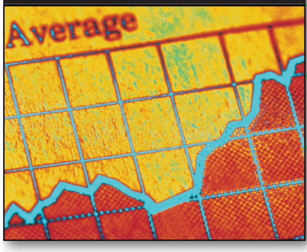


UNIDAD 10 LAS MUESTRAS ESTADÍSTICAS

Página 261

Lanzamiento de varios dados

CUATRO DADOS

La distribución de probabilidades de la suma de cuatro dados es la siguiente:

x_i	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
p_i	$\frac{1}{6^4}$	$\frac{4}{6^4}$	$\frac{10}{6^4}$	$\frac{20}{6^4}$	$\frac{35}{6^4}$	$\frac{56}{6^4}$	$\frac{80}{6^4}$	$\frac{104}{6^4}$	$\frac{125}{6^4}$	$\frac{140}{6^4}$	$\frac{146}{6^4}$

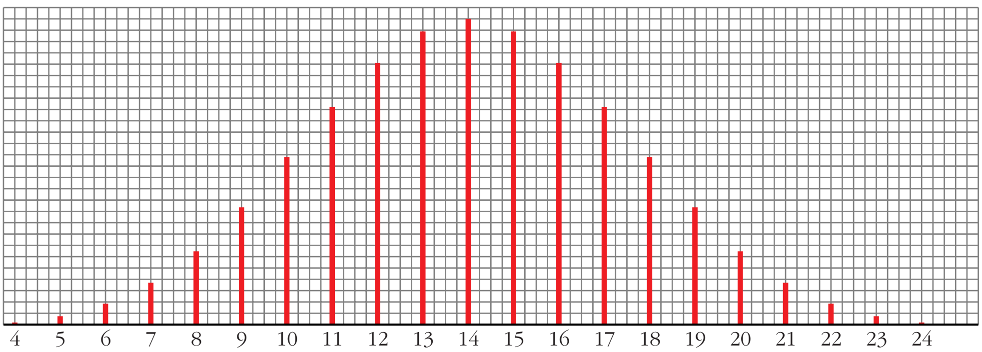
x_i	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
p_i	$\frac{140}{6^4}$	$\frac{125}{6^4}$	$\frac{104}{6^4}$	$\frac{80}{6^4}$	$\frac{56}{6^4}$	$\frac{35}{6^4}$	$\frac{20}{6^4}$	$\frac{10}{6^4}$	$\frac{4}{6^4}$	$\frac{1}{6^4}$

a) Haz su representación gráfica y observa su parecido con la distribución normal.

b) Calcula su media y su desviación típica. (Hazlo con calculadora y ten en cuenta que, puesto que los denominadores son iguales, puedes poner en las frecuencias los correspondientes numeradores).

c) Comprueba que los parámetros del promedio de los resultados son MEDIA = 3,5 y DESVIACIÓN TÍPICA = 0,855 pues se obtienen dividiendo por cuatro los correspondientes parámetros de sus sumas. La media es la misma que las anteriores y la desviación típica menor que las anteriores.

a)



b) $\mu = 14$; $\sigma = 3{,}42$

c) $14 : 4 = 3{,}5$; $3{,}42 : 4 = 0{,}855$

Página 265

1. Una ganadería tiene 3 000 vacas. Se quiere extraer una muestra de 120. Explica cómo se obtiene la muestra:

a) Mediante muestreo aleatorio simple.

b) Mediante muestreo aleatorio sistemático.

a) — Se numeran las vacas del 1 al 3 000.

— Se sortean 120 números de entre los 3 000.

— La muestra estará formada por las 120 vacas a las que correspondan los números obtenidos.

b) Coeficiente de elevación: $h = \dfrac{3\,000}{120} = 25$

— Se sortea un número del 1 al 25. Supongamos que sale el 9.

— Las vacas seleccionadas para la muestra serían las que correspondieran a los números 9, 34, 59, 84, 109, …, 2 984.

Página 266

2. Una ganadería tiene 2 000 vacas. Son de distintas razas: 853 de A, 512 de B, 321 de C, 204 de D y 110 de E. Queremos extraer una muestra de 120:

a) ¿Cuántas hay que elegir de cada raza para que el muestreo sea estratificado con reparto proporcional?

b) ¿Cómo ha de ser la elección dentro de cada estrato?

a) Llamamos n_1 al número de vacas que debemos elegir de raza A, n_2 al de raza B, n_3 al de C, n_4 al de D y n_5 al de E.

Ha de cumplirse que:

$$\frac{120}{2\,000} = \frac{n_1}{853} = \frac{n_2}{512} = \frac{n_3}{321} = \frac{n_4}{204} = \frac{n_5}{110}$$

Así, obtenemos:

$$n_1 = 51{,}18 \quad n_2 = 30{,}72 \quad n_3 = 19{,}26 \quad n_4 = 12{,}24 \quad n_5 = 6{,}6$$

La parte entera de estos número suma:

$51 + 30 + 19 + 12 + 6 = 118$. Faltan 2 para llegar a 120.

Por tanto, debemos elegir:

51 vacas de raza A, 31 vacas de B, 19 de C, 12 de D y 7 de E.

Página 267

3. Obtén aleatoriamente cuatro números enteros al azar entre 1 y 95.

Por ejemplo:

RAN# 0.226 ⊗ 95 ⊕ 1 ⊜ 22.47 → 22

RAN# 0.048 ⊗ 95 ⊕ 1 ⊜ 5.56 → 5

RAN# 0.277 ⊗ 95 ⊕ 1 ⊜ 27.315 → 27

RAN# 0.842 ⊗ 95 ⊕ 1 ⊜ 80.99 → 80

Hemos obtenido los números 5, 22, 27 y 80.

4. Obtén cinco números enteros elegidos aleatoriamente entre 1 y 800.

Por ejemplo:

RAN# 0.104 ⊗ 800 ⊕ 1 ⊜ 84.2 → 84

RAN# 0.098 ⊗ 800 ⊕ 1 ⊜ 79.4 → 79

RAN# 0.835 ⊗ 800 ⊕ 1 ⊜ 669 → 669

RAN# 0.449 ⊗ 800 ⊕ 1 ⊜ 360.2 → 360

RAN# 0.622 ⊗ 800 ⊕ 1 ⊜ 498.6 → 498

Hemos obtenido los números 79, 84, 360, 498 y 669.

Página 268

5. De una población de N = 856 elementos, deseamos extraer una muestra de tamaño n = 10.

Mediante el uso de números aleatorios, designa cuáles son los 10 individuos que componen la muestra.

Para multiplicar por 856 los números que aparezcan en pantalla, introducimos:

856 ⊗ ⊗ (factor constante)

Ahora recurrimos a los números aleatorios. Por ejemplo, podemos obtener:

RAN# 0.835 ⊜ 714.76 → 715

RAN# 0.419 ⊜ 358.664 → 359

RAN# 0.554 ⊜ 474.224 → 475

RAN# 0.567 ⊜ 485.352 → 486

RAN# 0.530 ⊜ 453.68 → 454

RAN# 0.057 ⊜ 48.792 → 49

RAN# 0.993 ⊜ 850.008 → 851

RAN# 0.396 = 338.976 $\rightarrow$ 339

RAN# 0.013 = 11.128 $\rightarrow$ 12

RAN# 0.636 = 544.416 $\rightarrow$ 545

Los individuos elegidos para la muestra serían los correspondientes a los números 12, 49, 339, 359, 454, 475, 486, 545, 715 y 851.

6. **De una población de 543 individuos, queremos extraer una muestra de tamaño 40 mediante números aleatorios.**

Obtén los cinco primeros elementos de dicha muestra.

Para multiplicar por 543 los números que aparezcan en pantalla, introducimos:

543 ⊠ ⊠ (factor constante)

Ahora recurrimos a los números aleatorios. Por ejemplo, podemos obtener:

RAN# 0.237 = 128.691 $\rightarrow$ 129

RAN# 0.071 = 38.553 $\rightarrow$ 39

RAN# 0.614 = 333.402 $\rightarrow$ 334

RAN# 0.497 = 269.871 $\rightarrow$ 270

RAN# 0.475 = 257.925 $\rightarrow$ 258

Los cinco primeros elementos de la muestra serían los correspondientes a los números 129, 39, 334, 270 y 258.

