ECUACIONES EXPONENCIALES

1. Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales

a) $3^{-x+1}=3^{2x+3}$

Solución.

Exponenciales con igual base, se igualan los exponentes.

$$3^{-x+1}=3^{2x+3}\Leftrightarrow -x+1=2x+2$$
$$1-2=2x+x$$
$$3x=-1:x=\frac{-1}{3}$$

b) $3\cdot 3^{x}=243$

Solución.

Los dos términos se pueden expresar como exponenciales de igual base.

$$3\cdot 3^{x}=243\quad:\quad 3^{1+x}=3^{5}\quad:\quad 1+x=5\quad:\quad x=4$$

c) $2^{2x+2}=0'5^{2x-1}$

Solución.

Los dos términos se pueden expresar como exponenciales de igual base.

$$2^{2x+2}=0'5^{2x-1}\quad:\quad 2^{2x+2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}\quad:\quad 2^{2x+2}=\left(2^{-1}\right)^{2x-1}$$
$$2^{2x+2}=2^{-1\cdot(2x-1)}\quad:\quad 2x+2=-1\cdot(2x-1)\quad:\quad 2x+2=-2x+1$$
$$2x+2x=1-2\quad:\quad 4x=-1\quad:\quad x=\frac{-1}{4}$$

d) $5\cdot\sqrt[5]{125^{2x}}=\left(\frac{1}{25}\right)^{3x-1}$

Solución.

Los dos términos se pueden expresar como exponenciales de igual base.

$$5\cdot\sqrt[5]{125^{2x}}=\left(\frac{1}{25}\right)^{3x-1}\quad:\quad 5\cdot\left(\left(5^{3}\right)^{2x}\right)^{1/5}=\left(5^{-2}\right)^{3x-1}\quad:\quad 5\cdot 5^{3\cdot 2x\cdot\frac{1}{5}}=5^{-2\cdot(3x-1)}$$
$$5\cdot 5^{\frac{6x}{5}}=5^{-6x+2}\quad:\quad 5^{1+\frac{6x}{5}}=5^{-6x+2}\quad:\quad 1+\frac{6x}{5}=-6x+2$$
$$\frac{6x}{5}+6x=2-1\quad:\quad \frac{6x+30x}{5}=1\quad:\quad 36x=5\quad:\quad x=\frac{5}{36}$$

e) $7^{x^{2}-5x+6}=1$

Solución.

Los dos términos se pueden expresar como exponenciales de igual base.

$$7^{x^{2}-5x+6}=1\quad:\quad 7^{x^{2}-5x+6}=7^{0}\Leftrightarrow x^{2}-5x+6=0$$
$$x=\frac{(-5)\pm\sqrt{(-5)^{2}-4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1}:\begin{cases}x=2\\x=3\end{cases}$$

f) $4^x - 2^x = 2$

Solución.

Ecuación de segundo grado en la variable 2^x.

$$4^x - 2^x = 2 \quad : \quad \left(2^2\right)^x - 2^x - 2 = 0 \quad : \quad \left(2^x\right)^2 - 2^x - 2 = 0$$

Cambio de variable: $2^x = t > 0$ (por definición, la exponencial siempre es positiva).

$$t^2 - t - 2 = 0 \quad : \quad t = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot (-2)}}{2\cdot 1} = \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases}$$

- $t = -1$: No tiene sentido, la exponencial siempre es positiva
- $t = 2$: $t = 2^x = 2 = 2^1 \Leftrightarrow x = 1$

g) $4^x \cdot 16^x = 2$

Solución.

Los dos términos se pueden expresar como exponenciales de igual base.

$$4^x \cdot 16^x = 2 \quad : \quad \left(2^2\right)^x \cdot \left(2^4\right)^x = 2 \quad : \quad 2^{2x} \cdot 2^{4x} = 2 \quad : \quad 2^{2x+4x} = 2^1$$

$$2^{6x} = 2^1 \Rightarrow 6x = 1 \quad : \quad x = \frac{1}{6}$$

h) $9^x - 2\cdot 3^{x+2} + 81 = 0$

Solución.

Ecuación de segundo grado en la variable 3^x.

$$9^x - 2\cdot 3^{x+2} + 81 = 0 : \left\{ \begin{array}{c} 9^x = \left(3^2\right)^x = \left(3^x\right)^2 \\ 3^{x+2} = 3^2 \cdot 3^x = 9\cdot 3^x \end{array} \right\} : \left(3^x\right)^2 - 2\cdot 9\cdot 3^x + 81 = 0$$

$$\left(3^x\right)^2 - 18\cdot 3^x + 81 = 0 : \left\{t = 3^x > 0\right\} : t^2 - 18\cdot t + 81 = 0 : t = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4\cdot 1\cdot 81}}{2\cdot 1} = 9$$

$$t = 3^x = 9 = 3^2 \Leftrightarrow x = 2$$

i) $7^{2x+3} - 8\cdot 7^{x+1} + 1 = 0$

Solución.

Ecuación de segundo grado en la variable 7^x.

$$7^{2x+3} - 8\cdot 7^{x+1} + 1 = 0 : \left\{ \begin{array}{c} 7^{2x+3} = 7^3 \cdot 7^{2x} = 343\cdot \left(7^x\right)^2 \\ 7^{x+1} = 7^1 \cdot 7^x = 7\cdot 7^x \end{array} \right\} : 343\cdot \left(7^x\right)^2 - 8\cdot 7\cdot 7^x + 1 = 0$$

$$343\cdot \left(7^x\right)^2 - 56\cdot 7^x + 1 = 0 : \left\{7^x = t > 0\right\} : 343\cdot t^2 - 56\cdot t + 1 = 0 : t = \frac{-(-56) \pm \sqrt{(-56)^2 - 4\cdot 343\cdot 1}}{2\cdot 343} =$$

$$= \frac{56 \pm 42}{686} : \begin{cases} t = \frac{1}{7} = 7^{-1} = 7^x \Leftrightarrow x = -1 \\ t = \frac{1}{49} = 7^{-2} = 7^x \Leftrightarrow x = -2 \end{cases}$$

j) $2^x \cdot 3^x = 12\cdot 18$

Solución.

Los dos términos se pueden expresar como exponenciales de igual base.

$$2^x \cdot 3^x = 12\cdot 18 \quad : \quad (2\cdot 3)^x = \left(2^2 \cdot 3\right)\cdot\left(2\cdot 3^2\right) \quad : \quad 6^x = 2^3 \cdot 3^3 \quad : \quad 6^x = (2\cdot 3)^3$$

$$6^x = 6^3 \Leftrightarrow x = 3$$

k) $3^x + \dfrac{1}{3^{x-1}} = 4$

Solución.

Ecuación de segundo grado en la variable 3^x.

$$3^x + \frac{1}{3^{x-1}} = 4 \ : \ 3^x + \frac{1}{3^x \cdot 3^{-1}} = 4 \ : \ 3^x + \frac{3}{3^x} = 4$$

Para quitar el denominador, se multiplica toda la ecuación por 3^x.

$$3^x \cdot \left(3^x + \frac{3}{3^x}\right) = 3^x \cdot 4 \ : \ \left(3^x\right)^2 + 3 = 4 \cdot 3^x \ : \ \left(3^x\right)^2 - 4 \cdot 3^x + 3 = 0 : \left\{3^x = t\right\}$$

$$t^2 - 4 \cdot t + 3 = 0 : t = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} : \begin{cases} t = 1 = 3^0 = 3^x \Leftrightarrow x = 0 \\ t = 3 = 3^1 = 3^x \Leftrightarrow x = 1 \end{cases}$$

l) $4^{x+1} + 2^{x+3} - 320 = 0$

Solución.

