Cuestiones previas (página 199)

1. **Define con tus propias palabras los siguientes conceptos: posición de un cuerpo, movimiento, trayectoria, desplazamiento, espacio recorrido, velocidad, instante y aceleración.**

El objetivo de esta cuestión no es que los alumnos den las definiciones correctas, sino conocer cuáles son sus ideas previas relativas a los conceptos que van a ser estudiados en esta unidad.

2. **Razona si el siguiente enunciado es verdadero o falso: cuando un cuerpo tiene aceleración, su velocidad siempre aumenta.**

La inmensa mayoría de los alumnos contestará afirmativamente en esta cuestión. Es preciso, pues, hacer un esfuerzo importante para conseguir que acaben interpretando la aceleración de modo correcto y no la asocien exclusivamente al cambio del valor (módulo) de la velocidad.

3. **¿Podría recorrer un cuerpo 100 m sin haberse desplazado?**

Esta aparente paradoja pretende hacer que el alumno sea capaz de distinguir el desplazamiento como magnitud vectorial del espacio recorrido.

4. **¿Podría desplazarse un objeto continuamente a 140 km/h y, sin embargo, estar acelerado?**

Tal y como ocurría en el caso de la segunda, el cometido de esta pregunta es comprobar si el alumnado tiene una idea correcta del significado de la aceleración.

Actividades (páginas 202/214)

1 **El vector de posición de un cuerpo con respecto a un punto de referencia viene dado por:**

$$\vec{r} = 3\vec{i} + 5\vec{j}\ \text{m}$$

Determina sus coordenadas polares.

Las coordenadas polares buscadas son r y θ, donde r es el módulo del vector de posición.

Así pues:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 5{,}83$$

Por otra parte, si elegimos como coordenada θ el ángulo que forma el vector de posición con el eje X, entonces:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{y}{x} = \frac{5}{3}$$

Este valor de la tangente corresponde a un ángulo de 59°. Por tanto, las coordenadas polares que corresponden al vector de posición dado son:

$$r = 5{,}83$$
$$\theta = 59°$$

2 **Las coordenadas polares de posición de un cuerpo con respecto a un punto de referencia son: $r = 10$ m y $\theta = 30°$. Determina el vector de posición del cuerpo con respecto a dicho punto.**

Al ofrecerse dos coordenadas polares, se desprende que estamos hablando de la posición en un plano. Suele ser costumbre que, salvo indicación contraria, el ángulo θ sea el que forma el vector con el eje X.

Por tanto, haciendo uso de las relaciones expresadas en la página 202:

$$x = r\cos\theta = 10\cos 30° = 8{,}66$$
$$y = r\,\text{sen}\,\theta = 10\,\text{sen}\,30° = 5$$

En consecuencia, el vector de posición que corresponde a las coordenadas polares ofrecidas es:

$$\vec{r} = 8{,}66\vec{i} + 5\vec{j}$$

3 **Dos cuerpos A y B se mueven en la dirección X según las ecuaciones $x_A = 8t$ y $x_B = 1{,}5t^2$.**

a) **Representa en una misma gráfica las posiciones de A y de B desde $t = 0$ s hasta $t = 5$ s.**

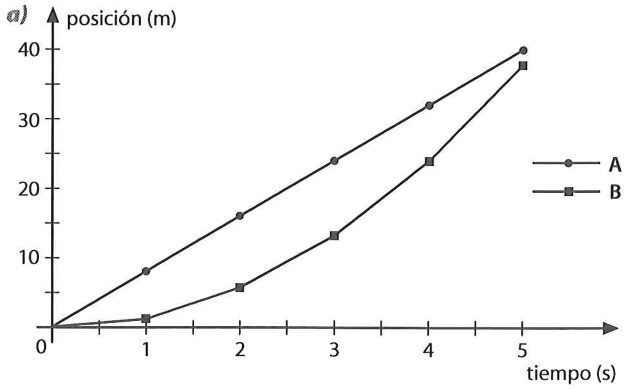
b) **¿Quién llega antes a los 100 m?**

c) **¿Al cabo de cuánto tiempo se encuentran los dos en la misma posición?**

d) **¿Quién alcanza antes los 300 m?**

e) **¿Qué diferencias encuentras entre el movimiento de A y el de B?**

a)



b) Calculando los tiempos que ambos tardan en recorrer los 100 m, se obtiene:

$$t_A = \frac{100}{8} = 12{,}5\ \text{s}$$

$$t_B = \sqrt{\frac{100}{1{,}5}} = 8{,}16\ \text{s}$$

Por tanto, el cuerpo B alcanza antes los 100 m.