Página 270

1. **Halla las siguientes probabilidades en una distribución $N(0, 1)$:**

a) $P[z > 2,8]$	**b)** $P[z \leq -1,8]$	**c)** $P[z > -1,8]$
d) $P[1,62 \leq z < 2,3]$	**e)** $P[1 \leq z \leq 2]$	**f)** $P[-0,61 \leq z \leq 1,4]$
g) $P[-1 \leq z \leq 2]$	**h)** $P[-2,3 < z < -1,7]$	**i)** $P[-2 \leq z \leq -1]$

a) $P[z > 2,8] = 1 - P[z \leq 2,8] = 1 - 0,9974 = 0,0026$

b) $P[z \leq -1,8] = P[z \geq 1,8] = 1 - P[z < 1,8] = 1 - 0,9641 = 0,0359$

c) $P[z > -1,8] = P[z < 1,8] = 0,9641$

d) $P[1,62 \leq z < 2,3] = P[z < 2,3] - P[z \leq 1,62] = 0,9893 - 0,9474 = 0,0419$

e) $P[1 \leq z \leq 2] = P[z \leq 2] - P[z \leq 1] = 0,9772 - 0,8413 = 0,1359$

f) $P[-0,61 \leq z \leq 1,4] = P[z \leq 1,4] - P[z \leq -0,61] = P[z \leq 1,4] - P[z \geq 0,61] =$

$= P[z \leq 1,4] - (1 - P[z \leq 0,61]) = 0,9192 - (1 - 0,7291) = 0,6483$

g) $P[-1 \le z \le 2] = P[z \le 2] - P[z \le -1] = P[z \le 2] - P[z \ge 1] =$

$= P[z \le 2] - (1 - P[z \le 1]) = 0{,}9772 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}8185$

h) $P[-2{,}3 < z < -1{,}7] = P[1{,}7 < z < 2{,}3] = P[z < 2{,}3] - P[z < 1{,}7] =$

$= 0{,}9893 - 0{,}9554 = 0{,}0339$

i) $P[-2 \le z \le -1] = P[1 \le z \le 2] = P]z \le 2] - P[z \le 1] = 0{,}9772 - 0{,}8413 = 0{,}1359$

2. **Calcula el valor de k (exacta o aproximadamente) en cada uno de los siguientes casos:**

a) $P[z \le k] = 0{,}5$ **b)** $P[z \le k] = 0{,}8729$

c) $P[z \le k] = 0{,}9$ **d)** $P[z \le k] = 0{,}33$

e) $P[z \le k] = 0{,}2$ **f)** $P[z > k] = 0{,}12$

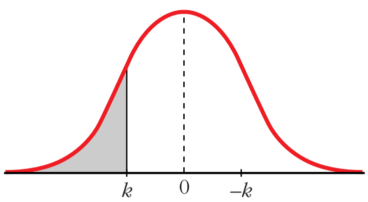
g) $P[z \ge k] = 0{,}9971$ **h)** $P[z \ge k] = 0{,}6$

a) $P[z \le k] = 0{,}5 \quad \to \quad k = 0$

b) $P[z \le k] = 0{,}8729 \quad \to \quad k = 1{,}14$

c) $P[z \le k] = 0{,}9 \quad \to \quad k \approx 1{,}28$

d) $P[z \le k] = 0{,}33$



$P[z \ge -k] = 0{,}33 \quad \to \quad P[z \le -k] = 1 - 0{,}33 = 0{,}67$

$\to \quad -k = 0{,}44 \quad \to \quad k = -0{,}44$

e) $P[z \le k] = 0{,}2$

$P[z \le -k] = 1 - 0{,}2 = 0{,}8 \quad \to \quad -k \approx 0{,}84 \quad \to \quad k \approx -0{,}84$

f) $P[z > k] = 0{,}12$

$P[z \le k] = 1 - 0{,}12 = 0{,}88 \quad \to \quad k \approx 1{,}175$

g) $P[z \ge k] = 0{,}9971$

$P[z \le -k] = 0{,}9971 \quad \to \quad -k = 2{,}76 \quad \to \quad k = -2{,}76$

h) $P[z \ge k] = 0{,}6$

$P[z \le -k] = 0{,}6 \quad \to \quad -k \approx 0{,}25 \quad \to \quad k \approx -0{,}25$

Página 271

3. **En una distribución $N(18, 4)$, halla las siguientes probabilidades:**

a) $P[x \le 20]$ **b)** $P[x \ge 16{,}5]$ **c)** $P[x \le 11]$

d) $P[19 \le x \le 23]$ **e)** $P[11 \le x < 25]$

a) $P[x \le 20] = P\left[z \le \dfrac{20 - 18}{4}\right] = P[z \le 0{,}5] = 0{,}6915$

b) $P[x \ge 16{,}5] = P\left[z \ge \dfrac{16{,}5 - 18}{4}\right] = P[z \ge -0{,}38] = P[z \le 0{,}38] = 0{,}6480$

c) $P[x \le 11] = P\left[z \le \dfrac{11 - 18}{4}\right] = P[z \le -1{,}75] = P[z \ge 1{,}75] = 1 - P[z \le 1{,}75] =$

$= 1 - 0{,}9599 = 0{,}0401$

d) $P[19 \le x \le 23] = P\left[\dfrac{19 - 18}{4} \le z \le \dfrac{23 - 18}{4}\right] = P[0{,}25 \le z \le 1{,}25] =$

$= P[z \le 1{,}25] - P[z \le 0{,}25] = 0{,}8944 - 0{,}5987 = 0{,}2957$

e) $P[11 \le x < 25] = P\left[\dfrac{11 - 18}{4} \le z \le \dfrac{25 - 18}{4}\right] = P[-1{,}75 \le z \le 1{,}75] =$

$= P[z \le 1{,}75] - P[z \le -1{,}75] = P[z \le 1{,}75] - P[z \ge 1{,}75] =$

$= 2P[z \le 1{,}75] - 1 = 2 \cdot 0{,}9599 - 1 = 0{,}9198$

4. **En una distribución $N(6; 0{,}9)$, calcula k para que se den las siguientes igualdades:**

a) $P[x \le k] = 0{,}9772$ **b)** $P[x \le k] = 0{,}8$

c) $P[x \le k] = 0{,}3$ **d)** $P[x \ge k] = 0{,}6331$

a) $P[x \le k] = 0{,}9772$

$P[x \le k] = P\left[z \le \dfrac{k - 6}{0{,}9}\right] = 0{,}9772 \rightarrow \dfrac{k - 6}{0{,}9} = 2 \rightarrow k = 7{,}8$

b) $P[x \le k] = 0{,}8$

$P[x \le k] = P\left[z \le \dfrac{k - 6}{0{,}9}\right] = 0{,}8 \rightarrow \dfrac{k - 6}{0{,}9} \approx 0{,}84 \rightarrow k \approx 6{,}756$

c) $P[x \le k] = 0{,}3$

$P[x \le k] = P\left[z \le \dfrac{k - 6}{0{,}9}\right] = 0{,}3 \rightarrow -\left(\dfrac{k - 6}{0{,}9}\right) \approx 0{,}52 \rightarrow k \approx 5{,}532$

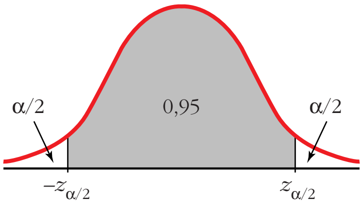
d) $P[x \ge k] = 0{,}6331$

$P[x \ge k] = P\left[z \ge \dfrac{k - 6}{0{,}9}\right] = 0{,}6331 \rightarrow -\left(\dfrac{k - 6}{0{,}9}\right) = 0{,}34 \rightarrow k = 5{,}694$

Página 272

1. Calcula razonadamente los valores críticos correspondientes a las probabilidades 0,95 y 0,99.

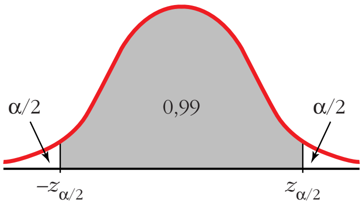
- Para una probabilidad de 0,95:



$$\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - 0,95}{2} = 0,025; \;\; 0,95 + 0,025 = 0,975$$

$$P[z \leq z_{\alpha/2}] = 0,975 \;\; \rightarrow \;\; z_{\alpha/2} = 1,96$$

- Para una probabilidad de 0,99:



$$\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - 0,99}{2} = 0,005; \;\; 0,99 + 0,005 = 0,995$$

$$P[z \leq z_{\alpha/2}] = 0,995 \;\; \rightarrow \;\; z_{\alpha/2} = 2,575$$

2. Calcula los valores críticos correspondientes:

a) α **= 0,09** **b)** α **= 0,21** **c)** α **= 0,002**

a) $\alpha = 0,09 \;\; \rightarrow \;\; 1 - \alpha = 0,91$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{0,09}{2} = 0,045; \;\; 0,91 + 0,045 = 0,955$$

$$P[z \leq z_{\alpha/2}] = 0,955 \;\; \rightarrow \;\; z_{\alpha/2} \approx 1,70$$

b) $\alpha = 0,21 \;\; \rightarrow \;\; 1 - \alpha = 0,79$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{0,21}{2} = 0,105; \;\; 0,79 + 0,105 = 0,895$$

$$P[z \leq z_{\alpha/2}] = 0,895 \;\; \rightarrow \;\; z_{\alpha/2} \approx 1,25$$

c) $\alpha = 0,002 \;\; \rightarrow \;\; 1 - \alpha = 0,998$

$$\frac{\alpha}{2} = 0,001; \;\; 0,998 + 0,001 = 0,999$$

$$P[z \leq z_{\alpha/2}] = 0,999 \;\; \rightarrow \;\; z_{\alpha/2} = 3,08$$

Página 273

3. En una distribución $N(173, 6)$ halla los intervalos característicos para el 90%, el 95% y el 99%.

Para el 90%: $(173 - 1{,}645 \cdot 6;\ 173 + 1{,}645 \cdot 6) = (163{,}13;\ 182{,}87)$

