EJERCICIOS DE CÓNICAS

1. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones acerca de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ <u>no</u> son ciertas?
   a) El radio de la circunferencia es $\sqrt{5}$
   b) El centro de la circunferencia está en el punto (1, -2)
   c) La circunferencia pasa por el origen
   d) La circunferencia pasa por el punto de coordenadas (0, 4)
   e) El punto de coordenadas (2, -2) está en el interior de la circunferencia

2. Halla la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos A(1, 1) B(-2, 3) C(-1, -1)

3. Halla la ecuación general de la circunferencia que tiene por diámetro el segmento AB siendo A(2, 0) y B(-6, 6)

4. Halla la ecuación general de la circunferencia que tiene su centro en C(3, 2) y es tangente a la recta $5x - 12y + 7 = 0$

5. Halla la ecuación reducida de la circunferencia que pasa por el punto (1,4) y es concéntrica con $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0$

6. Demuestra que el conjunto de números complejos que satisfacen la ecuación $|z+1| = 2 \cdot |z-1|$ están en una circunferencia del diagrama de Argand. Halla su centro y radio.

7. Considere los puntos P del plano tales que su distancia al punto (4, 2) sea triple de lo que distan al punto (-4, 2). Demuestre que el conjunto de todos estos puntos constituye una circunferencia y halle el centro y el radio de esta circunferencia

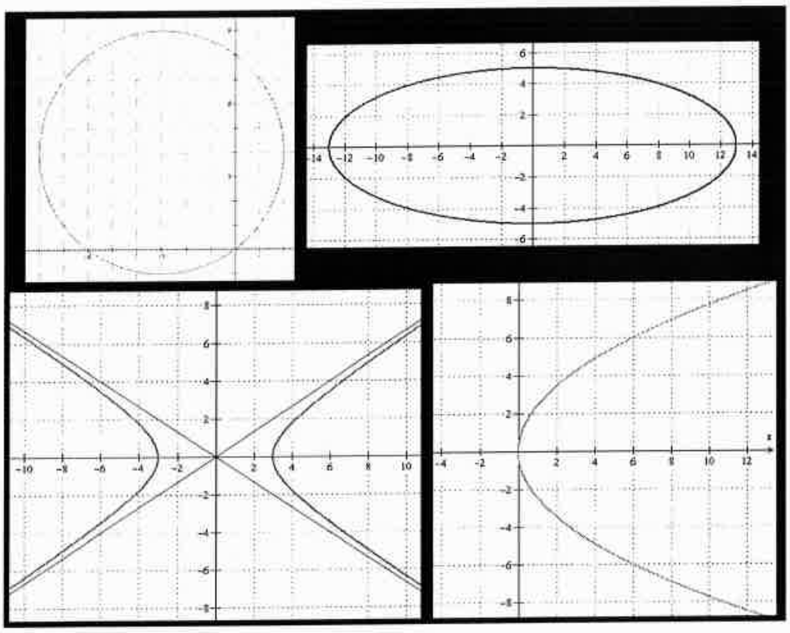
8. Calcula las distancias máxima y mínima del punto P(8,-3) a la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$

9. Halla todas las características de la elipse: $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

10. Halla todas las características de la hipérbola: $y^2 - \dfrac{x^2}{16} = 1$

11. Halla el vértice, el foco, el eje de simetría y la directriz de la parábola: $y^2 = 6x$

12. Escribe la ecuación de las siguientes cónicas y representa sobre ellas sus elementos principales: centro, radio, focos o directriz.



CÓNICAS

(1) $x^2+y^2+2x-4y=0$

$\left.\begin{array}{l} -2a=2 \\ -2b=-4 \\ a^2+b^2-R^2=0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} a=-1 \\ b=2 \end{array}\right\} \rightarrow C(-1,2)$

$R^2=(-1)^2+2^2=5 \rightarrow R=\sqrt{5}$

a) CIERTA

b) FALSA

c) $0^2+0^2+2\cdot 0-4\cdot 0=0$ ✓ CIERTA

d) $0^2+4^2+2\cdot 0-4\cdot 4=0$ ✓ CIERTA

e) $\vec{PC}=\begin{pmatrix}-1-2\\2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$; $|\vec{PC}|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5>\sqrt{3}$ FALSA