c) Igualando las posiciones de ambos, $x_A = x_B$ y despejando el tiempo, se obtiene $t = 5{,}3$ s.

d) Operando del mismo modo que en el apartado *b)* se aprecia que el cuerpo B alcanza antes los 300 m.

e) Como se aprecia por la gráfica comparada y por las ecuaciones, el movimiento de A transcurre con velocidad constante ($\vec{v} = d\vec{r}/dt$) de $8\vec{i}$ m/s, mientras que el B tiene una velocidad variable igual a $3t\vec{i}$ m/s y una aceleración constante de $3\vec{i}$ m/s^2.

4 **¿Podría ser mayor el desplazamiento que el espacio recorrido?**

Dado que el valor del desplazamiento equivale a la distancia medida en línea recta entre la posición inicial y la final, el espacio recorrido será siempre mayor o, como mínimo, igual al desplazamiento. Coincidirán ambos valores cuando se trate de un movimiento rectilíneo. En los demás casos, el espacio recorrido siempre será mayor que el desplazamiento.

5 **¿Pueden ser equivalentes el espacio recorrido y el desplazamiento? ¿En qué caso?**

Dado que el valor del desplazamiento equivale a la distancia medida en línea recta entre la posición inicial y la final, el espacio recorrido será siempre mayor o, como mínimo, igual al desplazamiento. Coincidirán ambos valores cuando se trate de un movimiento rectilíneo. En los demás casos, el espacio recorrido siempre será mayor que el desplazamiento.

6 **¿Crees que un cuerpo podría haber recorrido un espacio si el desplazamiento es cero? (Revisa ahora tu respuesta a la cuestión previa número 3 del principio de la unidad.)**

Efectivamente, si la posición inicial y final coinciden, como sería el caso de un movimiento cíclico (circular, oscilatorio...) o de ida y vuelta, entonces el desplazamiento neto sería cero; sin embargo, sí ha habido movimiento y, por tanto, se ha recorrido un espacio.

7 **Lee las siguientes definiciones y expresa matemáticamente las cuatro magnitudes, teniendo en cuenta lo que se acaba de explicar.**

a) **Aceleración es la rapidez con que cambia la velocidad.**

b) **Fuerza es la rapidez con que cambia el momento lineal, $\vec{p}$, de un cuerpo.**

c) **Potencia, P, es la rapidez con que se realiza un trabajo, W.**

d) **Velocidad de una reacción es la rapidez con que cambia la concentración de un reactivo, c.**

La expresión matemática de las magnitudes pedidas sería:

a) Aceleración: $\vec{a} = \Delta\vec{v}/\Delta t$

b) Fuerza: $\vec{F} = \Delta\vec{p}/\Delta t$

c) Potencia: $P = \Delta W/\Delta t$

d) Velocidad de reacción: $v_r = \Delta c/\Delta t$

8 **Entre 1960 y 1980, la población de cierto país creció en 6 842 008 habitantes. ¿Cuál fue la rapidez de crecimiento de la población? ¿En qué unidades la expresarías?**

Haciendo uso de lo comentado en cuanto a la forma de expresar matemáticamente la rapidez con que varía una magnitud, entonces la rapidez con que varió la población entre 1960 y 1980 será:

$$\text{Rapidez de crecimiento de la población} = \frac{\Delta H}{\Delta t}$$

donde H es el número de habitantes.