Para el 95%: $(173 - 1{,}96 \cdot 6;\ 173 + 1{,}96 \cdot 6) = (161{,}24;\ 184{,}76)$

Para el 99%: $(173 - 2{,}575 \cdot 6;\ 173 + 2{,}575 \cdot 6) = (157{,}55;\ 188{,}45)$

4. En una distribución $N(18, 4)$ halla los intervalos característicos para el 95% y el 99,8%.

Para el 95%: $(18 - 1{,}96 \cdot 4;\ 18 + 1{,}96 \cdot 4) = (10{,}16;\ 25{,}84)$

Para el 99,8%: $1 - \alpha = 0{,}998 \ \to\ \alpha = 0{,}002 \ \to\ \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}001$

$0{,}998 + 0{,}001 = 0{,}999 \ \to\ z_{\alpha/2} = 3{,}08$

$(18 - 3{,}08 \cdot 4;\ 18 + 3{,}08 \cdot 4) = (5{,}68;\ 30{,}32)$

Página 276

1. Los parámetros de una variable son: $\mu = 16{,}4$, $\sigma = 4{,}8$. Nos disponemos a extraer una muestra de $n = 400$ individuos:

a) Halla el intervalo característico para las medias muestrales correspondientes a una probabilidad $p = 0{,}99$.

b) Calcula $P[16 < \bar{x} < 17]$.

Como $n > 30$, las medias muestrales se distribuyen según una normal de media $\mu = 16{,}4$ y de desviación típica $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{4{,}8}{\sqrt{400}} = \dfrac{4{,}8}{20} = 0{,}24$; es decir:

$\bar{x}$ es $N(16{,}4;\ 0{,}24)$

a) Para $p = 0{,}99 \ \to\ z_{\alpha/2} = 2{,}575$

El intervalo característico es:

$(16{,}4 - 2{,}575 \cdot 0{,}24;\ 16{,}4 + 2{,}575 \cdot 0{,}24)$; es decir: $(15{,}78;\ 17{,}02)$

b) $P[16 < \bar{x} < 17] = P\left[\dfrac{16 - 16{,}4}{0{,}24} < z < \dfrac{17 - 16{,}4}{0{,}24}\right] = P[-1{,}67 < z < 2{,}5] =$

$= P[z < 2{,}5] - P[z < -1{,}67] = P[z < 2{,}5] - P[z > 1{,}67] =$

$= P[z < 2{,}5] - (1 - P[z \le 1{,}67]) = 0{,}9938 - (1 - 0{,}9525) = 0{,}9463$

2. **Los sueldos, en euros, de los empleados de una fábrica se distribuyen $N(1\,200, 400)$. Se elige al azar una muestra de 25 de ellos. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de sus sueldos sea superior a 35 000 €?**

Halla el intervalo característico para las sumas de 25 individuos, correspondientes a una probabilidad del 0,9.

La suma de los sueldos sigue una distribución normal de media $n\mu = 25 \cdot 1\,200 = 30\,000$ € y de desviación típica $\sigma\sqrt{n} = 400 \cdot \sqrt{25} = 400 \cdot 5 = 2\,000$ €; es decir:

$$\Sigma x \text{ es } N(30\,000;\ 2\,000)$$

Por tanto:

$$P[\Sigma x > 35\,000] = P\left[z > \frac{35\,000 - 30\,000}{2\,000}\right] = P[z > 2{,}5] =$$

$$= 1 - P[z \le 2{,}5] = 1 - 0{,}9938 = 0{,}0062$$

Intervalo característico:

Para una probabilidad del 0,9 es:

$(30\,000 - 1{,}645 \cdot 2\,000;\ 30\,000 + 1{,}645 \cdot 2\,000)$; es decir: $(26\,710;\ 33\,290)$

Página 278

1. **La variable x es binomial, con $n = 1\,200$ y $p = 0{,}008$.**

a) Calcula la probabilidad de que x sea mayor que 10.

b) Halla el intervalo característico para una probabilidad del 95%.

Como $np = 9{,}6 > 5$ y $nq > 5$, podemos aproximar mediante una normal de media $\mu = np = 9{,}6$ y de desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{1\,200 \cdot 0{,}008 \cdot 0{,}992} = 3{,}09$.

Es decir:

$$x \text{ es } B(1\,200;\ 0{,}008) \ \to\ x' \text{ es } N(9{,}6;\ 3{,}09) \ \to\ z \text{ es } N(0,\ 1)$$

a) $P[x > 10] = P[x' \ge 10{,}5] = P\left[z \ge \frac{10{,}5 - 9{,}6}{3{,}09}\right] = P[z \ge 0{,}29] =$

$$= 1 - P[z < 0{,}29] = 1 - 0{,}6141 = 0{,}3859$$

b) Para una probabilidad del 95%, $z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

El intervalo característico será:

$(9{,}6 - 1{,}96 \cdot 3{,}09;\ 9{,}6 + 1{,}96 \cdot 3{,}09)$; es decir: $(3{,}54;\ 15{,}66)$

2. **Si tenemos un dado correcto y lo lanzamos 50 veces:**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que “el 1” salga más de 10 veces?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que salga “múltiplo de 3” al menos 20 veces?

a) Llamamos x = "nº de veces que sale el 1"; así, x es $B\left(50; \frac{1}{6}\right)$.

Como $np > 5$ y $nq > 5$, podemos aproximar mediante una normal de media $\mu = 50 \cdot \frac{1}{6} = 8{,}33$ y de desviación típica $\sigma = \sqrt{50 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 2{,}64$; es decir:

$$x \text{ es } B\left(50; \frac{1}{6}\right) \rightarrow x' \text{ es } N(8{,}33; 2{,}64) \rightarrow z \text{ es } N(0, 1)$$

$$P[x > 10] = P[x' \geq 10{,}5] = P\left[z \geq \frac{10{,}5 - 8{,}33}{2{,}64}\right] = P[z \geq 0{,}82] = 1 - P[z < 0{,}82] =$$

$$= 1 - 0{,}7939 = 0{,}2061$$

b) Llamamos x = "nº de veces que sale múltiplo de 3". La probabilidad de obtener un múltiplo de 3 en una tirada es $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Así, x es $B\left(50; \frac{1}{3}\right)$.

Como $np > 5$ y $nq > 5$, podemos aproximar mediante una normal de media $\mu = 50 \cdot \frac{1}{3} = 16{,}67$ y de desviación típica $\sigma = \sqrt{50 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = 3{,}33$; es decir:

$$x \text{ es } B\left(50; \frac{1}{3}\right) \rightarrow x' \text{ es } N(16{,}67; 3{,}33) \rightarrow z \text{ es } N(0, 1)$$

$$P[x \geq 20] = P[x' \geq 19{,}5] = P\left[z \geq \frac{19{,}5 - 16{,}67}{3{,}33}\right] = P[z \geq 0{,}85] = 1 - P[z < 0{,}85] =$$

$$= 1 - 0{,}8023 = 0{,}1977$$

Página 280

1. Como sabemos, en un dado correcto la proporción de veces que sale el 5 es $1/6 = 0{,}1\overset{\frown}{6}$. Halla los intervalos característicos correspondientes al 90%, 95% y 99% para la "proporción de cincos", en tandas de 100 lanzamientos de un dado correcto.