Ecuación de segundo grado en la variable 2^x.

$$4^{x+1} + 2^{x+3} - 320 = 0 : \begin{cases} 4^{x+1} = 4^1 \cdot 4^x = 4 \cdot \left(2^2\right)^x = 4 \cdot \left(2^x\right)^2 \\ 2^{x+3} = 2^3 \cdot 2^x = 8 \cdot 2^x \end{cases} : 4 \cdot \left(2^x\right)^2 + 8 \cdot 2^x - 320 = 0$$

$$\left\{2^x = t > 0\right\} : 4 \cdot t^2 + 8 \cdot t - 320 = 0 : t = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-320)}}{2 \cdot 4} : \begin{cases} t = -10 < 0 \text{ No válida} \\ t = 8 = 2^3 = 2^x \Leftrightarrow x = 3 \end{cases}$$

m) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 896$

Solución.

Ecuación con la exponencial 2^x como factor común del primer miembro.

$$2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 896 : \begin{cases} 2^{x+1} = 2^1 \cdot 2^x \\ 2^{x-1} = 2^{-1} \cdot 2^x \end{cases} : 2^{-1} \cdot 2^x + 2^x + 2^1 \cdot 2^x = 896 : \left(2^{-1} + 1 + 2^1\right) \cdot 2^x = 896$$

$$\left(\frac{1}{2} + 1 + 2\right) \cdot 2^x = 896 \ : \ \frac{7}{2} \cdot 2^x = 807 \ : \ 2^x = \frac{896 \cdot 2}{7} = 256 = 2^8 \Leftrightarrow x = 8$$

n) $3^x + 3^{1-x} = 4$

Solución.

Ecuación de segundo grado en la variable 3^x, es otra forma diferente de la ecuación **k**.

$$3^x + 3^{1-x} = 4 : 3^x + \frac{3}{3^x} = 4 : \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

o) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + 2^{x-4} = 960$

Solución.

Ecuación con la exponencial 2^x como factor común del primer miembro.

$$2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + 2^{x-4} = 960 \ : \ 2^x \cdot 2^{-1} + 2^x \cdot 2^{-2} + 2^x \cdot 2^{-3} + 2^x \cdot 2^{-4} = 960$$

$$2^x \cdot \left(2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4}\right) = 960 \ : \ 2^x \cdot \left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}\right) = 960$$

$$2^x \cdot \frac{2^3 + 2^2 + 2 + 1}{2^4} = 961 \ : \ 2^x \cdot \frac{15}{16} = 960 \ : \ 2^x = \frac{960 \cdot 16}{15}$$

$$2^x = 1024 = 2^{10} \Leftrightarrow x = 10$$

p) $2^x - 5\cdot 2^{-x} + 4\cdot 2^{-3x} = 0$

Solución.

Ecuación de bicuadrada en la variable 2^x. Para transformar la ecuación se multiplican los dos miembros por 2^{3x}, que es el término que queremos eliminar.

$$2^x - 5\cdot 2^{-x} + 4\cdot 2^{-3x} = 0 \ : \ \left(2^x - 5\cdot 2^{-x} + 4\cdot 2^{-3x}\right)\cdot 2^{3x} = 0\cdot 2^{3x}$$

$$2^x\cdot 2^{3x} - 5\cdot 2^{-x}\cdot 2^{3x} + 4\cdot 2^{-3x}\cdot 2^{3x} = 0 \ : \ 2^{x+3x} - 5\cdot 2^{-x+3x} + 4\cdot 2^{-3x+3x} = 0$$

$$2^{4x} - 5\cdot 2^{2x} + 4\cdot 2^0 = 0 \ : \ 2^{4x} - 5\cdot 2^{2x} + 4\cdot 1 = 0 \ : \ 2^{2x\cdot 2} - 5\cdot 2^{2x} + 4 = 0$$

$$\left(2^{2x}\right)^2 - 5\cdot 2^{2x} + 4 = 0 : \left\{2^{2x} = t > 0\right\} : t^2 - 5t + 4 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado se obtienen dos posible valores de t.

$$t^2 - 5t + 4 = 0 : \begin{cases} t = 1 = 2^0 = 2^{2x} \Leftrightarrow 0 = 2x : x = 0 \\ t = 4 = 2^2 = 2^{2x} \Leftrightarrow 2 = 2x : x = 1 \end{cases}$$

q) $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 117$

Solución.

Ecuación con la exponencial 3^x como factor común del primer miembro.

$$3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 117 : \ 3^x\cdot 3^{-1} + 3^x + 3^x\cdot 3^1 = 117 : \ 3^x\cdot\left(3^{-1} + 1 + 3\right) = 117$$

$$3^x\cdot\left(\frac{1}{3} + 1 + 3\right) = 117 \ : \ 3^x\cdot\frac{1+3+9}{3} = 117 \ : \ 3^x\cdot\frac{13}{3} = 117 \ : \ 3^x\cdot\frac{13}{3} = 117 \ : \ 3^x = \frac{117\cdot 3}{13}$$

$$3^x = 27 \ : \ 3^x = 3^3 \Leftrightarrow x = 3$$

r) $16^x + 16^{1-x} - 10 = 0$

Solución.

Ecuación de segundo grado en la variable 16^x.

$$16^x + 16^{1-x} - 10 = 0 \ : \ 16^x + \frac{16}{16^x} - 10 = 0 \ : \ \left(16^x + \frac{16}{16^x} - 10\right)\cdot 16^x = 0\cdot 16^x$$

$$16^x\cdot 16^x + \frac{16}{16^x}\cdot 16^x - 10\cdot 16^x = 0 \ : \ \left(16^x\right)^2 + 16 - 10\cdot 16^x = 0 \ : \ \left(16^x\right)^2 - 10\cdot 16^x + 16 = 0$$

$$\left\{16^x = t0\right\} : t^2 - 10t + 16 = 0 : \text{Ecc } 2^{\text{o}} \text{ grado} : \begin{cases} t = 2 = 16^x = \left(2^4\right)^x = 2^{4x} : 2^1 = 2^{4x} \Leftrightarrow 1 = 4x : x = \dfrac{1}{4} \\ t = 8 = 16^x = \left(2^4\right)^x = 2^{4x} : 2^3 = 2^{4x} \Leftrightarrow 3 = 4x : x = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

s) $2^{2x} + 2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} + 2^{2x-4} = 1984$

Solución.