Así pues:

$$\text{rapidez de crecimiento de la población} = \frac{6\,842\,008\ \text{habitantes}}{20\ \text{años}} = 342\,100{,}4\ \text{hab/año}$$

9 **Un cuerpo se desplaza en una recta según la ecuación $\vec{r} = 5t\vec{i} + 2t\vec{j}$ m. ¿Cuál ha sido su velocidad en los cinco primeros segundos?**

Aplicando la definición general de velocidad, la velocidad (media) en los cinco primeros segundos será:

$$\vec{v} = \frac{\vec{r}(5) - \vec{r}(0)}{5 - 0}$$

Dada la ecuación de posición:

$$\vec{r}(5) = 5 \cdot 5\vec{i} + 2 \cdot 5\vec{j} = 25\vec{i} + 10\vec{j}\ \text{m}$$
$$\vec{r}(0) = 5 \cdot 0\vec{i} + 2 \cdot 0\vec{j} = 0\vec{i} + 0\vec{j}\ \text{m}$$

Por tanto:

$$\vec{v} = 5\vec{i} + 2\vec{j}\ \text{m/s}$$

10 **¿Qué clase de movimiento realiza un cuerpo que se desplaza con velocidad constante? ¿Cómo crees que sería la representación gráfica de la velocidad frente al tiempo?**

Dado que la velocidad es un vector, su constancia supone que es constante en módulo, dirección y sentido. Al ser constante en dirección, el movimiento es rectilíneo, y al ser constante en módulo, es uniforme. Así pues, el movimiento es rectilíneo y uniforme.

Si representamos gráficamente la velocidad frente al tiempo, obtendremos una recta horizontal.

11 **Un cuerpo se mueve según esta ecuación de posición:**

$$\vec{r} = 5\vec{i} + (3t^2 - 1)\vec{j}$$

a) **¿Qué desplazamiento ha realizado en los diez primeros segundos? ¿En qué dirección se mueve?**

b) **Calcula cuál ha sido su velocidad en dicho intervalo de tiempo.**

a) El desplazamiento en los diez primeros segundos es:

$$\vec{r}(10) - \vec{r}(0) = [5\vec{i} + (3 \cdot 10^2 - 1)\vec{j}] - [5\vec{i} - \vec{j}] = 300\vec{j}$$

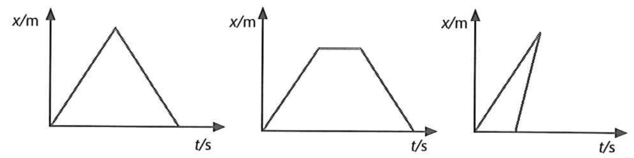
Es decir, se ha desplazado 300 metros en el sentido positivo del eje Y.

b) Su velocidad en los diez primeros segundos será:

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{300\vec{j}\ \text{m}}{10\ \text{s}} = 30\vec{j}\ \text{m/s}$$

Es decir, se desplaza 30 m cada segundo en la dirección Y positiva.

12 **Un cuerpo parte del reposo y, después de recorrer algunos metros, vuelve al punto de partida. ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la descripción de este movimiento?**



- La primera gráfica es la que representa la situación descrita.
- La segunda supondría un reposo intermedio que no se especifica en la cuestión.
- La tercera supondría una inversión del tiempo.

13 **Repite el procedimiento seguido en el ejemplo del apartado 3.1 del *Libro del alumno* eligiendo como intervalo de tiempo $\Delta t = 0{,}000\,001$ s. ¿A qué valor exacto crees que tiende la serie? El valor así obtenido es la velocidad instantánea.**

En este caso:

$$x_f = x(t + \Delta t) = 3\,(2{,}000\,001)^2 - 4\,(2{,}000\,001) = 4{,}000\,008\ \text{m}$$
$$x_0 = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 4\ \text{m}$$
$$v = \frac{x_f - x_0}{\Delta t} = \frac{4{,}000\,008 - 4}{0{,}000\,001} = 8\ \text{m/s}$$

Como puede comprobarse, al elegir intervalos de tiempo más pequeños, se obtiene el valor exacto de la velocidad instantánea.