Las proporciones de cincos en tandas de 100 lanzamientos siguen una distribución normal de media $p = \frac{1}{6} = 0{,}17$ y de desviación típica $\sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{(1/6) \cdot (5/6)}{100}} =$ $= 0{,}037$; es decir:

$$pr \text{ es } N(0{,}17; 0{,}037)$$

Hallamos los intervalos característicos:

- Para el 90%: $(0{,}17 \pm 1{,}645 \cdot 0{,}037) = (0{,}109; 0{,}231)$
- Para el 95%: $(0{,}17 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}037) = (0{,}097; 0{,}243)$
- Para el 99%: $(0{,}17 \pm 2{,}575 \cdot 0{,}037) = (0{,}075; 0{,}265)$

Página 286

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Muestras

1 **En cada uno de los casos que se mencionan a continuación, el colectivo ¿es población o es muestra?**

Explica por qué.

a) Un campesino tiene 87 gallinas. Para probar la eficacia de un nuevo tipo de alimentación, las pesa a todas antes y después de los 30 días que dura el tratamiento.

b) Un granjero prueba con 100 de sus gallinas la eficacia de un nuevo tipo de alimentación.

a) Es **población**, porque pesa a todas las gallinas.

b) Es **muestra**, porque no pesa a todas las gallinas, sino solo a una parte de ellas.

2 **Un fabricante de elásticos quiere estudiar su resistencia a la rotura. Para ello, los estira hasta que se rompen y anota el grado de estiramiento que alcanzan sin romperse.**

¿Puede realizar dicho estiramiento sobre la población o es imprescindible realizarlo sobre la muestra? ¿Por qué?

Es imprescindible hacerlo sobre una muestra, porque interesa romper la menor cantidad de elásticos posible.

3 **Solo uno de los siguientes procedimientos nos permite obtener una muestra representativa. Di cuál es y, en los otros, estudia el sentido del sesgo y su importancia:**

a) Para estudiar las frecuencias relativas de las letras, se toman al azar 20 libros de la biblioteca de un centro escolar y se cuenta las veces que aparece cada letra en la página 20 de los libros seleccionados.

b) Para conocer la opinión de sus clientes sobre el servicio ofrecido por unos grandes almacenes, se selecciona al azar, entre los que poseen tarjeta de compra, a 100 personas entre las que han gastado menos de 1 000 € el último año, otras 100 entre las que han gastado entre 1 000 € y 5 000 € y 100 más entre las que han gastado más de 5 000 €.

c) Para calcular el número medio de personas por cartilla en un Centro de Salud de la Seguridad Social, los médicos toman nota de las cartillas de las personas que acuden a las consultas durante un mes.

a) Es una muestra representativa.

b) No es representativa, porque hay mucha más gente en un intervalo (por ejemplo, entre 1 000 € y 5 000 €) que en otro (más de 5 000 €), y hemos tomado el mismo número de representantes. Además, hay otra mucha gente sin tarjeta que no se ha tomado en cuenta.

c) No es representativa, ya que lo que más se va a ver son las cartillas que corresponden a familias numerosas. Está claro que, cuanta más genta tenga esa cartilla, más fácil es que ese mes se tome nota de ella.

4 **La validez de la información que nos proporciona una encuesta depende, en gran medida, de la cuidadosa elaboración del cuestionario.**

Algunas de las características que deben tener las preguntas, son:

— Ser cortas y con un lenguaje sencillo.

— Sus respuestas deben presentar opciones no ambiguas y equilibradas.

— Que no requieran esfuerzo de memoria.

— Que no levanten prejuicios en los encuestados.

Estudia si las siguientes preguntas son adecuadas para formar parte de una encuesta y corrige los errores que observes:

a) ¿Cuánto tiempo sueles estudiar cada día?

Mucho ☐ **Poco** ☐ **Según el día** ☐

b) ¿Cuántas veces fuiste al cine a lo largo del año pasado?

c) ¿Qué opinión tienes sobre la gestión del alcalde?

Muy buena ☐ **Buena** ☐ **Indiferente** ☐

d) ¿Pierden sus hijos el tiempo viendo la televisión?

Sí ☐ **No** ☐

e) ¿En qué grado cree usted que la instalación de la planta de reciclado afectaría al empleo y a las condiciones de salud de nuestra ciudad?

a) y c) adecuadas (para mejorarlo, podríamos añadir en c) la opción: Mala ☐).

b) Cambiar por:

¿Con qué frecuencia vas al cine?

☐ Mucho ☐ Poco ☐ Nunca

d) Cambiar por:

¿Con qué frecuencia ven sus hijos la televisión?

☐ Mucho ☐ Poco ☐ Nunca

e) Cambiar por:

¿Instalaría una planta de reciclado en su ciudad?

☐ Sí ☐ No

5 **De un colectivo de 500 personas elige una muestra de 20 mediante:**

a) Un muestreo aleatorio sistemático.

b) Un muestreo aleatorio simple.

Utiliza la tecla RAN# de la calculadora.

Para los dos casos, numeramos a las personas del 1 al 500.

a) $h = \frac{500}{20} = 25$

Origen: 25 × RAN# + 1 = 14.075 (por ejemplo)

Deberemos elegir las personas cuyos números sean:

14, 39, 64, 89, 114, 139, 164, 189, 214, 239, 264, 289, 314, 339, 364, 389, 414, 439, 464, 489.

b) Con la tecla RAN# de la calculadora, hacemos: 500 × × RAN# = hasta obtener 20 resultados distintos.

6 **En un conjunto de 1 000 conductores hay:**

— 50 taxistas.

— 75 camioneros.

— 25 conductores de autobús.

El resto son conductores de vehículos corrientes y se reparten así:

— 250 con más de 20 años de experiencia.

— 425 con una experiencia de entre 5 y 20 años.

— 175 con una experiencia de 0 a 5 años.

Para confeccionar una muestra de 40 individuos mediante muestreo aleatorio estratificado proporcional, ¿cuántos hay que seleccionar de cada uno de los seis estratos?

Llamamos n_1 al número de taxistas que tendríamos que seleccionar, n_2 al número de camioneros, n_3 al número de conductores de autobuses, n_4 al número de conductores con más de 20 años de experiencia, n_5 al de conductores con una experiencia entre 5 y 20 años y n_6 al de conductores con una experiencia de 0 a 5 años. Entonces:

$$\frac{n_1}{50} = \frac{n_2}{75} = \frac{n_3}{25} = \frac{n_4}{250} = \frac{n_5}{425} = \frac{n_6}{175} = \frac{40}{1\,000}$$

Así, deberemos elegir:

$n_1 = 2$ taxistas

$n_2 = 3$ camioneros

$n_3 = 1$ conductor de autobús

$n_4 = 10$ conductores con más de 20 años de experiencia

$n_5 = 17$ con experiencia entre 5 y 20 años

$n_6 = 7$ con experiencia entre 0 y 5 años

Página 287

7 S **En cierto barrio se quiere hacer un estudio para conocer mejor el tipo de actividades de ocio que gustan más a sus habitantes. Para ello, van a ser encuestados 100 individuos elegidos al azar.**

a) Explica qué procedimiento de selección sería más adecuado utilizar: muestreo con o sin reposición. ¿Por qué?

b) Como los gustos cambian con la edad y se sabe que en el barrio viven 2 500 niños, 7 000 adultos y 500 ancianos, se decide elegir la muestra utilizando muestreo estratificado.

b.1) Define los estratos.

b.2) Determina el tamaño muestral correspondiente a cada estrato.

a) Muestreo sin reemplazamiento para evitar repeticiones.

b) b.1) Niños, adultos y ancianos.

b.2) Llamamos n_1 al número de niños que deberíamos elegir, n_2 al número de adultos y n_3 al número de ancianos.

Tenemos que:

$$\frac{n_1}{2\,500} = \frac{n_2}{7\,000} = \frac{n_3}{500} = \frac{100}{10\,000}$$

Así, deberían elegirse:

$n_1 = 25$ niños

$n_2 = 70$ adultos

$n_3 = 5$ ancianos

8 S **En determinada provincia hay cuatro comarcas, C1, C2, C3 y C4, con un total de 1 500 000 personas censadas. De ellas, 300 000 residen en C1, 450 000 en C2 y 550 000 en C3. Se quiere realizar un estudio sobre las costumbres alimenticias en esa provincia basado en una muestra de 3 000 personas.**

a) ¿Qué tipo de muestreo deberíamos realizar si queremos que en la muestra resultante haya representación de todas las comarcas?

b) ¿Qué número de personas habría que seleccionar en cada comarca, atendiendo a razones de proporcionalidad?

c) ¿Cómo seleccionarías las personas en cada comarca?