Ecuación con la exponencial 2^{2x} como factor común del primer miembro.

$$2^{2x} + 2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} + 2^{2x-4} = 1984 \ :$$

$$2^{2x} + 2^{2x}\cdot 2^{-1} + 2^{2x}\cdot 2^{-2} + 2^{2x}\cdot 2^{-3} + 2^{2x}\cdot 2^{-4} = 1984$$

$$2^{2x}\left(1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4}\right) = 1984 \ : \ 2^{2x}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) = 1984 \ : \ 2^{2x}\,\frac{16+8+4+2+1}{16} = 1984$$

$$2^{2x}\,\frac{31}{16} = 1984 \ : \ 2^{2x} = \frac{1984\cdot 16}{31} \ : \ 2^{2x} = 1024 \ : \ 2^{2x} = 2^{10} \Leftrightarrow 2x = 10 : x = 5$$

t) $3^{2\cdot(x+1)}-28\cdot 3^x+3=0$

Solución.

Ecuación de segundo grado en la variable 3^x.

$$3^{2\cdot(x+1)}-28\cdot 3^x+3=0\ :\ 3^{2x+2}-28\cdot 3^x+3=0\ :\ 3^2\cdot 3^{2x}-28\cdot 3^x+3=0$$

$$9\cdot\left(3^x\right)^2-28\cdot 3^x+3=0:\left\{3^x=t>0\right\}:9t^2-28t+3=0$$

Ecuación de segundo grado.

$$9t^2-28t+3=0:\begin{cases} t=3=3^x \Leftrightarrow x=1 \\ t=\dfrac{1}{9}=3^{-2}=3^x \Leftrightarrow x=-2\end{cases}$$

u) $3^x+3^{x-1}+3^{x-2}+3^{x-3}+3^{x-4}=363$

Solución.

Ecuación con la exponencial 3^x como factor común del primer miembro.

$$3^x+3^{x-1}+3^{x-2}+3^{x-3}+3^{x-4}=363\ :\ 3^x+3^x\cdot 3^{-1}+3^x\cdot 3^{-2}+3^x\cdot 3^{-3}+3^x\cdot 3^{-4}=363$$

$$3^x\left(1+3^{-1}+3^{-2}+3^{-3}+3^{-4}\right)=363\ :\ 3^x\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}\right)=363$$

$$3^x\cdot\frac{81+27+9+3+1}{81}=363\ :\ 3^x\cdot\frac{121}{81}=363\ :\ 3^x=\frac{363\cdot 81}{121}\ :\ 3^x=243$$

$$3^x=3^5 \Leftrightarrow x=5$$

v) $5^{x+1}+5^x+5^{x-1}=\dfrac{62}{5}$

Solución.

Ecuación con la exponencial 5^x como factor común del primer miembro.

$$5^{x+1}+5^x+5^{x-1}=\frac{62}{5}\ :\ 5^x\cdot 5^1+5^x+5^x\cdot 5^{-1}=\frac{62}{5}\ :\ 5^x\cdot\left(5^1+1+5^{-1}\right)=\frac{62}{5}$$

$$5^x\cdot\left(5+1+\frac{1}{5}\right)=\frac{62}{5}\ :\ 5^x\cdot\left(6+\frac{1}{5}\right)=\frac{62}{5}\ :\ 5^x\cdot\frac{30+1}{5}=\frac{62}{5}\ :\ 5^x\cdot\frac{31}{5}=\frac{62}{5}$$

$$5^x=\frac{62\cdot 5}{5\cdot 31}\ :\ 5^x=2$$

Como 2 no se puede poner en base 5, para despejar x hay que tomar logaritmos en ambos miembros de la igualdad y aplicando las propiedades de estos, despejar x.

$$5^x=2\Rightarrow \log 5^x=\log 2\ :\ x\log 5=\log 2\ :\ x=\frac{\log 2}{\log 5}$$

w) $3^x=4$

Solución.

Teniendo en cuenta que 4 no se puede expresar en base 3, para resolver la ecuación se toman logaritmos.

$$3^x=4\ :\ \log 3^x=\log 4\ :\ x\log 3=\log 4\ :\ x=\frac{\log 4}{\log 3}$$

x) $e^{4x-2}=28$

Solución.

Para resolver la ecuación se toman logaritmos neperianos, que son en base e, y permiten eliminar la exponencial del primer miembro.

$$e^{4x-2}=28\ :\ \ln e^{4x-2}=\ln 28\ :\ (4x-2)\ln e=\ln 28\ :\ (4x-2)\cdot 1=\ln 28$$

$$4x-2=\ln 28\ :\ x=\frac{2+\ln 28}{4}$$

y) $e^{2x-1}=\left(\sqrt[4]{2}\right)^3$

Solución.

Para resolver la ecuación se toman logaritmos neperianos, que son en base e, y permiten eliminar la exponencial del primer miembro.

$$e^{2x-1}=\left(\sqrt[4]{2}\right)^3 \ : \ \ln e^{2x-1}=\ln(2)^{3/4} \ : \ (2x-1)\ln e=\frac{3}{4}\ln 2 \ : \ (2x-1)\cdot 1=\frac{3}{4}\ln 2$$

$$2x-1=\frac{3\ln 2}{4} \ : \ x=\frac{1+\frac{3\ln 2}{4}}{2}=\frac{4+3\ln 2}{8}$$

2. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones exponenciales:

a) $\begin{cases} 3\cdot 5^x+2\cdot 6^{y+1}=807 \\ 15\cdot 5^x-6^y=339 \end{cases}$

Solución.

Se resuelve por cambio de variable ($5^x = t$; $6^y = s$).

$$\begin{cases} 3\cdot 5^x+2\cdot 6^{y+1}=807 \\ 15\cdot 5^{x-1}-6^y=339 \end{cases} : \begin{cases} 3\cdot 5^x+2\cdot 6^1\cdot 6^y=807 \\ 15\cdot 5^{-1}\cdot 5^x-6^y=339 \end{cases} : \begin{cases} 3\cdot 5^x+12\cdot 6^y=807 \\ 15\cdot \frac{1}{5}\cdot 5^x-6^y=339 \end{cases} : \begin{cases} 3\cdot 5^x+12\cdot 6^y=807 \\ 15\cdot \frac{1}{5}\cdot 5^x-6^y=339 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\cdot 5^x+12\cdot 6^y=807 \\ 3\cdot 5^x-6^y=339 \end{cases} : \text{ Cambio de variable:} \begin{cases} 5^x=t>0 \\ 6^y=s>0 \end{cases} : \ \Rightarrow \ \begin{cases} 3t+12s=807 \\ 3t-s=339 \end{cases}$$

Se resuelve el sistema (Por eliminación, restando las ecuaciones se elimina t).

$$\begin{array}{r} 3t+12s=807 \\ 3t-s=339 \\ \hline (-):\quad / \quad 13s=468 \end{array} : 13s=468 : \ s=\frac{468}{13}=36$$

Conocido el valor de s se sustituye en la segunda ecuación y se despeja t.

$$3t-36=339 : \ 3t=375 : \ t=\frac{375}{3}=125$$

$$\begin{cases} 5^x=t=125=5^3 \Leftrightarrow x=3 \\ 6^y=s=36=6^2 \Leftrightarrow y=2 \end{cases}$$

b) $\begin{cases} 5^{x+y}=25^3 \\ 5^{x-y}=25 \end{cases}$

Solución.

$$\begin{cases} 5^{x+y}=25^3 \\ 5^{x-y}=25 \end{cases} : \begin{cases} 5^{x+y}=5^6 \\ 5^{x-y}=5^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ x-y=2 \end{cases}$$

El sistema resultante se resuelve por eliminación, sumando se despeja x, restando y.

$$\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=2 \end{cases} : \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$$

c) $\begin{cases} 3^x+3^y=36 \\ 3^{x+y}=243 \end{cases}$

Solución.