(2) $x^2+y^2+mx+ny+p=0$

$\left.\begin{array}{l} A(1,1) \rightarrow 1+1+m+n+p=0 \\ B(-2,3) \rightarrow 4+9-2m+3n+p=0 \\ C(-1,-1) \rightarrow 1+1-m-n+p=0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} m+n+p=-2 \\ -2m+3n+p=-13 \\ -m-n+p=-2 \rightarrow p=m+n-2 \end{array} \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{array}{l} m+n+m+n-2=-2 \\ -2m+3n+m+n-2=-13 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 2m+2n=0 \\ -m+4n=-11 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} m+n=0 \\ -m+4n=-11 \end{array}\right\}$

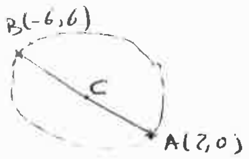
$5n=-11$; $n=-\frac{11}{5}$

$\left.\begin{array}{l} -4m-4n=0 \\ -m+4n=-11 \end{array}\right\}$

$-5m=-11$; $m=\frac{11}{5}$ $\longrightarrow$ $p=-\frac{11}{5}+\frac{11}{5}-2=-2$

$\boxed{x^2+y^2+\frac{11}{5}x-\frac{11}{5}y-2=0} \rightarrow \boxed{(x+1'1)^2+(y-1'1)^2=2'10^2}=4'42$

(3) $C=\frac{A+B}{2}=(-2,3)$

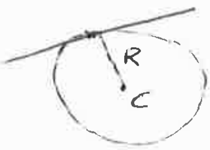


$\vec{AC}=(-4,3)$

$R=|\vec{AC}|=\sqrt{16+9}=5$

$\boxed{(x+2)^2+(y-3)^2=25}$

(4) $R=d(C(3,2),\ 5x-12y+7=0)$



$R=\frac{|5\cdot 3-12\cdot 2+7|}{\sqrt{25+144}}=\frac{2}{13}$

$\boxed{(x-3)^2+(y-2)^2=\frac{4}{169}}$

(5) $x^2+y^2+6x-4y=0$

$\left.\begin{array}{l} -2a=6 \\ -2b=-4 \\ a^2+b^2-R^2=0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} a=-3 \\ b=2 \end{array} \rightarrow C(-3,2)$

$R=d(C(-3,2),\ P(1,4))=|\vec{CP}|=|(4,2)|=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$

$\boxed{(x+3)^2+(y-2)^2=20}$

(6) $z = x+iy$ $\to$ $z+1 = (x+1)+iy \Rightarrow |z+1| = \sqrt{(x+1)^2+y^2}$

$\to$ $z-1 = (x-1)+iy \Rightarrow |z-1| = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$

$\sqrt{(x+1)^2+y^2} = 2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

$(x+1)^2+y^2 = 4\left((x-1)^2+y^2\right)$; $x^2+2x+1+y^2 = 4(x^2-2x+1+y^2)$;

$0 = 4x^2-8x+4+4y^2-x^2-2x-1-y^2$; $0 = 3x^2+3y^2-10x+3$;

$x^2+y^2-\frac{10}{3}x+1=0$

$\left.\begin{array}{l} -2a = -\frac{10}{3} \\ -2b = 0 \\ a^2+b^2-R^2=1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} a = 5/3 \\ b=0 \end{array}\right\}$ $\boxed{C\left(\frac{5}{3},0\right)}$

$R = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2+0^2-1} = \frac{4}{3}$; $\boxed{R = \frac{4}{3}}$

(7) $d\left(P(x,y), (4,2)\right) = 3\, d\left(P(x,y), (-4,2)\right)$

$\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} = 3\sqrt{(x+4)^2+(y-2)^2}$

$(x-4)^2+(y-2)^2 = 9\left[(x+4)^2+(y-2)^2\right]$

$x^2-8x+16+y^2-4y+4 = 9(x^2+8x+16+y^2-4y+4)$

$0 = 9x^2+72x+144+9y^2-36y+36-x^2+8x-16-y^2+4y-4$

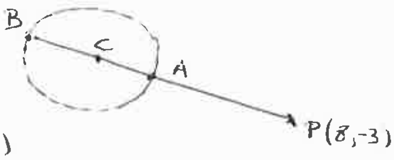
$0 = 8x^2+8y^2+80x-32y+160$

$0 = x^2+y^2+10x-4y+20$

$\left.\begin{array}{l} -2a = 10 \\ -2b = -4 \\ a^2+b^2-R^2 = 20 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} a=-5 \\ b=2 \end{array}\right\}$ $\boxed{C(-5,2)}$