Justifica las respuestas.

a) Deberíamos realizar un muestreo aleatorio estratificado.

b) El número de personas que residen en C4 es:

$$1\,500\,000 - (300\,000 + 450\,000 + 550\,000) = 200\,000$$

Llamamos n_1, n_2, n_3 y n_4 al número de personas que tendríamos que seleccionar en cada comarca (C1, C2, C3 y C4, respectivamente). Entonces:

$$\frac{n_1}{300\,000} = \frac{n_2}{450\,000} = \frac{n_3}{550\,000} = \frac{n_4}{200\,000} = \frac{3\,000}{1\,500\,000}$$

Por tanto, debemos elegir:

n_1 = 600 personas de C1

n_2 = 900 personas de C2

n_3 = 1 100 personas de C3

n_4 = 400 personas de C4

c) Dentro de cada comarca, podríamos seleccionarlos mediante un muestreo aleatorio simple, o mediante un muestreo sistemático.

Intervalos característicos
Distribución de medias y proporciones muestrales

9 **En una distribución normal de media $\mu = 9{,}5$ y varianza $\sigma^2 = 1{,}44$, halla el intervalo característico para el 99%.**

Para el 99% $\rightarrow$ $1 - \alpha = 0{,}99$ $\rightarrow$ $z_{\alpha/2} = 2{,}575$

El intervalo será de la forma:

$$(\mu - 2{,}575 \cdot \sigma,\ \mu + 2{,}575 \cdot \sigma)$$

En este caso, como $\mu = 9{,}5$ y $\sigma = \sqrt{1{,}44} = 1{,}2$, queda:

$$(9{,}5 - 2{,}575 \cdot 1{,}2;\ 9{,}5 + 2{,}575 \cdot 1{,}2), \text{ es decir: } (6{,}41;\ 12{,}59)$$

10 **En las distribuciones normales cuyos parámetros se dan, halla el intervalo característico que en cada caso se indica:**

	a)	b)	c)	d)	e)
MEDIA, μ	0	0	0	0	112
DESV. TÍPICA, σ	1	1	1	1	15
PROBABILIDAD	95	99	90	80	95

	f)	g)	h)	i)
MEDIA, μ	3 512	3 512	3 512	3 512
DESV. TÍPICA, σ	550	550	550	550
PROBABILIDAD	99	95	90	80

El intervalo característico es de la forma:

$$(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \sigma;\ \mu + z_{\alpha/2} \cdot \sigma)$$

a) $z_{\alpha/2} = 1{,}96$; $\mu = 0$; $\sigma = 1$

Intervalo $(-1{,}96;\ 1{,}96)$

b) $z_{\alpha/2} = 2{,}575$; $\mu = 0$; $\sigma = 1$

Intervalo $(-2{,}575;\ 2{,}575)$

c) $z_{\alpha/2} = 1{,}645$; $\mu = 0$; $\sigma = 1$

Intervalo $(-1{,}645;\ 1{,}645)$

d) $z_{\alpha/2} = 1{,}28$; $\mu = 0$; $\sigma = 1$

Intervalo $(-1{,}28;\ 1{,}28)$

e) $z_{\alpha/2} = 1{,}96$; $\mu = 112$; $\sigma = 15$

Intervalo $(82{,}6;\ 141{,}4)$

f) $z_{\alpha/2} = 2{,}575$; $\mu = 3\,512$; $\sigma = 550$

Intervalo $(2\,095{,}75;\ 4\,928{,}25)$

g) $z_{\alpha/2} = 1{,}96$; $\mu = 3\,512$; $\sigma = 550$

Intervalo $(2\,434;\ 4\,590)$

h) $z_{\alpha/2} = 1{,}645$; $\mu = 3\,512$; $\sigma = 550$

Intervalo $(2\,607{,}25;\ 4\,416{,}75)$

i) $z_{\alpha/2} = 1{,}28$; $\mu = 3\,512$; $\sigma = 550$

Intervalo $(2\,808;\ 4\,216)$

11 En una distribución normal con media $\mu = 25$ y desviación típica $\sigma = 5{,}3$; obtén un intervalo centrado en la media, $(\mu - k, \mu + k)$, de forma que el 95% de los individuos estén en ese intervalo.

El intervalo será de la forma:

$$(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \sigma;\ \mu + z_{\alpha/2} \cdot \sigma)$$

Como $1 - \alpha = 0{,}95$, entonces $z_{\alpha/2} = 1{,}96$. Así, el intervalo será:

$(25 - 1{,}96 \cdot 5{,}3;\ 25 + 1{,}96 \cdot 5{,}3)$; es decir: $(14{,}612;\ 35{,}388)$

12 En una distribución $N(10, 4)$, obtén un intervalo centrado en la media $(\mu - k, \mu + k)$, tal que:

$$P[\mu - k < x < \mu + k] = 0{,}90$$

El intervalo será de la forma:

$$(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \sigma;\ \mu + z_{\alpha/2} \cdot \sigma)$$

Como $1 - \alpha = 0{,}90$, entonces $z_{\alpha/2} = 1{,}645$. Así, el intervalo será:

$(10 - 1{,}645 \cdot 4;\ 10 + 1{,}645 \cdot 4)$; es decir: $(3{,}42;\ 16{,}58)$

13 **Di cómo se distribuyen las medias muestrales en cada uno de los siguienes casos:**

		a)	b)	c)
POBLACIÓN	DISTRIBUCIÓN	Normal	Desc.	Normal
	MEDIA, μ	20	20	3,75
	DESV. TÍPICA, σ	4	4	1,2
TAM. MUESTRA, n		16	100	4

		d)	e)	f)	g)
POBLACIÓN	DISTRIBUCIÓN	Desc.	Norm.	Desc.	Desc.
	MEDIA, μ	3,75	112	112	3 512
	DESV. TÍPICA, σ	1,2	15	15	550
TAM. MUESTRA, n		50	100	100	40

Recordemos que si la población se distribuye según una normal $N(\mu, \sigma)$, o bien seleccionamos una muestra de tamaño $n \geq 30$ en una población cualquiera (no necesariamente normal) con media μ y desviación típica σ, entonces, las medias muestrales siguen una distribución $N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Aplicamos este resultado en cada uno de los casos propuestos:

a) $N\left(20, \dfrac{4}{\sqrt{16}}\right)$; es decir, $N(20, 1)$

b) $N\left(20, \dfrac{4}{\sqrt{100}}\right)$; es decir, $N(20; 0,4)$

c) $N\left(3,75; \dfrac{1,2}{\sqrt{4}}\right)$; es decir, $N(3,75; 0,6)$

d) $N\left(3,75; \dfrac{1,2}{\sqrt{50}}\right)$; es decir, $N(3,75; 0,17)$

e) $N\left(112, \dfrac{15}{\sqrt{100}}\right)$; es decir, $N(112; 1,5)$

f) $N\left(112, \dfrac{15}{\sqrt{100}}\right)$; es decir, $N(112; 1,5)$

g) $N\left(3\,512, \dfrac{550}{\sqrt{40}}\right)$; es decir, $N(3\,512; 86,96)$

Página 288

14 **Halla el intervalo característico correspondiente a la probabilidad que en cada caso se indica, correspondiente a las medias muestrales del ejercicio anterior:**

a) 90% **b) 95%** **c) 99%** **d) 90%** **e) 95%** **f) 80%** **g) 99%**

a) $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

Intervalo $(20 - 1{,}645 \cdot 1;\ 20 + 1{,}645 \cdot 1)$; es decir: $(18{,}355;\ 21{,}645)$

b) $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Intervalo $(20 - 1{,}96 \cdot 0{,}4;\ 20 + 1{,}96 \cdot 0{,}4)$; es decir: $(19{,}216;\ 20{,}784)$

c) $z_{\alpha/2} = 2{,}575$

Intervalo $(3{,}75 - 2{,}575 \cdot 0{,}6;\ 3{,}75 + 2{,}575 \cdot 0{,}6)$; es decir: $(2{,}205;\ 5{,}295)$

d) $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

Intervalo $(3{,}75 - 1{,}645 \cdot 0{,}17;\ 3{,}75 + 1{,}645 \cdot 0{,}17)$; es decir: $(3{,}47;\ 4{,}03)$

e) $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Intervalo $(112 - 1{,}96 \cdot 1{,}5;\ 112 + 1{,}96 \cdot 1{,}5)$; es decir: $(109{,}06;\ 114{,}94)$

f) $z_{\alpha/2} = 1{,}28$

Intervalo $(112 - 1{,}28 \cdot 1{,}5;\ 112 + 1{,}28 \cdot 1{,}5)$; es decir: $(110{,}08;\ 113{,}92)$

g) $z_{\alpha/2} = 2{,}575$

Intervalo $(3\,512 - 2{,}575 \cdot 86{,}96;\ 3\,512 + 2{,}575 \cdot 86{,}96)$; es decir:

$(3\,288{,}078;\ 3\,735{,}922)$

15 **Averigua cómo se distribuyen las proporciones muestrales, p_r, para las poblaciones y las muestras que se describen a continuación:**

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
PROPORCIÓN, p, EN LA POBLACIÓN	0,5	0,6	0,8	0,1	0,05	0,15
TAMAÑO, n, DE LA MUESTRA	10	20	30	50	100	100

Recordemos que, si $np \geq 5$ y $nq \geq 5$, entonces, las proporciones muestrales siguen una distribución $N\left(p,\ \sqrt{\dfrac{pq}{n}}\right)$.

