

LOGARITMOS Y ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Se denomina **logaritmo** en base a de un número b a otro número x al que hay que elevar a para obtener b ; es decir:

$$\log_a b = x$$

Donde a :

- Es la base del logaritmo.
- Debe ser un número distinto de cero.
- Y en la ESO, positivo.

PROPIEDADES Y OPERACIONES DE LOGARITMOS

- No existen logaritmos de números negativos
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a^b = b$
- $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a (x : y) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^y = y \cdot \log_a x$
- $\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = \log_a x^{-1} = -\log_a x$
- $\log_a \sqrt[z]{x^y} = \frac{y}{z} \cdot \log_a x$

LOGARITMOS DECIMALES Y NEPERIANOS

- Logaritmos decimales:

Son los que tienen por base el número 10. Para su notación, la base “desaparece”:

$$\log_{10} b = \log b.$$

Es decir, cuando nos encontremos un logaritmo donde no esté indicada la base, es que es decimal. La calculadora permite calcularlos simplemente usando la tecla *log*.

- Logaritmos neperianos:

Son los que tienen por base el número e , que es irracional, con infinitos decimales no periódicos. El número e aparece en multitud de fenómenos naturales. Una aproximación sería: $e=2,71828$. La notación es:

$$\log_e b = \ln b$$

En la calculadora, se halla usando la tecla *ln*.

- Cambio de base:

La calculadora permite calcular logaritmos decimales y neperianos. Cuando estamos trabajando con otra base, se requiere un cambio de base con la fórmula:

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\ln a}{\ln b}$$

LOGARITMOS Y ECUACIONES LOGARÍTMICAS

• ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Son aquéllas en las que la incógnita o incógnitas aparecen en el interior de un logaritmo. Se resuelven aplicando las propiedades de los logaritmos, con 2 pasos:

- 1) $\log(\text{expresión algebraica } 1) = \log(\text{expresión algebraica } 2)$
- 2) $\text{expresión algebraica } 1 = \text{expresión algebraica } 2$

Así se llegará a una ecuación "normal" de 1er o 2º grado.

En un sistema de ecuaciones logarítmicas, con los pasos anteriores llegaremos a un sistema de ecuaciones "normales".

EJERCICIOS DE ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LOGARÍTMICAS

1) $\frac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)} = 3$	2) $\log(2x+7) - \log(x-1) = \log 5$
3) $\log x = 3 \log 2 - 2 \log 3$	4) $\log x = \log 102 - \log 34$
5) $\log x^2 = \log 10^{-2}$	6) $\log x + \log 2 = 1$
7) $\ln(2x-3) + \ln(5-x) = \ln 5$	8) $\ln(x^2+3x+2) - \ln(x^2-1) = \ln 2$
9) $\frac{\log(16-x^2)}{\log(3x-4)} = 2$	10) $\log 3x = \log 6 + 2 \log x$
11) $\begin{cases} 3x + 5y = 35 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$	12) $\log(5-x) - \log(4-x) = \log 2$
13) $\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ \log x + \log y = 4 \end{cases}$	14) $\log(x^2+3x+2) - \log(x^2-1) = 1$
15) $\begin{cases} 2 \log x - 3 \log y = 7 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$	16) $\begin{cases} 2 \log x - 2 \log y = -2 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$

• SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS

1) $\frac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)} = 3; \log(35-x^3) = 3 \cdot \log(5-x);$

$$\log(35-x^3) = \log(5-x)^3; 35-x^3 = (5-x)^3;$$

$$35-x^3 = (5-x)(5-x)^2;$$

$$35-x^3 = 125+5x^2-50x-25x-x^3+10x^2;$$

$$15x^2-75x+90=0; x^2-5x+6=0; x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}; x = \frac{5 \pm 1}{2};$$

$$x_1 = 3; x_2 = 2$$

2) $\log(2x+7) - \log(x-1) = \log 5; \log \frac{2x+7}{x-1} = \log 5;$

$$2x+7 = 5(x-1); 2x+7 = 5x-5; -3x = -12; x = 4$$

3) $\log x = 3 \log 2 - 2 \log 3; \log x = \log 2^3 - \log 3^2; \log x = \frac{\log 8}{\log 9}; x = \frac{8}{9}$

4) $\log x = \log 102 - \log 34; \log x = \log \frac{102}{34}; x = \frac{102}{34} = 3$

5) $\log x^2 = \log 10^{-2}; x^2 = 10^{-2}; x^2 = \frac{1}{10^2}; x = \frac{1}{10}$

6) $\log x + \log 2 = 1; \log x + \log 2 = \log 10;$

$$\log x = \log 10 - \log 2; \log x = \log \frac{10}{2}; \log x = \log 5; x = 5$$