$R = \sqrt{(-5)^2+2^2-20} = \sqrt{9} = 3$; $\boxed{R=3}$

(8) $x^2+y^2+6x-4y+9=0$



$\left.\begin{array}{l} -2a = 6 \\ -2b = -4 \\ a^2+b^2-R^2=9 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} a=-3 \\ b=2 \end{array}\right\}$ $C(-3,2)$

$R = \sqrt{(-3)^2+2^2-9} = 2$

$\overline{PC} = |\vec{PC}| = |(-11,5)| = \sqrt{121+25} = \sqrt{146}$

distancia máxima $= \boxed{\sqrt{146}+2 = 14'08}$

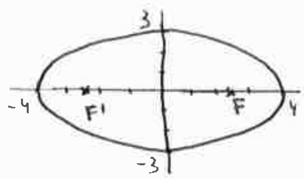
" mínima $= \boxed{\sqrt{146}-2 = 10'08}$

(9) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ Elipse Centro de simetría : $(0,0)$

$a^2=16 \to a=4$

$b^2=9 \to b=3$

$a^2 = b^2+c^2$; $c = \sqrt{4^2-3^2} = \sqrt{7}$



$V(4,0)$ $V'(-4,0)$

$F(\sqrt{7},0)$ $F'(-\sqrt{7},0)$

Constante $= 8$

Excent. $= \frac{\sqrt{7}}{4} = 0'66$

(10) $y^2 - \frac{x^2}{16} = 1$ Hipérbola Centro de simetría: $(0,0)$

$b^2 = 1 \rightarrow b = 1$

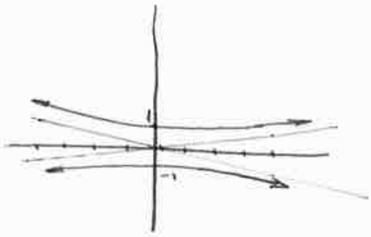
$a^2 = 16 \rightarrow a = 4$

$a^2 + b^2 = c^2$; $c^2 = 17$; $c = \sqrt{17}$

$V(0,1)$ $V'(0,-1)$

$F(0,\sqrt{17})$ $V'(0,-\sqrt{17})$

Constante $= 2$



Asíntotas: $y = \pm \frac{1}{4}x$

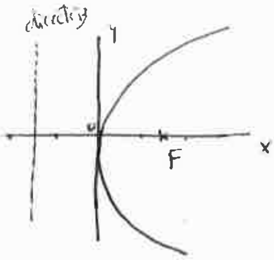
excentr. $= \frac{\sqrt{17}}{1} = \sqrt{17} = 4'12$

(11) $y^2 = 6x \rightarrow 2p = 6 \Rightarrow p = 3 \rightarrow F(3/2, 0)$

$\rightarrow x = -3/2$

Parábola

Eje simetría: $y = 0$



(12) a) $\boxed{R = 5}$ $\boxed{C(-3,4)}$ $\boxed{(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25}$

b) $\left.\begin{matrix} a = 13 \\ b = 5 \end{matrix}\right\}$ $\boxed{\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1}$

$a^2 = b^2 + c^2$; $c = \sqrt{169 - 25} = 12 \Rightarrow$ $F(12,0)$ $F'(-12,0)$

c) $\begin{matrix} a = 3 \\ b = 2 \end{matrix} \rightarrow$ $\boxed{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1}$

$a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow c = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \Rightarrow$ $F(\sqrt{13},0)$ $F'(-\sqrt{13},0)$

d) Es del tipo $y^2 = 2px$

Pasa por $P(6,6) \rightarrow 6^2 = 2p \cdot 6 \Rightarrow p = 3 \rightarrow F(3/2, 0)$

$\rightarrow x = -3/2$

$\rightarrow \boxed{y^2 = 6x}$