Aplicamos este resultado a cada uno de los casos propuestos. Comprobamos que en todo ellos se tiene que $np \geq 5$ y $nq \geq 5$.

a) $N\left(0{,}5;\ \sqrt{\dfrac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{10}}\right)$; es decir, $N(0{,}5;\ 0{,}158)$

b) $N\left(0{,}6;\ \sqrt{\dfrac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{20}}\right)$; es decir, $N(0{,}6;\ 0{,}110)$

c) $N\left(0{,}8;\ \sqrt{\dfrac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{30}}\right)$; es decir, $N(0{,}8;\ 0{,}073)$

d) $N\left(0{,}1;\ \sqrt{\dfrac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{50}}\right)$; es decir, $N(0{,}1;\ 0{,}042)$

e) $N\left(0{,}05;\ \sqrt{\dfrac{0{,}05 \cdot 0{,}95}{100}}\right)$; es decir, $N(0{,}05;\ 0{,}0218)$

f) $N\left(0{,}15;\ \sqrt{\dfrac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{100}}\right)$; es decir, $N(0{,}15;\ 0{,}036)$

16 **Halla los intervalos característicos para las proporciones muestrales del ejercicio anterior, correspondientes a las probabilidades que, en cada caso, se indican:**

a) 90% **b) 95%** **c) 99%** **d) 95%** **e) 99%** **f) 80%**

a) $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

Intervalo $(0{,}5 - 1{,}645 \cdot 0{,}158;\ 0{,}5 + 1{,}645 \cdot 0{,}158)$; es decir: $(0{,}24;\ 0{,}76)$

b) $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Intervalo $(0{,}6 - 1{,}96 \cdot 0{,}110;\ 0{,}6 + 1{,}96 \cdot 0{,}110)$; es decir: $(0{,}38;\ 0{,}82)$

c) $z_{\alpha/2} = 2{,}575$

Intervalo $(0{,}8 - 2{,}575 \cdot 0{,}073;\ 0{,}8 + 2{,}575 \cdot 0{,}073)$; es decir: $(0{,}61;\ 0{,}99)$

d) $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Intervalo $(0{,}1 - 1{,}96 \cdot 0{,}042;\ 0{,}1 + 1{,}96 \cdot 0{,}042)$; es decir: $(0{,}018;\ 0{,}182)$

e) $z_{\alpha/2} = 2{,}575$

Intervalo $(0{,}05 - 2{,}575 \cdot 0{,}0218;\ 0{,}05 + 2{,}575 \cdot 0{,}0218)$; es decir: $(-0{,}006;\ 0{,}106)$

f) $z_{\alpha/2} = 1{,}28$

Intervalo $(0{,}15 - 1{,}28 \cdot 0{,}036;\ 0{,}15 + 1{,}28 \cdot 0{,}036)$; es decir: $(0{,}104;\ 0{,}196)$

PARA RESOLVER

17 **En una distribución $N(20, 6)$, tomamos muestras de tamaño 64.**

S

a) ¿Cuál es la distribución de las medias de las muestras?

b) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una muestra cuya media esté comprendida entre 19 y 21?

a) Las medias muestrales, $\bar{x}$, se distribuyen según una normal de media $\mu = 20$ y de desviación típica $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{6}{\sqrt{64}} = \dfrac{6}{8} = 0{,}75$; es decir:

$\bar{x}$ es $N(20;\ 0{,}75)$

b) $P[19 < \bar{x} < 21] = P\left[\dfrac{19 - 20}{0{,}75} < z < \dfrac{21 - 20}{0{,}75}\right] = P[-1{,}33 < z < 1{,}33] =$

$= P[z < 1{,}33] - P[z < -1{,}33] = P[z < 1{,}33] - (1 - P[z < 1{,}33]) =$

$= 2P[z < 1{,}33] - 1 = 2 \cdot 0{,}9082 - 1 = 0{,}8164$

18 **S** **Se sabe que el cociente intelectual de los alumnos de una universidad se distribuye según una ley normal de media 100 y varianza 729.**

a) Halla la probabilidad de que una muestra de 81 alumnos tenga un cociente intelectual medio inferior a 109.

b) Halla la probabilidad de que una muestra de 36 alumnos tenga un cociente intelectual medio superior a 109.

El cociente intelectual sigue una distruibución normal de media $\mu = 100$ y de desviación típica $\sigma = \sqrt{729} = 27$; es decir, x es $N(100, 27)$.

a) Las medias en muestras de 81 alumnos se distribuirán según una normal de media $\mu = 100$ y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{27}{\sqrt{81}} = \frac{27}{9} = 3$; es decir, $\bar{x}$ es $N(100, 3)$. Así:

$$P[\bar{x} < 109] = P\left[z < \frac{109 - 100}{3}\right] = P[z < 3] = 0{,}9987$$

b) Las medias en muestras de 36 alumnos se distribuyen según una normal de media $\mu = 100$ y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{27}{\sqrt{36}} = \frac{27}{6} = 4{,}5$; es decir, $\bar{x}$ es $N(100; 4{,}5)$. Así:

$$P[\bar{x} > 109] = P\left[z > \frac{109 - 100}{4{,}5}\right] = P[z > 2] = 1 - P[z \leq 2] = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

19 **Las notas en un cierto examen se distribuyen normal con media $\mu = 5{,}3$ y desviación típica $\sigma = 2{,}4$.**

Halla la probabilidad de que un estudiante tomado al azar tenga una nota:

a) Superior a 7.

b) Inferior a 5.

c) Comprendida ente 5 y 7.

Tomamos al azar 16 estudiantes.

Halla la probabilidad de que la media de las notas de estos 16 estudiantes:

d) Sea superior a 7.

e) Sea inferior a 5.

f) Esté comprendida entre 5 y 7.

g) Halla k para que el intervalo $(5{,}3 - k;\ 5{,}3 + k)$ contenga al 95% de las notas.

h) Halla b para que el intervalo $(5{,}3 - b;\ 5{,}3 + b)$ contenga al 95% de las notas medias de las muestras de 16 individuos.

x es $N(5{,}3; 2{,}4) \rightarrow z$ es $N(0, 1)$

a) $P[x > 7] = P\left[z > \frac{7 - 5{,}3}{2{,}4}\right] = P[z > 0{,}71] = 1 - P[z \leq 0{,}71] = 1 - 0{,}7612 = 0{,}2388$

b) $P[x < 5] = P\left[z < \frac{5 - 5{,}3}{2{,}4}\right] = P[z < -0{,}13] = P[z > 0{,}13] = 1 - P[z \le 0{,}13] =$

$= 1 - 0{,}5517 = 0{,}4483$

c) $P[5 < x < 7] = P\left[\frac{5 - 5{,}3}{2{,}4} < x < \frac{7 - 5{,}3}{2{,}4}\right] = P[-0{,}13 < z < 0{,}71] =$

$= P[z < 0{,}71] - P[z < -0{,}013] = 0{,}7612 - 0{,}4483 = 0{,}3129$

Las medias de las notas de 16 estudiantes se distribuyen $N\left(5{,}3;\ \frac{2{,}4}{\sqrt{16}}\right)$; es decir, $\bar{x}$ es $N(5{,}3;\ 0{,}6)$.

d) $P[\bar{x} > 7] = P\left[z > \frac{7 - 5{,}3}{0{,}6}\right] = P[z > 2{,}83] = 1 - P[z \le 2{,}83] = 1 - 0{,}9977 = 0{,}0023$

e) $P[\bar{x} < 5] = P\left[z < \frac{5 - 5{,}3}{0{,}6}\right] = P[z < -0{,}5] = P[z > 0{,}5] = 1 - P[z \le 0{,}5] =$

$= 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$

f) $P[5 < \bar{x} < 7] = P\left[\frac{5 - 5{,}3}{0{,}6} < z < \frac{7 - 5{,}3}{0{,}6}\right] = P[-0{,}5 < z < 2{,}83] =$

$= P[z < 2{,}83] - P(z < -0{,}5] = 0{,}9977 - 0{,}3085 = 0{,}6892$

g) Es un intervalo característico para la media de la población, por tanto:

$k = z_{\alpha/2} \cdot \sigma$

Como $1 - \alpha = 0{,}95 \ \rightarrow\ z_{\alpha/2} = 1{,}96$. Así:

$k = 1{,}96 \cdot 2{,}4 = 4{,}704$

h) Es un intervalo característico para las medias muestrales, en muestras de tamaño 16, por tanto:

$b = z_{\alpha/2} \cdot 0{,}6$

Como $1 - \alpha = 0{,}95 \ \rightarrow\ z_{\alpha/2} = 1{,}96$. Así:

$b = 1{,}96 \cdot 0{,}6 = 1{,}176$

20 S **Cuatro de cada diez habitantes de una determinada población lee habitualmente el periódico Z.**

Halla el intervalo característico para la proporción de habitantes de esa población que leen el periódico Z, en muestras de tamaño 49, correspondiente al 95%.

p = proporción de lectores del periódico Z $= \frac{4}{10} = 0{,}4$.

