(\frac{-48}{25}\right)^2 + \left(\frac{80}{25}\right)^2 + \left(\frac{64}{25}\right)^2} = \frac{\sqrt{800}}{25} = \frac{16\sqrt{2}}{5}$ u

c) $\beta \parallel r$, $\beta \parallel s$, β pasa por P $\Bigg\} \Rightarrow \beta \equiv \begin{vmatrix} x+2 & y-3 & z-4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \beta \equiv 3x - 5y - 4z + 37 =$

3 a) Como $\vec{v}_r(1,-2,3) \nparallel \vec{v}_s(3,-1,1) \Rightarrow$ las rectas son coplanarias si se cortan $\Rightarrow \{\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s\} = 0$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -a \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 9 + a - 6a - 3 - 1 = 0 \Rightarrow -5a + 7 = 0;\ \boxed{a = 7/5}$$

b) $$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (x+2) + 8(y-1) + 5z = 0$$

$$\pi \equiv x + 8y + 5z - 6 = 0$$

pto de corte.
$$\left.\begin{aligned} -2+\lambda &= -1+3\mu \\ 1-2\lambda &= -\mu \\ 3\lambda &= \frac{7}{5}+\mu \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \lambda - 3\mu &= 1 \\ -2\lambda + \mu &= -1 \\ 15\lambda - 5\mu &= 7 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} 2\lambda - 6\mu &= 2 \\ -2\lambda + \mu &= -1 \\ \hline -5\mu &= 1 \Rightarrow \mu = -1/5 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{P\left(\frac{-8}{5}, \frac{1}{5}, \frac{6}{5}\right)}$$

$$\alpha(r,s) = \text{Arc}\cos\frac{(1,-2,3)\cdot(3,-1,1)}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{11}} = \text{Arc}\cos\frac{8}{\sqrt{154}} =$$

$$= \boxed{49^\circ\, 51'\, 36''} = \boxed{0'87 \text{ rad.}}$$

4 $$|M| = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 2\lambda \\ \lambda & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 20 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 18 - 12\lambda = 6\lambda^2 - 22\lambda + 16 = 0$$

$$3\lambda^2 - 11\lambda + 8 = 0 \begin{cases} \lambda = 8/3 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

Caso 1°.- si $\lambda \neq 1, \frac{8}{3} \Rightarrow Rg\, M = Rg\, M^* = 3 \Rightarrow$ son tres planos que se cortan en un punto.

Caso 2°.- si $\lambda = 1 \Rightarrow Rg\, M = 2;\ Rg\, M^* = 3 \Rightarrow$ No tienen ptos en común.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ \cancel{5} & \cancel{3} & \cancel{3} & 2 \end{array}\right) E_3 = E_1 - E_2$$

Son 3 planos que se cortan 2 a 2 formando un prisma triangular

Caso 3°.- si $\lambda = 8/3 \Rightarrow Rg\, M = 2 \Rightarrow Rg\, M = 3. \Rightarrow$ No tienen ptos en común.

$$M^* = \begin{vmatrix} 4 & 16/3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 16/3 \end{vmatrix} = -\frac{64}{3} + 32 + 6 + 6 - 24 - \frac{256}{9} = -\frac{268}{9} \neq 0$$

son tres planos que se cortan 2 a 2 formando un prisma triangular.

(B) (1) (4)

a) $\begin{matrix}\pi \perp r \\ \pi \perp s\end{matrix} \Rightarrow \vec{v_r}$ y $\vec{v_s}$ son v. dirección de π.