Se resuelve por cambio de variable ($3^x = t$; $3^y = s$).

$$\begin{cases} 3^x+3^y=36 \\ 3^{x+y}=243 \end{cases} = \begin{cases} 3^x+3^y=36 \\ 3^x\cdot 3^y=243 \end{cases} : \begin{cases} 3^x=t>0 \\ 3^y=s>0 \end{cases} : \begin{cases} t+s=36 \\ t\cdot s=243 \end{cases}$$

Sistema no lineal.

$$\begin{cases} t+s=36 \\ t\cdot s=243 \end{cases} : s=36-t : \{t\cdot(36-t)=243 : t^2-36t+243=0 : \begin{cases} t=27 : s=36-27=9 \\ t=9 : s=36-9=27 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t=27=3^3=3^x \Leftrightarrow x=3 \\ s=9=3^2=3^y \Leftrightarrow y=2 \end{cases} : (3,2) \text{ ó } \begin{cases} t=9=3^2=3^x \Leftrightarrow x=2 \\ s=27=3^3=3^y \Leftrightarrow y=3 \end{cases} : (2,3)$$

d) $\begin{cases} 2^{2x}+2^{2y}=85 \\ 2^{2\cdot(x+y)}=324 \end{cases}$

Solución.

Se resuelve por cambio de variable ($2^{2x}=t$; $2^{2y}=s$).

$$\begin{cases} 2^{2x}+2^{2y}=85 \\ 2^{2\cdot(x+y)}=324 \end{cases} = \begin{cases} 2^{2x}+2^{2y}=85 \\ 2^{2x}\cdot 2^{2y}=324 \end{cases} : \begin{Bmatrix} 2^{2x}=t \\ 2^{2y}=s \end{Bmatrix} : \begin{cases} t+s=85 \\ t\cdot s=324 \end{cases}$$

Sistema no lineal de ecuaciones. Se resuelve por sustitución.

$$\begin{cases} t+s=85 \\ t\cdot s=324 \end{cases} : s=85-t : \{t\cdot(85-t)=324 : t^2-85t+324=0 : \begin{cases} t=4 : s=85-4=81 \\ t=81 : s=85-81=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t=4=2^2=2^{2x} \Leftrightarrow 2x=2 : x=1 \\ t=81=2^{2y} : \log 81=\log 2^{2y} : 2y\log 2=\log 81 : y=\dfrac{\log 81}{2\log 2} \end{cases} \text{ o viceversa}$$

ECUACIONES LOGARÍTMICAS

1. Calcular Los logaritmos que se indican a continuación

a) $\log_3 9$

b) $\log_2 1024$

c) $\log_{1/3} 9$

d) $\log_{\sqrt{5}} \dfrac{1}{125}$

e) $\log_{216} 6$

f) $\log_{27} \dfrac{\sqrt{3}}{9}$

Solución.

Aplicando la definición de logaritmo se transforma en una exponencial.

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

a) $\log_3 9 = x \Leftrightarrow 3^x = 9 \;:\; 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$

b) $\log_2 1024 = x \Leftrightarrow 2^x = 1024 \;:\; 2^x = 2^{10} \Rightarrow x = 10$

c) $\log_{1/3} 9 = x \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{3}\right)^x = 9 \;:\; \left(3^{-1}\right)^x = 3^2 \;:\; 3^{-x} = 3^2 \Rightarrow -x = 2 \;:\; x = -2$

d) $\log_{\sqrt{5}} \dfrac{1}{125} = x \Leftrightarrow \left(\sqrt{5}\right)^x = \dfrac{1}{125} \;:\; \left(5^{1/2}\right)^x = 5^{-3} \;:\; 5^{x/2} = 5^{-3} \Rightarrow \dfrac{x}{2} = -3 \;:\; x = -6$

e) $\log_{216} 6 = x \Leftrightarrow 216^x = 6 \;:\; \left(6^3\right)^x = 6 \;:\; 6^{3x} = 6^1 \Rightarrow 3x = 1 \;:\; x = \dfrac{1}{3}$

f) $\log_{27} \dfrac{\sqrt{3}}{9} = x \Leftrightarrow 27^3 = \dfrac{\sqrt{3}}{9} \;:\; \left(3^3\right)^x = \dfrac{3^{1/2}}{3^2} \;:\; 3^{3x} = 3^{\frac{1}{2}-2} \;:\; 3^{3x} = 3^{\frac{-3}{2}} \Rightarrow 3x = -\dfrac{3}{2} \;:\; x = -\dfrac{1}{2}$

2. Hallar la base de los logaritmos en las siguientes igualdades

a) $\log_a 4 = 2$

b) $\log_a 9 = 2$

c) $\log_a 0'125 = 3$

d) $\log_a 0'015625 = 3$

e) $\log_a 0'001 = -3$

f) $\ln 4x = 5$

g) $\log_3 64 = x$

Solución.

Aplicando la definición de logaritmo se transforma en una exponencial.

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

a) $\log_a 4 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 4 \;:\; a = \sqrt{4} = 2$

b) $\log_a 9 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 9 \;:\; a = \sqrt{9} = 3$

c) $\log_a 0'125 = 3 \Leftrightarrow a^3 = 0'125 \;:\; a = \sqrt[3]{0'125} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{1}{2}$

d) $\log_a 0'015625 = 3 \Leftrightarrow a^3 = 0'015625 \;:\; a = \sqrt[3]{0'015625} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{64}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2^6}} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$

e) $\log_a 0'001 = -3 \Leftrightarrow a^{-3} = 0'001 \;:\; \dfrac{1}{a^3} = 0'001 \;:\; a^3 = \dfrac{1}{0'001} \;:\; a^3 = 1000 \;:\; a = \sqrt[3]{1000} = 10$

3. Resolver las siguientes igualdades aplicando la definición de logaritmo:

a) $2^x = 16$

b) $3^{1/x} = 9$

c) $\log_2 64 = x$

d) $\log_{16} 0'5 = x$

e) $\log_{10} 0'00001 = x$

f) $\log_x 125 = 3/2$

g) $\log_3 x = 4$

h) $\log_{343} \sqrt{7} = x$

i) $\log_{5/3} \dfrac{27}{25} = x$

j) $\ln 4x = 5$

k) $\log_3 64 = x$

Solución.