14 **Un cuerpo se mueve en una dirección determinada según la siguiente ecuación de posición $\vec{r} = (4t^3 - t)\vec{i} + 3t^2\vec{j}$ m. Calcula:**

a) **Su velocidad media en los diez primeros segundos.**

b) **Su velocidad instantánea en $t = 5$ s y en $t = 10$ s.**

a) Su velocidad media la podemos calcular según:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(10) - \vec{r}(0)}{10} =$$

$$= \frac{[(4 \cdot 10^3 - 10)\vec{i} + (3 \cdot 10^2)\vec{j} - [(4 \cdot 0 \cdot 0)\vec{i} + 3 \cdot 0\vec{j}]}{10} =$$

$$= 399\vec{i} + 30\vec{j}\ \text{m/s}$$

Y su módulo:

$$v_m = \sqrt{399^2 + 30^2} = 400\ \text{m/s}$$

b) Derivando la ecuación de posición, obtenemos la expresión de la velocidad instantánea en cualquier instante:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (12t^2 - 1)\vec{i} - 6t\vec{j}\ \ \text{m/s}$$

Una vez obtenida esta expresión, no tendremos más que sustituir t por los valores para los que nos pide la velocidad el problema y hallar los respectivos módulos de los vectores.

$$\vec{v}_5 = 299\vec{i} + 30\vec{j} \text{ m/s}$$
$$\vec{v}_{10} = 1\,199\vec{i} + 60\vec{j} \text{ m/s}$$

y el módulo:

$$v_5 = 300{,}5 \text{ m/s}$$
$$v_{10} = 1\,200{,}5 \text{ m/s}$$

15 **¿Existe algún movimiento en el que la velocidad media y la instantánea sean iguales en todo momento? Si fuera así, di cuál.**

En el movimiento rectilíneo y uniforme, la velocidad media y la instantánea son iguales en todo momento.

16 **Un cuerpo se mueve según la ecuación $\vec{r} = (2t^2 + 5t)\vec{i} + t^3\vec{j} - 5t\vec{k}$ m. Escribe la ecuación de su velocidad instantánea en función del tiempo; posteriormente expresa dicha velocidad en $t = 2$ s y halla su valor en dicho instante.**

Como la velocidad instantánea es la derivada del vector de posición:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (4t + 5)\vec{i} + 3t^2\vec{j} - 5\vec{k} \text{ m/s}$$

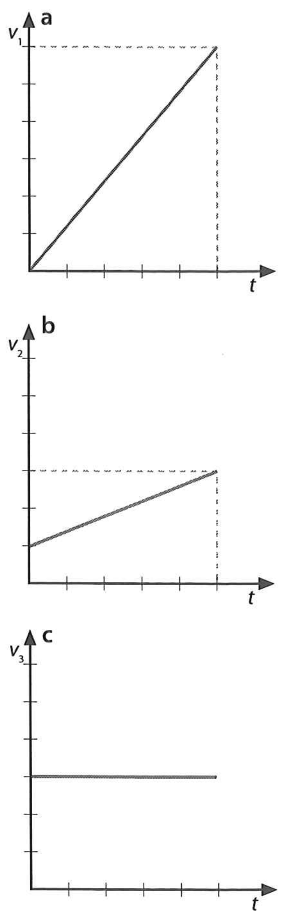
Para obtener la expresión para $t = 2$ s, no hay más que sustituir:

$$\vec{v}_2 = 13\vec{i} + 12\vec{j} - 5\vec{k} \text{ m/s}$$

El módulo será:

$$\vec{v}_2 = \sqrt{169 + 144 + 25} = 18{,}38 \text{ m/s}$$

17 **Las gráficas muestran la variación de la velocidad de tres cuerpos distintos en el mismo intervalo de tiempo.**



a) **¿En cuál de los tres casos varía la velocidad más rápidamente?**

b) **¿Qué ocurre en el caso del cuerpo de la figura c?**

c) **¿Qué crees que representa la pendiente de la recta en cada caso?**

a) En la figura **a**, la velocidad varía en mayor cuantía en el mismo intervalo de tiempo.

b) En la figura **c** no hay variación de velocidad, por lo que la velocidad es constante y no hay aceleración.

c) La pendiente representa la aceleración, pues el valor de la pendiente mide la rapidez con que varía la velocidad.