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z+4 \\ -1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \underline{\pi \equiv 5x + y + 7z + 31 = 0}$$

b) t corta a r $\Rightarrow$ son coplanarias $\Rightarrow \pi_1 \equiv \{Q, P_r, \vec{v_r}\} = 0$

t corta a s $\Rightarrow$ son coplanarias $\Rightarrow \pi_2 \equiv \{Q, P_s, \vec{v_s}\} = 0$

$$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x & y+2 & z-7 \\ -3 & 4 & -7 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \; ; \quad \pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x & y+2 & z-7 \\ -1 & 2 & -10 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

La recta t es la intersección de estos 2 planos

$$\boxed{t \equiv \begin{cases} x - y - z + 5 = 0 \\ 4x - 43y - 9z - 23 = 0 \end{cases}}$$

c) $\begin{matrix} t \perp r \\ t \perp s \end{matrix} \Rightarrow \vec{v_t} = \vec{v_r} \times \vec{v_s} = (-1, -2, 1) \times (4, 1, -3) = (5, 1, 7)$

t corta a r $\Rightarrow$ son coplanarias $\Rightarrow \pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x+3 & y-2 & z \\ -1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0$

t corta a s $\Rightarrow$ son coplanarias $\Rightarrow \pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z+3 \\ 4 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0$

t es la intersección de estos planos.

$$t \equiv \begin{cases} 15x - 12y - 9z + 69 = 0 \\ 10x - 43y - z + 7 = 0 \end{cases}$$

- Pto de corte de t con $r \equiv (-3-\lambda, 2-2\lambda, \lambda) = P$

$-30 - 30\lambda - 86 + 86\lambda - \lambda + 7 = 0 \; ; \; 55\lambda - 109 = 0 \; ; \; \lambda = \frac{109}{55}$

$P\left(\frac{-274}{55}, \frac{-108}{55}; \frac{109}{55}\right)$

- Pto de corte de t con $s \equiv (-1+4\mu, \mu, -3-3\mu) = Q$

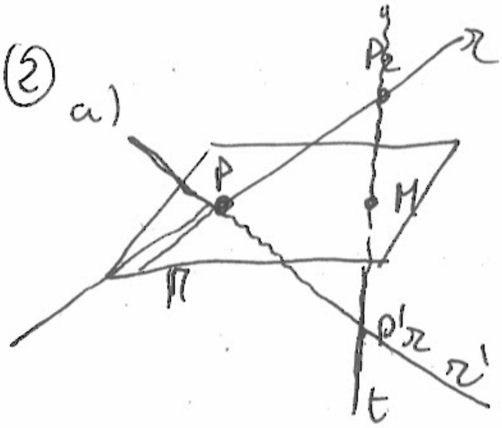
$-15 + 60\mu - 12\mu + 27 + 27\mu + 69 = 0 \; ; \; 75\mu + 81 = 0 \; ; \; \mu = \frac{-81}{75}$

$Q\left(\frac{-133}{25}, \frac{-81}{75}, \frac{6}{25}\right)$

$$d(r,s)=\frac{|[\overrightarrow{P_rP_s},\vec{v}_r,\vec{v}_s]|}{|\vec{v}_r\times\vec{v}_s|}=\frac{\begin{vmatrix} \text{[illegible]} \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & -3\end{vmatrix}}{\sqrt{25+1+49}}=\frac{13}{\sqrt{75}}=\frac{13\sqrt{3}}{15}\ u.$$

5

2 a)



$2(5+\lambda)-3(-2+3\lambda)+(1-\lambda)=5$

$10+2\lambda+6-9\lambda+1-\lambda=5$

$-8\lambda=-12 \Rightarrow \lambda=3/2 \Rightarrow P\left(\frac{13}{2},\frac{5}{2},\frac{-1}{2}\right)$

$t\perp\pi$ pasa por P_r

$$t\equiv \begin{cases} x=5+2\mu \\ y=-2-3\mu \\ z=1+\mu \end{cases} \quad \mu\in\mathbb{R}$$

$M=$ pto de corte de t con $\pi \Rightarrow 2(5+2\mu)-3(-2-3\mu)+(1+\mu)=5$

$14\mu=-12 \Rightarrow \mu=-6/7 \Rightarrow M\left(\frac{23}{7},\frac{4}{7},\frac{1}{7}\right)$

$M=\frac{P_r+P'_r}{2} \Rightarrow P'_r=2M-P_r=\left(\frac{46}{7},\frac{8}{7},\frac{2}{7}\right)-(5,-2,1)=\left(\frac{11}{7},\frac{22}{7},\frac{-5}{7}\right)$