Para resolver este ejercicio hay que tener en cuenta que el logaritmo y la exponencial son operaciones inversas:

- $\log_a a^n = n$
- $a^{\log_a n} = n$

a) $2^x = 16 \Leftrightarrow \log_2 2^x = \log_2 16 : \{\log_2 2^x = x\} : x = \log_2 2^4 : x = 4$

b) $3^{1/x} = 9 \Leftrightarrow \log_3 3^{1/x} = \log_3 9 : \dfrac{1}{x} = \log_3 3^2 : \dfrac{1}{x} = 2 : x = \dfrac{1}{2}$

c) $\log_2 64 = x : \log_2 2^6 = x : x = 6$

d) $\log_{16} 0'5 = x \Leftrightarrow 16^x = \dfrac{1}{2} : \left(2^4\right)^x = 2^{-1} : 2^{4x} = 2^{-1} : 4x = -1 : x = -\dfrac{1}{4}$

e) $\log_{10} 0'00001 = x \Leftrightarrow 10^x = 0'00001 : 10^x = 10^{-5} \Leftrightarrow x = -5$

f) $\log_x 125 = 3/2 \Leftrightarrow x^{3/2} = 125 : x = \left(5^3\right)^{2/3} = 5^{3 \cdot \frac{2}{3}} = 5^2 = 25$

g) $\log_3 x = 4 \Leftrightarrow 3^4 = x : x = 81$

h) $\log_{343} \sqrt{7} = x \Leftrightarrow 343^x = \sqrt{7} : \left(7^3\right)^x = 7^{1/2} : 7^{3x} = 7^{1/2} \Rightarrow 3x = \dfrac{1}{2} : x = \dfrac{1}{6}$

i) $\log_{5/3} \dfrac{27}{125} = x \Leftrightarrow \left(\dfrac{5}{3}\right)^x = \dfrac{27}{125} : \left(\dfrac{5}{3}\right)^x = \left(\dfrac{125}{27}\right)^{-1} : \left(\dfrac{5}{3}\right)^x = \left(\dfrac{5^3}{3^3}\right)^{-1} : \left(\dfrac{5}{3}\right)^x = \left(\dfrac{5}{3}\right)^{-3} \Leftrightarrow x = -3$

j) $\ln 4x = 5 \Leftrightarrow 4x = e^5 : x = \dfrac{e^5}{4}$

k) $\log_3 64 = x$ Como los logaritmos en base 3 no están tabulados ni aparecen en las calculadoras, es necesario hacer un cambio de base.

$$\log_3 64 = x \Leftrightarrow 3^x = 64$$

Tomando logaritmos decimales en ambos miembros de la igualdad, se despeja x.

$$3^x = 64 \Leftrightarrow \log 3^x \log 64 : x \log 3 = \log 64 : x = \frac{\log 64}{\log 3} = 3{,}79(\text{Calculadora})$$

4. Sabiendo que $\log 2 = 0'3010$, calcular los logaritmos de los siguientes números:

a) 5
b) 125
c) 0'25
d) $\sqrt[4]{0'08}$
e) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{16}}$
f) $\sqrt[4]{781'25}$
g) $\dfrac{\sqrt{0'025}}{8}$
h) $\sqrt[3]{0'02}$
i) $\dfrac{3'2^3 \cdot 0'64^5}{0'0125 \cdot \sqrt[4]{80^3}}$

Solución.

Aplicando las propiedades de los logaritmos, e "ideas felices" se transforman los logaritmos y se expresan en función de log 2.

a) $\log 5 = \log \dfrac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0{,}3010 = 0{,}6990$

b) $\log 125 = \log 5^3 = 3\log 5 = 3\log\dfrac{10}{2} = 3(\log 10 - \log 2) = 3(1 - 0{,}3010) = 2{,}0970$

c) $\log 0'25 = \log \dfrac{1}{4} = \log 1 - \log 4 = 0 - \log 2^2 = -2\log 2 = -2 \cdot 0{,}3010 = -0{,}6020$

d) $\log \sqrt[4]{0'08} = \log\left(8 \cdot 10^{-2}\right)^{1/4} = \dfrac{1}{4}\log\left(2^3 \cdot 10^{-2}\right) = \dfrac{1}{4}\left(\log 2^3 + \log 10^{-2}\right) = \dfrac{1}{4}\left(3\log 2 + (-2)\log 10\right) =$

$$= \frac{1}{4}(3\log 2 - 2\cdot 1) = \frac{1}{4}(3 \cdot 0{,}3010 - 2 \cdot 1) = -0{,}2745$$

e) $\log \dfrac{1}{\sqrt[3]{16}} = \log \dfrac{1}{\left(2^4\right)^{1/3}} = \log 2^{-4/3} = -\dfrac{4}{3}\log 2 = -\dfrac{4}{3}\cdot 0{,}3010 = -0{,}4013$

f) $\log \sqrt[4]{781'25} = \log\left(\dfrac{78125}{100}\right)^{1/4} = \dfrac{1}{4}\log\dfrac{5^7}{10^2} = \dfrac{1}{4}\left(\log 5^7 - \log 10^2\right) = \dfrac{1}{4}(7\log 5 - 2\log 10) =$

$$= \frac{1}{4}\left(7\log\frac{10}{2} - 2\cdot 1\right) = \frac{1}{4}[7(\log 10 - \log 2) - 2] = \frac{1}{4}[7(1 - \log 2) - 2] = \frac{1}{4}[7(1 - 0{,}3010) - 2] = 0{,}7232$$

g) $\log \dfrac{\sqrt{0'025}}{8} = \log\left(25 \cdot 10^{-3}\right)^{1/2} - \log 8 = \dfrac{1}{2}\log\left(25 \cdot 10^{-3}\right) - \log 2^3 =$

$$= \frac{1}{2}\left(\log 5^2 + \log 10^{-3}\right) - 3\log 2 = \frac{1}{2}(2\log 5 + (-3)\log 10) - 3\log 2 = \frac{1}{2}\left(2\log\frac{10}{2} - 3\cdot 1\right) - 3\log 2 =$$

$$= \frac{1}{2}[2(\log 10 - \log 2) - 3] - 3\log 2 = \frac{1}{2}[2(1 - \log 2) - 3] - 3\log 2 = 1 - \log 2 - \frac{3}{2} - 3\log 2 =$$

$$= -\frac{1}{2} - 4\log 2 = -\frac{1}{2} - 4 \cdot 0{,}3010 = -1{,}704$$

h) $\log\sqrt[3]{0'02}=\log\left(2\cdot 10^{-2}\right)^{1/3}=\frac{1}{3}\left(\log 2+\log 10^{-2}\right)=\frac{1}{3}\left(\log 2+(-2)\log 10\right)=$

$$=\frac{1}{3}\left(\log 2-2\cdot 1\right)=\frac{1}{3}\left(0{,}3010-2\right)=-0{,}5663$$

i) $\log\dfrac{3'2^3\cdot 0'64^5}{0'0125\cdot\sqrt[4]{80^3}}=\log\dfrac{\left(32\cdot 10^{-1}\right)^3\cdot\left(64\cdot 10^{-2}\right)^5}{125\cdot 10^{-4}\cdot 80^{3/4}}=$

$$=\log\left[\left(2^5\cdot 10^{-1}\right)^3\cdot\left(2^6\cdot 10^{-2}\right)^5\right]-\log\left(5^3\cdot 10^{-4}\cdot\left(2^4\cdot 5\right)^{3/4}\right)=$$

$$=\log\left(2^5\cdot 10^{-1}\right)^3+\log\left(2^6\cdot 10^{-2}\right)^5-\left(\log 5^3+\log 10^{-4}+\log\left(2^4\cdot 5\right)^{3/4}\right)=$$

$$=3\log\left(2^5\cdot 10^{-1}\right)+5\log\left(2^6\cdot 10^{-2}\right)-3\log 5-(-4)\log 10-\frac{3}{4}\log\left(2^4\cdot 5\right)=$$

$$=3\left(\log 2^5+\log 10^{-1}\right)+5\left(\log 2^6+\log 10^{-2}\right)-3\log\frac{10}{2}+4\cdot 1-\frac{3}{4}\left(\log 2^4+\log 5\right)=$$