18 **Determina por el procedimiento empleado en el epígrafe 3.1 y cuya adaptación al caso se expone en el margen, la aceleración instantánea en $t = 3$ s de un móvil cuya velocidad varía según la expresión: $v = 2t^2 + t$ m/s**

a) **¿Se diferencia ese valor de la aceleración media durante los tres primeros segundos? ¿Por qué?**

b) **¿Qué dependencia del tiempo debería mostrar la ecuación para que ambos valores fuesen iguales?**

a) De acuerdo con el procedimiento descrito, tomaremos un intervalo de tiempo muy pequeño, por ejemplo, $\Delta t = 0{,}000\,001$ s, con lo que:

$$v_f = 2(t + \Delta t)^2 + (t + \Delta t) = 2 \cdot 3{,}000\,001^2 + 3{,}000\,001 = 21{,}000\,013 \text{ m/s}$$

Para la velocidad inicial, no tenemos más que sustituir en la ecuación el tiempo por su valor ($t = 3$ s), luego:

$$v_i = 21 \text{ m/s}$$

Sustituyendo en la expresión para la aceleración:

$$a = \frac{v_f - v_i}{\Delta t} = \frac{21{,}000\,013 - 21}{0{,}000\,001} = 13 \text{ m/s}^2$$

Pasemos ahora a calcular la aceleración media:

$$a = \frac{v_3 - v_0}{\Delta t} = \frac{21 - 0}{3} = 7 \text{ m/s}^2$$

En un movimiento con aceleración variable lo normal es que la aceleración media y la calculada para un instante determinado no coincidan.

b) Para que la aceleración media y la instantánea coincidan en todo momento, esta magnitud debería ser constante, lo que ocurriría si la expresión de la velocidad fuese una ecuación de primer grado (movimiento uniformemente acelerado).

19 **Determina la aceleración instantánea y la aceleración en $t = 3$ s de un cuerpo, si su ecuación de posición (en una dirección) es:**

$$x = 2t + 3t^2 \text{ m}$$

Derivando dos veces la posición, se obtiene la aceleración:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 6 \text{ m/s}^2$$

Como puede comprobarse, la aceleración es independiente del tiempo.

20 **La posición de un cuerpo viene determinada por la ecuación:**

$$\vec{r} = -3t^2\vec{i} + 2t^3\vec{j} + 4t\vec{k} \text{ m}$$

a) **Determina las componentes de su aceleración. ¿Es esta constante?**

b) **Calcula el valor de la aceleración a los 2 s.**

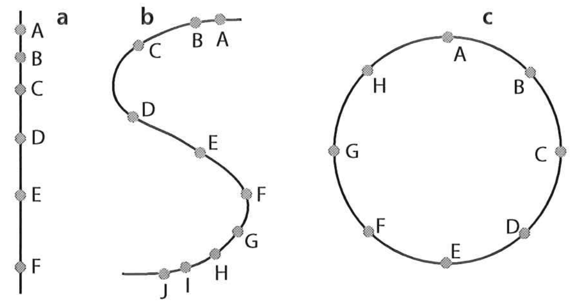
a) La aceleración se obtiene derivando dos veces la ecuación de posición, con lo que resulta:

$$\vec{a} = -6\vec{i} + 12t\vec{j} \text{ m/s}^2$$

Dado que depende del tiempo, no es constante.

b) A los 2 s, la aceleración es $\vec{a} = -6\vec{i} + 24\vec{j}$ m/s^2 y su valor es 24,7 m/s^2.