El intervalo característico para la proporción de lectores, pr, en muestras de tamaño n es de la forma:

$$\left(p - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}},\ p + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

Para el 95% $\rightarrow$ $1 - \alpha = 0,95$ $\rightarrow$ $z_{\alpha/2} = 1,96$

El intervalo será:

$$\left(0,4 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{49}};\ 0,4 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{49}}\right); \text{ es decir: } (0,26;\ 0,54)$$

21 **En un saco mezclamos judías blancas y judías pintas en la relación de 14 blancas por cada pinta.**

Extraemos un puñado de 100 judías.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la proporción de judías pintas esté comprendida entre 0,05 y 0,1?

b) Halla un intervalo en el cual se encuentre el 99% de las proporciones de las muestras de tamaño 100.

a) La proporción de judías pintas es $p = \frac{1}{15}$. Si extraemos un puñado de 100 judías, tenemos una binomial $B\left(100, \frac{1}{15}\right)$.

Una proporción entre 0,05 y 0,1 significa que haya entre $100 \cdot 0,05 = 5$ y $100 \cdot 0,1 = 10$ judías pintas.

Por tanto, si x es $B\left(100, \frac{1}{15}\right)$, tenemos que calcular $P[5 < x < 10]$.

Como $100 \cdot \frac{1}{15} > 5$ y $100 \cdot \frac{14}{15} > 5$, podemos aproximar la binomial mediante una normal de media $\mu = 100 \cdot \frac{1}{15} = 6,67$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{14}{15}} = 2,49$.

Así, si x es $B\left(100, \frac{1}{15}\right)$ $\rightarrow$ x' es $N(6,67;\ 2,49)$ $\rightarrow$ z es $N(0, 1)$. Calculamos:

$$P[5 < x < 10] = P[5,5 \le x' \le 9,5] = P\left[\frac{5,5 - 6,67}{2,49} \le z \le \frac{9,5 - 6,67}{2,49}\right] =$$

$$= P[-0,47 \le z \le 1,14] = P[z \le 1,14] - P[z \le -0,47] =$$

$$= P[z \le 1,14] - P[z \ge 0,47] = P[z \le 1,14] - (1 - P[z \le 0,47]) =$$

$$= 0,8729 - (1 - 0,6808) = 0,5537$$

b) Si consideramos muestras de tamaño 100, el intervalo característico para la proporción muestral es de la forma:

$$\left(p - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{100}},\ p + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{100}}\right)$$

Para el 99% $\rightarrow$ $1 - \alpha = 0,99$ $\rightarrow$ $z_{\alpha/2} = 2,575$

Así, el intervalo será:

$$\left(\frac{1}{15} - 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{(1/15)\cdot(14/15)}{100}},\ \frac{1}{15} + 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{(1/15)\cdot(14/15)}{100}}\right);$$

es decir: (0,0024; 0,1309)

Página 289

22 **S** **El tiempo de espera, en minutos, de los pacientes en un servicio de urgencias, es $N(14, 4)$.**

a) ¿Cómo se distribuye el tiempo medio de espera de 16 pacientes?

b) En una media jornada se ha atendido a 16 pacientes. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de su espera esté comprendido entre 10 y 15 minutos?

a) El tiempo medio de espera, $\bar{x}$, de 16 pacientes se distribuye según una normal de media $\mu = 14$ y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{16}} = \frac{4}{4} = 1$; es decir $\bar{x}$ es $N(14, 1)$.

b) $P[10 < \bar{x} < 15] = P\left[\frac{10-14}{1} < z < \frac{15-14}{1}\right] = P[-4 < z < 1] =$

$= P[z < 1] - P[z < -4] = 0{,}8413 - 0 = 0{,}8413$

23 **S** **Una variable aleatoria se distribuye $N(\mu, \sigma)$. Si se extraen muestras de tamaño n:**

a) ¿Qué distribución tiene la variable aleatoria media muestral, $\bar{x}$?

b) Si se toman muestras de tamaño $n = 4$ de una variable aleatoria x con distribución $N(165, 12)$, calcula $P[\bar{x} > 173{,}7]$.

a) $\bar{x}$ sigue una distribución normal de media μ y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, es decir, $\bar{x}$ es $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

b) Las medias muestrales en muestras de tamaño $n = 4$ se distribuyen según una normal de media $\mu = 165$ y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{4}} = \frac{12}{2} = 6$; es decir, $\bar{x}$ es $N(165, 6)$. Así:

$$P[\bar{x} > 173{,}7] = P\left[z > \frac{173{,}7 - 165}{6}\right] = P[z > 1{,}45] =$$

$$= 1 - P[z \le 1{,}45] = 1 - 0{,}9265 = 0{,}0735$$

24 **S** **Se sabe que el peso en kilogramos de los alumnos de bachillerato de Madrid es una variable aleatoria, x, que sigue una distribución normal de desviación típica igual a 5 kg. En el caso de considerar muestras de 25 alumnos, ¿qué distribución tiene la variable aleatoria media muestral, $\bar{x}$?**

La variable aleatoria media muestral, $\bar{x}$, sigue una distribución normal con la misma media que la población, llamémosla μ, y con desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$; es decir, $\bar{x}$ es $N(\mu, 1)$.

25 **S** **En una ciudad, la altura media de sus habitantes tiene una desviación típica de 8 cm. Si la altura media de dichos habitantes fuera de 175 cm, ¿cuál sería la probabilidad de que la altura media de una muestra de 100 individuos tomada al azar fuera superior a 176 cm?**

La altura en la población, x, sigue una distribución normal $N(175, 8)$. Si consideramos muestras de tamaño $n = 100$, las medias muestrales se distribuyen según una normal de media $\mu = 175$ y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{8}{\sqrt{100}} = \frac{8}{10} = 0{,}8$; es decir, $\bar{x}$ es $N(175; 0{,}8)$. Así:

$$P[\bar{x} > 176] = P\left[z > \frac{176 - 175}{0{,}8}\right] = P[z > 1{,}25] = 1 - P[z \le 1{,}25] =$$

$$= 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056$$

26 **En una localidad de 6 000 habitantes, la proporción de menores de 16 años es de 1 500/6 000.**

a) ¿Cuál es la distribución de la proporción de menores de 16 años en muestras de 50 habitantes de dicha población?

b) Halla la probabilidad de que, en una muestra de 50 habitantes, haya entre 15 y 20 menores de 16 años.

a) La proporción, pr, de menores de 16 años en muestras de tamaño $n = 50$ sigue una distribución normal de media $p = \frac{1\,500}{6\,000} = 0{,}25$ y de desviación típica:

$$\sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}25 \cdot 0{,}75}{50}} = 0{,}061, \text{ es decir, } pr \text{ es } N(0{,}26; 0{,}061).$$

b) El número de menores de 16 años en una muestra de 50 es una binomial $B(50; 0{,}25)$. Como $np > 5$ y $nq > 5$, podemos aproximar mediante una normal de media $\mu = 50 \cdot 0{,}25 = 12{,}5$ y de desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{50 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75} = 3{,}06$$

Así, si x es $B(50; 0{,}25)$ $\rightarrow$ x' es $N(12{,}5; 3{,}06)$ $\rightarrow$ z es $N(0, 1)$, entonces:

$$P[15 < x < 20] = P[15{,}5 < x' < 19{,}5] = P\left[\frac{15{,}5 - 12{,}5}{3{,}06} < z < \frac{19{,}5 - 12{,}5}{3{,}06}\right] =$$

$$= P[0{,}98 < z < 2{,}29] = P[z < 2{,}29] - P[z < 0{,}98] =$$

$$= 0{,}9890 - 0{,}8365 = 0{,}1525$$

27 **El 42% de los habitantes de un municipio es contrario a la gestión del alcalde y el resto son partidarios de este. Si se toma una muestra de 64 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que ganen los que se oponen al alcalde?**

En muestras de 64, el número de personas que se oponen al alcalde, x, sigue una distribución binomial $B(64;\ 0,42)$. Tenemos que calcular $P[x > 32]$.