$$=3\left(5\log 2+(-1)\log 10\right)+5\left(6\log 2+(-2)\log 10\right)-3\left(\log 10-\log 2\right)+4-\frac{3}{4}\left(4\log 2+\log\frac{10}{2}\right)=$$

$$=3\left(5\log 2-1\cdot 1\right)+5\left(6\log 2-2\cdot 1\right)-3\left(1-\log 2\right)+4-\frac{3}{4}\cdot 4\log 2-\frac{3}{4}\left(\log 10-\log 2\right)=$$

$$=3\left(5\log 2-1\right)+5\left(6\log 2-2\right)-3\left(1-\log 2\right)+4-3\log 2-\frac{3}{4}\left(1-\log 2\right)=$$

$$=15\log 2-3+30\log 2-10-3+3\log 2+4-3\log 2-\frac{3}{4}\cdot 1+\frac{3}{4}\log 2=\frac{183}{4}\log 2-\frac{51}{4}=$$

$$=\frac{183}{4}\cdot 0{,}3010-\frac{51}{4}=1{,}0207$$

5. Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $2\log x=\log\frac{x}{2}-\frac{7}{4}$

Solución.

$$2\log x=\log\frac{x}{2}-\frac{7}{4}\ :\ \log x^2=\log\frac{x}{2}-\log 10^{7/4}\ :\ \log x^2=\log\frac{x/2}{10^{7/4}}$$

$$\log x^2=\log\frac{x}{2\cdot 10^{7/4}}\Leftrightarrow x^2=\frac{x}{2\cdot 10^{7/4}}:\ 2\cdot 10^{7/4}x^2=x:\ 2\cdot 10^{7/4}x^2-x=0$$

$$\left(2\cdot 10^{7/4}x-1\right)\cdot x=0:\begin{cases}x=0\\ 2\cdot 10^{7/4}x-1=0\ :\ x=\dfrac{1}{2\cdot 10^{7/4}}\end{cases}$$

x = 0 no es válida porque no existe el logaritmo de 0.

b) $\log(7x-9)^2+\log(3x-4)^2=2$

Solución.

$$\log(7x-9)^2+\log(3x-4)^2=2\quad:\quad 2\log(7x-9)+2\log(3x-4)=2$$

$$2\left(\log(7x-9)+\log(3x-4)\right)=2\quad:\quad\log(7x-9)+\log(3x-4)=1\quad:\quad\log[(7x-9)\cdot(3x-4)]=\log 10^1$$

$$(7x-9)\cdot(3x-4)=10\quad:\quad 21x^2-55x+36=10\quad:\quad 21x^2-55x+26=0$$

Resolviendo la ecuación de 2º grado:

$$21x^2-55x+26=0:\begin{cases}x=2\\ x=\dfrac{13}{21}\end{cases}$$

$x=\dfrac{13}{21}$ no es válida porque no existen logaritmos de número negativos

$$7\frac{13}{21}-9<0\ :\ 3\frac{13}{21}-4<0$$

c) $\log\left(25-x^3\right)-3\cdot\log(4-x)=0$

Solución.

$$\log\left(25-x^3\right)-3\cdot\log(4-x)=0\quad:\quad\log\left(25-x^3\right)=\log(4-x)^3\Leftrightarrow 25-x^3=(4-x)^3$$

$$25-x^3=4^3-3\cdot4^2x+3\cdot4x^2-x^3\ :\ 25-x^3=64-48x+12x^2-x^3$$

Simplificando y ordenando se obtiene una ecuación de 2º grado.

$$12x^2-48x+39=0:\begin{cases}x=\dfrac{4+\sqrt{3}}{2}\\ x=\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

Las dos son válidas.

d) $\log(3x-.1)-\log(2x+3)=1-\log 25$

Solución.

$$\log(3x-.1)-\log(2x+3)=1-\log 25\quad:\quad\log\frac{3x-.1}{2x+3}=\log 10^1-\log 25$$

$$\log\frac{3x-.1}{2x+3}=\log\frac{10}{25}\Leftrightarrow\frac{3x-.1}{2x+3}=\frac{10}{25}\ :\ \frac{3x-.1}{2x+3}=\frac{2}{5}\ :\ 5\cdot(3x\text{-}1)=2\cdot(2x+3)$$

$$15x-5=4x+6\ :\ x=1$$

Válida

e) $\log x^3=\log 6+\log x$

Solución.

$$\log x^3=\log 6+\log x\quad:\quad\log x^3=\log(6\cdot x)\Leftrightarrow x^3=6x\quad:\quad x^3-6x=0$$

$$x\cdot\left(x^2-6\right)=0:\begin{cases}x=0\\ x=\pm\sqrt{6}\end{cases}$$

La única válida es $\sqrt{6}$. $x=0$ no es válida porque no existe el logaritmo de cero, $x=-\sqrt{6}$ no es válida porque no existen logaritmos de números negativos.

f) $\log 8+\left(x^2-5x+7\right)\cdot\log 3=\log 24$

Solución.

$$\log 8+\left(x^2-5x+7\right)\cdot\log 3=\log 24\ :\ \log 3^{x^2-5x+7}=\log 24-\log 8\ :\ \log 3^{x^2-5x+7}=\log\frac{24}{8}\Leftrightarrow$$

$$3^{x^2-5x+7}=\frac{24}{8}\ :\ 3^{x^2-5x+7}=3^1\Leftrightarrow x^2-5x+7=1\ :\ x^2-5x+6=0:\begin{cases}x=2\\ x=3\end{cases}$$

Las dos son válidas

g) $\log(5x+4)-\log 2=\dfrac{1}{2}\cdot\log(x+4)$

Solución.

$$\log(5x+4)-\log 2=\frac{1}{2}\cdot\log(x+4)\ :\ 2\cdot[\log(5x+4)-\log 2]=\log(x+4)$$

$$2\log(5x+4)-2\log 2=\log(x+4)\ :\ \ \log(5x+4)^2-\log 2^2=\log(x+4)$$

$$\log\frac{(5x+4)^2}{2^2}=\log(x+4)\Leftrightarrow\frac{(5x+4)^2}{2^2}=x+4\ :\ \ (5x+4)^2=4\cdot(x+4)$$

$$25x^2+40x+16=4x+16\ :\ \ 25x^2+36x=0\ :\ \ x\cdot(25x+36)=0:\begin{cases}x=0\\25x+36=0\ :\ \ x=-\dfrac{36}{25}\end{cases}$$

$x=-\dfrac{36}{25}$ no es valida porque genera logaritmos negativos.

h) $\left(x^2-x-3\right)\cdot\log 4=3\cdot\log\dfrac{1}{4}$

Solución.

$$\left(x^2-x-3\right)\cdot\log 4=3\cdot\log\frac{1}{4}\ :\ \ \log 4^{x^2-x-3}=\log\left(\frac{1}{4}\right)^3\Leftrightarrow 4^{x^2-x-3}=\left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$4^{x^2-x-3}=4^{-3}\Leftrightarrow x^2-x-3=-3\ :\ \ x^2-x=0\ :\ \ x\cdot(x-1)=0:\begin{cases}x=0\\x-1=0:\ x=1\end{cases}$$