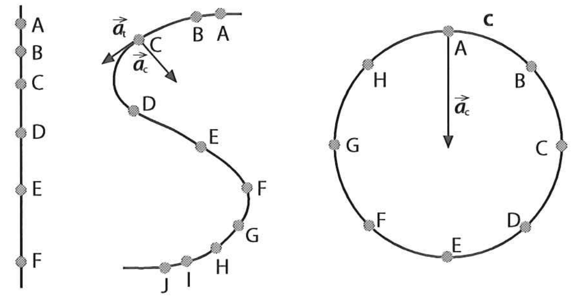
21 **Dibuja los vectores $\vec{a}_t$ y $\vec{a}_c$ (si ambos actúan) especificando su dirección y sentido en los siguientes movimientos (las posiciones se suponen fotografiadas y a intervalos de tiempo iguales):**



En la figura **a** solo hay aceleración tangencial, pues el movimiento tiene lugar en una recta. La aceleración actúa en la dirección de la recta y hacia abajo, pues la velocidad aumenta en ese sentido.

En la figura **b** actúan ambas componentes de la aceleración, pues se aprecia que el módulo de la velocidad cambia, así como su dirección. Desde A hasta E aumenta el módulo de la velocidad, por lo que $\vec{a}_t$ tendrá dirección tangencial y sentido de A hacia E en cada punto, mientras que $\vec{a}_c$ será perpendicular a $\vec{a}_t$ en cada punto y dirigida hacia el centro de curvatura. Obsérvese que el módulo de la aceleración centrípeta aumenta entre C y D, pues aumenta el módulo de la velocidad y disminuye el radio de curvatura. Por el contrario, desde E hasta J, el módulo de la velocidad disminuye, por lo que ahora el sentido de $\vec{a}_t$ es de J hacia E, mientras que el de $\vec{a}_c$ se dirige hacia el centro de curvatura, siendo perpendicular en cada momento a la aceleración tangencial.

En la figura **c** no hay aceleración tangencial, $\vec{a}_t$, pues los puntos están equidistantes sobre la trayectoria y no hay cambio en el módulo de la velocidad. Sin embargo, existe $\vec{a}_c$, (porque la dirección de la velocidad cambia) de módulo constante (pues v es constante y el radio de curvatura también) y dirigida hacia el centro de la circunferencia.



22 **Razona la veracidad o falsedad de las conclusiones que se exponen de la siguiente proposición: si un objeto se mueve con valor de velocidad constante a lo largo de una trayectoria curvilínea, entonces: *a)* Su velocidad es constante; *b)* Su aceleración es nula; *c)* Hay una contradicción manifiesta, pues no es compatible moverse con valor de velocidad constante con el hecho de que la trayectoria sea curvilínea.**

a) Falso. Que el valor de la velocidad sea constante indica que el módulo del vector velocidad es constante, lo que es perfectamente posible, ahora bien, si la trayectoria es curvilínea, necesariamente debe estar sometida a aceleraciones, con lo que el vector velocidad no puede ser constante.

b) Falso. Si el movimiento es curvilíneo (por ejemplo, un movimiento circular), necesariamente debe haber aceleraciones (centrípeta).

c) Falso. No hay contradicción por las razones que se han expresado en los apartados *a)* y *b)*.

Cuestiones y problemas (páginas 218/219)

La posición de los cuerpos

1 **¿Qué tipo de coordenadas se usan para definir la posición de un cuerpo?**

Se pueden usar coordenadas cartesianas o polares.

2 **Explica cómo transformarías las coordenadas polares en cartesianas, y viceversa.**

Véase la página 202 del *Libro del alumno.*

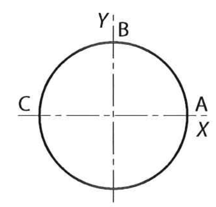
3 **¿Qué diferencia hay entre desplazamiento y espacio recorrido?**

El valor del desplazamiento es la distancia medida en línea recta entre la posición final y la inicial, y el espacio recorrido es la distancia medida sobre la trayectoria.

4 **¿Se puede determinar la trayectoria que ha seguido un cuerpo conociendo la posición inicial y la final al cabo de cierto tiempo?**

No, con esos datos solo podemos conocer el desplazamiento y la velocidad media.