7) $\ln(2x-3) + \ln(5-x) = \ln 5; \ln \frac{2x-3}{5-x} = \ln 5; \frac{2x-3}{5-x} = 5;$

$$2x-3 = 5(5-x); 2x-3 = 25-5x; 7x = 28; x = 4$$

LOGARITMOS Y ECUACIONES LOGARÍTMICAS

$$8) \ln(x^2 + 3x + 2) - \ln(x^2 - 1) = \ln 2; \ln \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} = \ln 2;$$

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} = 2; \frac{(x + 2)(x + 1)}{(x + 1)(x - 1)} = 2; \frac{x + 2}{x - 1} = 2; x + 2 = 2(x - 1)$$

$$x + 2 = 2x - 2; -x = -4; x = 4$$

$$9) \frac{\log(16 - x^2)}{\log(3x - 4)} = 2; \log(16 - x^2) = 2 \log(3x - 4);$$

$$\log(16 - x^2) = \log(3x - 4)^2; 16 - x^2 = (3x - 4)^2;$$

$$16 - x^2 = 9x^2 + 16 - 24x; -10x^2 + 24x = 0;$$

$$5x^2 - 12x = 0; x(5x - 12) = 0; x_1 = 0; x_2 = \frac{12}{5}$$

$$10) \log 3x = \log 6 + 2 \log x; \log 3x = \log 6 + \log x^2; \log 3x = \log 6x^2;$$

$$3x = 6x^2; x = 2x^2; 1 = 2x; x = \frac{1}{2}$$

$$11) \begin{cases} 3x + 5y = 35 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 5y = 35 \\ \log \frac{x}{y} = \log 10 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 5y = 35 \\ \frac{x}{y} = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 5y = 35 \\ x - 10y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x + 10y = 70 \\ x - 10y = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} 7x = 70; \\ x = 10 \end{matrix}$$

$$y = \frac{x}{10}; y = 1$$

$$12) \log(5 - x) - \log(4 - x) = \log 2; \log \frac{5 - x}{4 - x} = \log 2; \frac{5 - x}{4 - x} = 2;$$

$$5 - x = 2(4 - x); 5 - x = 8 - 2x; 2x - x = 8 - 3; x = 3$$

LOGARITMOS Y ECUACIONES LOGARÍTMICAS

$$\begin{aligned}
 \mathbf{13)} \quad & \begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ \log x + \log y = 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} (por \\ reducción) \end{matrix} & \begin{aligned} 2 \log x &= 5; \\ \log x^2 &= \log 10^5; \\ \log x - \log y &= 1; \\ \log \frac{x}{y} &= \log 10; \frac{x}{y} = 10 \end{aligned} \\
 & x^2 = 10^5; x = \sqrt{10^5}; x = 10^2 \sqrt{10}; & \\
 & y = \frac{x}{10} = \frac{100\sqrt{10}}{10}; y = 10\sqrt{10} &
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{14)} \quad \log(x^2 + 3x + 2) - \log(x^2 - 1) = 1; \quad \log \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} = \log 10;$$

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} = 10; \quad \frac{(x+2)(x+1)}{(x+1)(x-1)} = 10; \quad \frac{x+2}{x-1} = 10;$$

$$x + 2 = 10(x - 1); \quad x + 2 = 10x - 10; \quad -9x = -12; \quad x = \frac{-12}{-9} = \frac{4}{3}$$

15)

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{l} 2 \log x - 3 \log y = 7 \\ \log x + \log y = 1 \end{array} \right. & \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \log x - 3 \log y = 7 \\ 3 \log x + 3 \log y = 3 \end{array} \right. \\
 & \quad \quad \quad \underline{\hspace{1.5cm}} \\
 & \quad \quad \quad 5 \log x = 10; \log x = \frac{10}{5}; \log x = 2; \log x = 10^2; \\
 & \quad \quad \quad x = 100;
 \end{aligned}$$

$$\log x + \log y = 1; \quad 2 + \log y = 1; \log y = -1; \log y = \log 10^{-1}; \quad y = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

16)

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{l} 2 \log x - 2 \log y = -2 \\ \log x + \log y = 3 \end{array} \right. & \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \log x - 2 \log y = -2 \\ 2 \log x + 2 \log y = 6 \end{array} \right. \\
 & \quad \quad \quad \underline{\hspace{1.5cm}} \\
 & \quad \quad \quad 4 \log x = 4; \log x = 1; x = 10
 \end{aligned}$$

$$\log y = 3 - \log x; \log y = 3 - 1 = 2; \log y = \log 10^2; y = 100$$