Válidas las dos soluciones.

i) $\dfrac{\log\left(16-x^2\right)}{\log(3x-4)}=2$

Solución.

$$\frac{\log\left(16-x^2\right)}{\log(3x-4)}=2\ :\ \ \log\left(16-x^2\right)=2\log(3x-4)\ :\ \ \log\left(16-x^2\right)=\log(3x-4)^2\Leftrightarrow 16-x^2=(3x-4)^2$$

$$16-x^2=9x^2-24x+16\ :\ \ 10x^2-24x=0\ :\ \ x\cdot(10x-24)=0:\begin{cases}x=0\\10x-24=0:\ x=\dfrac{24}{10}=\dfrac{12}{5}\end{cases}$$

j) $2\log x-\log(x-16)=2$

Solución.

$$2\log x-\log(x-16)=2\ :\ \ \log x^2-\log(x-16)=\log 10^2\ :\ \ \log x^2-\log(x-16)=\log 10^2$$

$$\log\frac{x^2}{x-16}=\log 100\Leftrightarrow\frac{x^2}{x-16}=100\ :\ \ x^2=100\cdot(x-16)\ :\ \ x^2-100x+1600=0:\begin{cases}x=20\\x=80\end{cases}$$

Las dos soluciones son válidas

k) $\left(x^2-4x+7\right)\cdot\log 5+\log 16=4$

Solución.

$$\left(x^2-4x+7\right)\cdot\log 5+\log 16=4\ :\ \ \log 5^{x^2-4x+7}=\log 10^4-\log 16\ :\ \ \log 5^{x^2-4x+7}=\log\frac{10000}{16}$$

$$\log 5^{x^2-4x+7}=\log 625\Leftrightarrow 5^{x^2-4x+7}=625\ :\ \ 5^{x^2-4x+7}=5^4\Leftrightarrow x^2-4x+7=4$$

$$x^2-4x+3=0:\begin{cases}x=1\\x=3\end{cases}$$

Las dos soluciones son válidas

l) $\log\left(2^{2-x}\right)^{2+x}+\log 1250=4$

Solución.

$$\log\left(2^{2-x}\right)^{2+x}+\log 1250=4\ :\ \ \log 2^{(2-x)\cdot(2+x)}=\log 10^4-\log 1250$$

$$\log 2^{4-x^2}=\log\frac{10000}{1250}\Leftrightarrow 2^{4-x^2}=\frac{10000}{1250}\ :\ \ 2^{4-x^2}=8\ :\ \ 2^{4-x^2}=2^3\Leftrightarrow 4-x^2=3$$

$$x^2=1:\ x=\pm 1$$

Las dos soluciones son válidas

m) $\dfrac{\log 2+\log\left(11-x^2\right)}{\log(5-x)}=2$

Solución.

$$\frac{\log 2+\log\left(11-x^2\right)}{\log(5-x)}=2\ :\ \log 2+\log\left(11-x^2\right)=2\log(5-x)$$

$$\log\left[2\cdot\left(11-x^2\right)\right]=\log(5-x)^2\ \Leftrightarrow 2\cdot\left(11-x^2\right)=(5-x)^2\ :\ 22-2x^2=5^2-10x+x^2$$

$$3x^2-10x+3=0:\begin{cases}x=3\\ x=1/3\end{cases}$$

Las dos soluciones son válidas

n) $\log x^2-\log\dfrac{10x+11}{10}=1$

Solución.

$$\log x^2-\log\frac{10x+11}{10}=1\ :\ \log x^2=\log 10^1+\log\frac{10x+11}{10}$$

$$\log x^2=\log\left(10\cdot\frac{10x+11}{10}\right)\Leftrightarrow x^2=10\cdot\frac{10x+11}{10}\ :\ x^2=10x+11$$

$$x^2-10x-11=0:\begin{cases}x=-1\\ x=11\end{cases}$$

x = 11 no es valida porque genera un logaritmo negativo

o) $2\log x-\log(x+6)=3\log 2$

Solución.

$$2\log x-\log(x+6)=3\log 2\ :\ \log x^2-\log(x+6)=\log 2^3$$

$$\log\frac{x^2}{x+6}=\log 2^3\ \Leftrightarrow\ \frac{x^2}{x+6}=8\ :\ x^2=8x+48\ :\ x^2-8x-48=0:\begin{cases}x=-4\\ x=12\end{cases}$$

x = –4 no es valida porque genera un logaritmo negativo

p) $2\lg x-\lg(x-16)=2$

Solución.

$$2\lg x-\lg(x-16)=2\ :\ \log x^2-\log(x-16)=\log 10^2$$

$$\log\frac{x^2}{x-16}=\log 100\Rightarrow\frac{x^2}{x-16}=100\ :\ x^2=100x-1600\ :\ x^2-100x+1600=0:\begin{cases}x=20\\ x=80\end{cases}$$

Las dos soluciones son válidas

6. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicas

a) $\begin{cases}x-y=15\\ \log x+\log y=2\end{cases}$

Solución.

$$\begin{cases}x-y=15\\ \log x+\log y=2\end{cases}=\begin{cases}x-y=15\\ \log(x\cdot y)=\log 10^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=15\\ x\cdot y=100\end{cases}:x=y+15:\{(y+15)\cdot y=100$$

$$y^2+15y-100=0:\begin{cases}y=-20\\ y=5\Rightarrow x=5+15=20\end{cases}$$

x = 20; y = 5, es la única solución válida. No existen logaritmos negativos.

b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

Solución.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log\dfrac{x}{y} = \log 10 \end{cases} : \begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \dfrac{x}{y} = 10 \end{cases} : x = 10y : \ (10y)^2 - y^2 = 11$$

$$99y^2 = 11 \Rightarrow y = \pm\frac{1}{3} \Rightarrow x = \mp\frac{10}{3}$$

c) $\begin{cases} \log_x(y-18) = 2 \\ \log_y(x+3) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Solución.

$$\begin{cases} \log_x(y-18) = 2 \\ \log_y(x+3) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y-18 \\ y^{1/2} = x+3 \end{cases} = \begin{cases} x^2 = y-18 \\ y = (x+3)^2 \end{cases} : x^2 = (x+3)^2 - 18$$

$$x^2 = x^2 + 6x + 9 - 18 : \ 6x - 9 = 0 : \ x = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \left(\frac{3}{2}+3\right)^2 = \frac{81}{4}$$

d) $\begin{cases} \log x - \log 5 = 3\log 5 \\ \log x^3 - \log y^2 = \log 2^4 \end{cases}$

$$\begin{cases} \log x - \log 5 = 3\log 5 \\ \log x^3 + \log y^2 = \log 2^4 \end{cases} = \begin{cases} \log x = 4\log 5 \\ \log\left(x^3 \cdot y^2\right) = \log 2^4 \end{cases} = \begin{cases} \log x = \log 5^4 \\ \log\left(x^3 \cdot y^2\right) = \log 2^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5^4 \\ x^3 \cdot y^2 = 2^4 \end{cases}$$

$$\left(5^4\right)^3 \cdot y^2 = 2^4 : \ y^2 = \frac{2^4}{5^{12}} : \ y = \sqrt{\frac{2^4}{5^{12}}} = \frac{2^2}{5^6}$$

e) $\begin{cases} (x+y)\log 2 = (x-y)\log 4 \\ xy\log 3 = \log 531441 \end{cases}$