5 **Un cuerpo describe un cuarto de circunferencia de radio 5 m desde A hacia B, como se aprecia en la figura, partiendo del punto A en el instante $t = 0$. Determina, considerando el origen en el centro:**



a) **El vector desplazamiento correspondiente al movimiento.**

b) **El módulo de dicho desplazamiento.**

c) **El espacio recorrido. ¿Coincide con el apartado *b)*? ¿Por qué?**

d) **Repite los tres apartados anteriores para el caso del movimiento desde A hasta C.**

a) La posición en A es $\vec{r}_A = 5\vec{i}$ m, mientras que en B es $\vec{r}_B = 5\vec{j}$ m, por lo que $\Delta\vec{r} = -5\vec{i} + 5\vec{j}$ m.

b) Calculando su módulo se obtiene:

$$\Delta\vec{r} = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = 7{,}07 \text{ m}$$

c) El espacio recorrido es:

$$s = \frac{\pi r}{2} = 7{,}85 \text{ m}$$

Obviamente no coinciden, pues al no ser un desplazamiento diferencial, el arco de circunferencia (espacio recorrido) y la cuerda (desplazamiento) no coinciden.

d) La posición en C es $-5\vec{i}$ m, por lo que el desplazamiento de A a C es $\Delta\vec{r} = -10\vec{i}$ m, siendo su módulo igual a 10 m. El espacio recorrido ahora es $s = \pi r = 15{,}7$ m

La velocidad de los cuerpos

6 **La posición de un cuerpo cambia con el tiempo en las tres direcciones del espacio. ¿Cuántas componentes tiene el vector velocidad?**

El vector velocidad tiene tres componentes.

7 **¿Qué indica la velocidad media de un cuerpo? ¿Es ilustrativa del movimiento que ha seguido el mismo?**

La velocidad media es la relación entre la variación del desplazamiento y el tiempo. Solo indica la rapidez con que cambia de posición. La velocidad media no es ilustrativa del movimiento de un cuerpo, es decir, no pueden extraerse conclusiones acerca de cómo ha transcurrido el movimiento disponiendo de la velocidad media como único dato.

8 **¿Pueden ser iguales en todo momento la velocidad media y la instantánea en algún movimiento? ¿En qué caso?**

Sí, en el movimiento rectilíneo y uniforme.

9 **Si la aceleración tiene componentes tangencial y centrípeta, ¿por qué no se habla de dichas componentes de la velocidad?**

La velocidad (como vector) es siempre tangente a la trayectoria, por lo que carece de componente normal o centrípeta.

10 **¿Podría un cuerpo tener celeridad (módulo de velocidad) constante y velocidad variable?**

El objetivo de estas cuestiones es insistir en el carácter vectorial de la velocidad, por lo que en este caso en el que el módulo (celeridad) es constante, la variación de la velocidad significa que la dirección cambia. Esto ocurrirá en cualquier movimiento no rectilíneo que transcurra con celeridad constante. El ejemplo más simple es el movimiento circular uniforme.

11 **¿Podría un cuerpo tener celeridad variable y velocidad constante?**

La respuesta es no; si la velocidad es constante, son constantes todos sus atributos: módulo (celeridad), dirección y sentido. Por tanto, es imposible que su celeridad sea variable.

12 **¿Crees que la velocidad media de un cuerpo en movimiento podría ser cero en cierto intervalo de tiempo?**

Sí, siempre que al cabo de ese intervalo de tiempo escogido el cuerpo estuviese exactamente en la misma posición que al inicio de ese intervalo.

La aceleración de los cuerpos

13 **¿Cómo se definen la velocidad y la aceleración instantáneas? ¿Qué se entiende en física por «instante»?**

La velocidad y aceleración instantáneas son las velocidades y aceleraciones medias cuando el intervalo de tiempo tiende a cero, y esa es la definición de «instante» en física.

14 **¿Puede haber aceleración sin que cambie el valor de la velocidad? Razona tu respuesta.**

Sí, cuando cambia la dirección de la velocidad se produce una aceleración centrípeta o normal.