$\vec{v}_{r'}=\overrightarrow{PP'_r}=\left(\frac{-69}{14},\frac{9}{14},\frac{-3}{14}\right)\simeq(-69,9,-3)\simeq(-23,3,-1)$

$$r'\equiv\begin{cases} x=13/2-23\alpha \\ y=5/2+3\alpha \\ z=-1/2-\alpha\end{cases}\quad \alpha\in\mathbb{R}$$

b) $P_r(5+\lambda,-2+3\lambda,1-\lambda) \Rightarrow d(P_r,\pi)=\frac{|2(5+\lambda)-3(-2+3\lambda)+(1-\lambda)-5|}{\sqrt{4+9+1}}$

$|-8\lambda+12|=14 \nearrow -8\lambda+12=14 \Rightarrow -8\lambda=2 \Rightarrow \lambda=\frac{-1}{4} \Rightarrow P_1\left(\frac{19}{4},\frac{-11}{4},\frac{5}{4}\right)$

$\searrow -8\lambda+12=-14 \Rightarrow -8\lambda=-26 \Rightarrow \lambda=\frac{13}{4} \Rightarrow P_2\left(\frac{33}{4},\frac{31}{4},\frac{-9}{4}\right)$

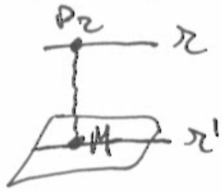
c) $$\alpha\equiv\begin{vmatrix} x-5 & y+2 & z-1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 1\end{vmatrix}=0 \qquad \alpha\equiv -y-3z+1=0$$

3 a) $r\subset\pi \Rightarrow \vec{v}_r\perp\vec{n}_\pi \Rightarrow (m,4,2)\cdot(2,-1,k)=0 \Rightarrow 2m-4+2k=0$

$P_r\in\pi \Rightarrow 2-0+k=0 \Rightarrow \boxed{k=-2} \Rightarrow 2m-4-4=0 \Rightarrow \boxed{m=4}$

b) $\alpha=\text{Arc sen}\frac{|\vec{v}_r\cdot\vec{n}_\pi|}{|\vec{v}_r|\,|\vec{n}_\pi|}=\text{Arc sen}\frac{-2-4+6}{\sqrt{1+16+4}\,\sqrt{4+1+9}}=0^\circ$

La recta r es paralela a Π



recta $t \perp \Pi$, Pasa por P_r

$$t \equiv \left.\begin{array}{l} x = 1 + 2\alpha \\ y = -\alpha \\ z = 1 + 3\alpha \end{array}\right\} \alpha \in \mathbb{R}.$$

M = pto de corte $2(1+2\alpha) + \alpha + 3(1+3\alpha) = 0$

$14\alpha = -5 \Rightarrow \alpha = -5/14 \Rightarrow M\left(\frac{2}{7}, \frac{5}{14}, \frac{-1}{14}\right)$

$M = \dfrac{P_r + P_{r'}}{2} \Rightarrow P_{r'} = 2M - P_r = \left(\frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{-1}{7}\right) - (1,0,1) = \left(\frac{-3}{7}, \frac{5}{7}, \frac{-8}{7}\right)$

$$r' \equiv \left.\begin{array}{l} x = -\frac{3}{7} - \mu \\ y = \frac{5}{7} + 4\mu \\ z = -\frac{8}{7} + 2\mu \end{array}\right\} \mu \in \mathbb{R}.$$

(4)

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = a \ \ 2 + 2 + a^2 = a^2 + a = 0 \begin{array}{l} \nearrow a = 0 \\ \searrow a = -1 \end{array}$$

Caso 1°.- Si $a \neq 0, -1 \Rightarrow Rg\, M = Rg\, M^* = 3 \Rightarrow$ Son tres planos que se cortan en un punto

Caso 2°.- Si $a = 0 \Rightarrow Rg\, M = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow Rg\, M^* = 3$$

Los planos Π_1 y Π_3 son paralelos y Π_2 los corta.

Caso 3°.- Si $a = -1 \Rightarrow Rg\, M = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow Rg\, M^* = 2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

No hay planos paralelos.

Son tres planos que se cortan en la misma recta.