Solución.

$$\begin{cases} (x+y)\log 2 = (x-y)\log 4 \\ xy\log 3 = \log 531441 \end{cases} = \begin{cases} \log 2^{(x+y)} = \log 4^{(x-y)} \\ \log 3^{xy} = \log 3^{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{(x+y)} = 4^{(x-y)} \\ 3^{xy} = 3^{12} \end{cases} = \begin{cases} 2^{(x+y)} = 2^{2(x-y)} \\ 3^{xy} = 3^{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^{(x+y)} = 2^{2(x-y)} \\ 3^{xy} = 3^{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 2(x-y) \\ xy = 12 \end{cases} = \begin{cases} x - 3y = 0 \\ xy = 12 \end{cases} : x = 3y : \ 3y^2 = 12 \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{12}{3}} = \pm 2$$

- Si $y = 2 \Rightarrow x = \dfrac{12}{2} = 6$ Válida
- Si $y = -2 \Rightarrow x = \dfrac{12}{-2} = -6$ Válida

f) $\begin{cases} \log(x+y) = 2\log 3 \\ x\log 2 + y\log 3 = \log 2592 \end{cases}$

Solución.

$$\begin{cases} \log(x+y) = 2\log 3 \\ x\log 2 + y\log 3 = \log 2592 \end{cases} = \begin{cases} \log(x+y) = \log 3^2 \\ \log 2^x + \log 3^y = \log\left(2^5 \cdot 3^4\right) \end{cases} = \begin{cases} \log(x+y) = \log 3^2 \\ \log\left(2^x \cdot 3^y\right) = \log\left(2^5 \cdot 3^4\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x + y = 3^2 \\ 2^x \cdot 3^y = 2^5 \cdot 3^4 \end{cases} : y = 9 - x : \left\{ 2^x \cdot 3^{9-x} = 2^5 \cdot 3^4 : \left\{ 2^x \cdot \frac{3^9}{3^x} = 2^5 \cdot 3^4 : \left\{ \frac{2^x}{3^x} = \frac{2^5 \cdot 3^4}{3^9} \right.\right.\right.$$

$$\begin{cases}\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{2^5}{3^5}\end{cases}:\begin{cases}\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^5\end{cases}\Leftrightarrow x=5:y=9-5=4:\begin{cases}x=5\\y=4\end{cases}$$

g) $\begin{cases}\log_x(y+8)=2\\\log_y(x-4)=1/2\end{cases}$

Solución.

$$\begin{cases}\log_x(y+8)=2\\\log_y(x-4)=1/2\end{cases}=\begin{cases}x^2=y+8\\y^{1/2}=x-4\end{cases}=\begin{cases}x^2=y+8\\y=(x-4)^2\end{cases}:x^2=(x-4)^2+8$$

$$x^2=x^2-8x+16+8\ :\ 24-8x=0\ :\ x=\frac{24}{8}=3\Rightarrow y=(3-4)^2=1$$

h) $\begin{cases}\log(x+y)+\log(x-y)=\log 33\\e^x\cdot e^y=e^{11}\end{cases}$

Solución.

Aplicando las propiedades de los logaritmos y exponenciales se transforma el sistema.

$$\begin{cases}\log(x+y)+\log(x-y)=\log 33\\e^x\cdot e^y=e^{11}\end{cases}=\left\{\begin{matrix}\log a+\log b=\log(a\cdot b)\\a^n\cdot a^m=a^{n+m}\end{matrix}\right\}=\begin{cases}\log[(x+y)\cdot(x-y)]=\log 33\\e^{x+y}=e^{11}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\log[(x+y)\cdot(x-y)]=\log 33\\e^{x+y}=e^{11}\end{cases}=\left\{\begin{matrix}\log f(x)=\log g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)\\a^{f(x)}=a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x)\end{matrix}\right\}=\begin{cases}(x+y)\cdot(x-y)=33\\x+y=11\end{cases}$$

Sustituyendo x + y por 11 en la primera ecuación se obtiene un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases}11\cdot(x-y)=33\\x+y=11\end{cases}=\begin{cases}x-y=3\\x+y=11\end{cases}:\text{Por reducción}:\begin{cases}x=7\\y=4\end{cases}$$

i) $\begin{cases}x^2-y^2=10.000\\(x-y)^{\log(x+y)}=1.000\end{cases}$

Solución.

$$\begin{cases}x^2-y^2=10.000\\(x-y)^{\log(x+y)}=1.000\end{cases}=\begin{cases}\log\left(x^2-y^2\right)=\log 10.000\\\log\left((x-y)^{\log(x+y)}\right)=\log 1.000\end{cases}=\begin{cases}\log((x+y)(x-y))=4\\\log(x+y)\cdot\log((x-y))=3\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\log(x+y)+\log(x-y)=4\\\log(x+y)\cdot\log((x-y))=3\end{cases}$$

Para resolver el sistema se hace un cambio de variable:

$$\left\{\begin{matrix}a=\log(x+y)\\b=\log(x-y)\end{matrix}\right\}:\begin{cases}a+b=4\\a\cdot b=3\end{cases}:b=4-a:\{a\cdot(4-a)=3$$

Ordenando se obtiene una ecuación de 2º grado que nos permite encontrar la solución.

$$a^2-4a+3=0:\begin{cases}a=1\Rightarrow b=4-1=3\\a=3\Rightarrow b=4-3=1\end{cases}$$

$$\text{Si}:\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}:\begin{cases}\log(x+y)=1\\\log(x-y)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=10^1\\x-y=10^3\end{cases}:\begin{cases}x=505\\y=-495\end{cases}\ \text{Válida}$$

$$\text{Si}:\begin{cases}a=3\\b=1\end{cases}:\begin{cases}\log(x+y)=3\\\log(x-y)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=10^3\\x-y=10^1\end{cases}:\begin{cases}x=505\\y=495\end{cases}\ \text{Válida}$$

j) $\begin{cases} 2\ \log\ x - \log\ y = 5 \\ \log x - 4 = -\log\ y \end{cases}$

Solución.

$$\begin{cases} 2\log x - \log y = 5 \\ \log\ x - 4 = -\log y \end{cases} = \begin{cases} \log x^2 - \log y = 5 \\ \log\ x + \log y = 4 \end{cases} = \begin{cases} \log \dfrac{x^2}{y} = \log 10^5 \\ \log(x \cdot y) = \log 10^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{y} = 10^5 \\ x \cdot y = 10^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} = 10^5 \\ x \cdot y = 10^4 \end{cases} : y = 10^{-5} x^2 : \{x \cdot 10^{-5} x^2 = 10^4 : x^3 = 10^9 : x = \sqrt[3]{10^9} = 10^3 \Rightarrow y = 10^{-5} \cdot \left(10^3\right)^2 = 10$$

k) $\begin{cases} y \log x = x \log y \\ x^2 = y^2 \end{cases}$

Solución.

$$\begin{cases} y \log x = x \log y \\ x^2 = y^2 \end{cases} = \begin{cases} \log x^y = \log y^x \\ x^2 = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^y = y^x \\ x^2 = y^2 \end{cases}$$

$x = y \in R^+$ Por definición solo existen logaritmos de números positivos