Como $np > 5$ y $nq > 5$, podemos aproximar mediante una normal de media $\mu = n \cdot p = 64 \cdot 0,42 = 26,88$ y de desviación típica $\sqrt{npq} = \sqrt{64 \cdot 0,42 \cdot 0,58} = 3,95$. Así, si: x es $B(64;\ 0,42) \to x'$ es $N(26,88;\ 3,95) \to z$ es $N(0, 1)$, entonces:

$$P[x > 32] = P[x' \geq 32,5] = P\left[z \geq \frac{32,5 - 26,88}{3,95}\right] = P[z \geq 1,42] =$$

$$= 1 - P[z < 1,42] = 1 - 0,9222 = 0,0778$$

28 **La probabilidad de que un bebé sea varón es 0,515. Si han nacido 184 bebés, ¿cuál es la probabilidad de que haya 100 varones o más?**

Halla el intervalo característico correspondiente al 95% para la proporción de varones en muestras de 184 bebés.

- El número de varones entre 184 bebés, x, sigue una distribución binomial $B(184;\ 0,515)$. Tenemos que calcular $P[x \geq 100]$. Como $np > 5$ y $nq > 5$, podemos aproximar mediante una normal de media $\mu = np = 184 \cdot 0,515 = 94,76$ y de desviación típica $\sqrt{npq} = \sqrt{184 \cdot 0,515 \cdot 0,485} = 6,78$. Así, si:

  x es $B(184;\ 0,515) \to x'$ es $N(94,76;\ 6,78) \to z$ es $N(0, 1)$, entonces:

$$P[x \geq 100] = P[x' \geq 99,5] = P\left[z \geq \frac{99,5 - 94,76}{6,78}\right] = P[z \geq 0,70] =$$

$$= 1 - P[z < 0,70] = 1 - 0,7580 = 0,2420$$

- El intervalo característico para la proporción muestral es de la forma:

$$\left(p - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}},\ p + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

  Para el 95% $\to$ $1 - \alpha = 0,95$ $\to$ $z_{\alpha/2} = 1,96$

  Así, el intervalo será:

$$\left(0,515 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,515 \cdot 0,485}{184}},\ 0,515 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,515 \cdot 0,485}{184}}\right);$$

  es decir: $(0,4428;\ 0,5872)$

29 S **La estatura de los jóvenes de una ciudad sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$. Si el 90% de las medias de las muestras de 81 jóvenes están en (173,4; 175,8), halla μ y σ.**

Para el 90% $\to$ $1 - \alpha = 0,90$ $\to$ $z_{\alpha/2} = 1,645$

El intervalo característico para las medias de las muestras de 81 jóvenes (para el 90%) es:

$$\left(\mu - 1{,}645 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \ \mu + 1{,}645 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El centro del intervalo es μ:

$$\mu = \frac{173{,}4 + 175{,}8}{2} = 174{,}6 = \mu$$

La semiamplitud del intervalo es:

$$1{,}645 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{81}} = \frac{175{,}8 - 173{,}4}{2}$$

$$1{,}645 \cdot \frac{\sigma}{9} = 1{,}2 \quad \to \quad \sigma = \frac{1{,}2 \cdot 9}{1{,}645} = 6{,}57$$

30 **Sabemos que al lanzar al suelo 100 chinchetas, en el 95% de los casos, la proporción de ellas que quedan con la punta hacia arriba está en el intervalo (0,1216; 0,2784). Calcula la probabilidad p de que una de esas chinchetas caiga con la punta hacia arriba y comprueba que la amplitud del intervalo dado es correcta.**

- p es el centro del intervalo, es decir:

$$p = \frac{0{,}2784 + 0{,}1216}{2} = 0{,}2 = p$$

- Veamos que la amplitud del intervalo dado es correcta:

Para el 95% $\to$ $1 - \alpha = 0{,}95$ $\to$ $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El intervalo característico es:

$$\left(p - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}},\ \ p + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

En este caso ($p = 0{,}2$; $q = 0{,}8$; $n = 100$; $z_{\alpha/2} = 1{,}96$), queda:

$$\left(0{,}2 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{100}};\ \ 0{,}2 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{100}}\right);\ \text{ es decir:}$$

(0,1216; 0,2784), como queríamos probar.

31 **S** **De 120 alumnos, la proporción de que tengan dos o más hermanos es de 48/120. Indica los parámetros de la distribución a la que se ajustarían las muestras de tamaño 30.**

En muestras de tamaño $n = 30$, la proporción muestral, pr, seguiría una distribución normal de media:

$$\mu = np = 30 \cdot \frac{48}{120} = 30 \cdot 0{,}4 = 12$$

y de desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{30}} = 0,089$$

Es decir, pr es $N(12;\ 0,089)$.

32 **S** **Si la distribución de la media de las alturas en muestras de tamaño 49 de los niños de 10 años tiene como media 135 cm y como desviación típica 1,2 cm, ¿cuánto valen la media y la varianza de la altura de los niños de esa ciudad?**

Si la media en la población es μ y la desviación típica es σ, entonces, la distribución de las medias muestrales es $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Así, tenemos que:

$$\mu = 135 \text{ cm}$$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{49}} = \frac{\sigma}{7} = 1,2 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad \sigma = 1,2 \cdot 7 = 8,4 \text{ cm}$$

Por tanto, la media es $\mu = 135$ cm y la varianza es $\sigma^2 = 8,4^2 = 70,56$.

PARA PROFUNDIZAR

33 **S** **Los paquetes recibidos en un almacén tienen un peso medio de 300 kg y una desviación típica de 50 kg. ¿Cuál es la probabilidad de que 25 de los paquetes, elegidos al azar, excedan el límite de carga del montacargas donde se van a meter, que es de 8 200 kg?**

Sabemos que la suma de los pesos de n de esas bolsas tomadas al azar sigue una distribución normal de media $n\mu$ y de desviación típica $\sigma\sqrt{n}$, es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ es } N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$$

En este caso:

$$\sum_{i=1}^{25} x_i \text{ es } N(25 \cdot 300;\ 50\sqrt{25}); \text{ es decir } N(7\,500;\ 250)$$

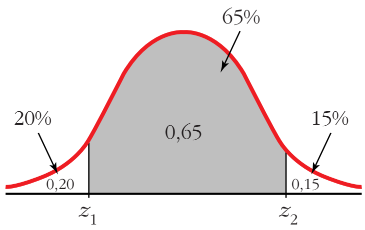
Tenemos que calcular:

$$P\left[\sum_{i=1}^{25} x_i > 8\,200\right] = P\left[z > \frac{8\,200 - 7\,500}{250}\right] = P[z > 2,8] =$$

$$= 1 - P[z \le 2,8] = 1 - 0,9974 = 0,0026$$

34 **S** **Tras realizar un test de cultura general entre los habitantes de cierta población, se observa que las puntuaciones se distribuyen $N(68, 18)$. Se desea clasificar a los habitantes en tres grupos (de baja cultura, de cultura aceptable, de cultura excelente), de manera que el primero abarque un 20% de la población, el segundo un 65%, y el tercero un 15%. ¿Cuáles son las puntuaciones que marcan el paso de un grupo a otro?**

- Obtenemos las puntuaciones que marcarían el paso de un grupo a otro en una $N(0, 1)$:

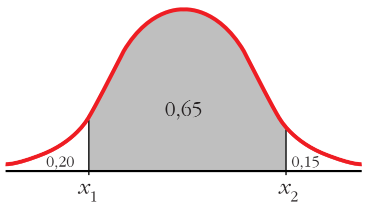


$P[z \le z_1] = 0,20$

$P[z \ge -z_1] = 0,20 \quad \rightarrow \quad P[z < -z_1] = 0,80 \quad \rightarrow \quad -z_1 = 0,84 \quad \rightarrow \quad z_1 = -0,84$

$P[z \le z_2] = 0,65 + 0,20 = 0,85 \quad \rightarrow \quad z_2 = 1,04$

- En una $N(68, 18)$ será:



$$\frac{x_1 - 68}{18} = -0,84 \quad \rightarrow \quad x_1 = 52,88$$

$$\frac{x_2 - 68}{18} = 1,04 \quad \rightarrow \quad x_2 = 86,72$$

- Por tanto, habrá que considerar:

$$\begin{cases} \text{— Baja cultura general} \rightarrow \text{Puntuación menor que 52,88.} \\ \text{— Cultura general aceptable} \rightarrow \text{Entre 52,88 y 86,72 puntos.} \\ \text{— Cultura general excelente} \rightarrow \text{Puntuación superior a 86,72.} \end{cases}$$