15 **Conocida la ecuación de posición de un cuerpo, ¿cómo calcularías la aceleración?**

Conocida la ecuación de posición, obtendríamos la velocidad si derivamos dicha ecuación con respecto al tiempo, y si derivamos la velocidad, obtenemos la aceleración. Por tanto, debemos derivar dos veces la ecuación de posición.

16 **¿Qué sentido físico tienen las componentes tangencial $\vec{a}_t$ y centrípeta $\vec{a}_c$?**

La aceleración tangencial se produce cuando cambia el módulo de la velocidad, y la aceleración normal o centrípeta, cuando varía la dirección.

17 **Explica qué tipo de movimiento describiría un cuerpo si:**

a) **$\vec{a}_t$ es constante y $\vec{a}_c$ es cero.**

b) **$\vec{a}_c$ es constante y $\vec{a}_t$ es cero.**

c) **Ambas son cero.**

a) MRUA. *b)* MCU. *c)* MRU.

18 **¿Podría un cuerpo tener velocidad cero y, sin embargo, estar acelerado? Razona tu respuesta.**

Efectivamente. Conviene hacer notar al alumnado que del enunciado no se desprende que el cuerpo esté permanentemente en reposo. El enunciado se cumple igualmente si el cuerpo tiene velocidad cero en un instante dado.

Existen numerosos ejemplos en que se da esa doble condición: la pelota que es lanzada al aire verticalmente tiene velocidad cero al llegar al punto más alto y, sin embargo, está acelerada; el péndulo que oscila, al llegar a los extremos, cumple también esa doble condición, etcétera. En todos los casos, hay un denominador común: el sentido de la aceleración debe ser contrario al de la velocidad inicial. De ese modo, al cambiar de sentido (signo) la velocidad, forzosamente pasa por el valor cero.

19 **¿Puede cambiar el sentido de la velocidad de un cuerpo si su aceleración es constante?**

La respuesta es similar a la cuestión 20. El sentido de la velocidad cambiará siempre que la aceleración constante sea contraria a la velocidad inicial. Los ejemplos que pueden citarse son idénticos a los de la cuestión citada.

20 **¿Puede cambiar la dirección de la velocidad de un cuerpo si su aceleración es constante?**

Cambiar únicamente la dirección de la velocidad implica que el módulo no varía. De ello se deduce que la aceleración es de tipo normal o centrípeta (la componente tangencial es nula). Este es el caso del movimiento circular uniforme.

21 **¿Puede un cuerpo aumentar su velocidad si su aceleración disminuye?**

Efectivamente. La aceleración significa rapidez con que cambia (en este caso, aumentando) la velocidad. Que la aceleración disminuya significa que disminuye la rapidez con que aumenta la velocidad, pero no significa que la velocidad deje de aumentar; sigue haciéndolo, pero con «menos rapidez». Evidentemente, para que esto ocurra, la velocidad y la aceleración tienen que actuar en el mismo sentido. Un ejemplo en el que sucede lo que se plantea lo proporciona el movimiento de un péndulo desde un extremo hasta el punto más bajo; la aceleración en el extremo es máxima, pero la velocidad es cero. A medida que desciende, la velocidad aumenta, pero la aceleración disminuye hasta hacerse cero en el punto más bajo. El mismo análisis es válido para la oscilación de un muelle.

22 **¿Podría un cuerpo moverse hacia la derecha si su aceleración se dirige hacia la izquierda?**

El movimiento del péndulo que acabamos de citar, moviéndose entre el punto más bajo y uno de los extremos, nos indica que sí puede ocurrir lo que se plantea en el enunciado. Lógicamente, la velocidad irá disminuyendo hasta hacerse cero para luego cambiar el sentido del movimiento, salvo que la aceleración negativa sea motivada por la fuerza de rozamiento, en cuyo caso el cuerpo acaba parándose, pero sin invertir el sentido del movimiento.

23 **¿Qué tipo de movimiento describiría un objeto cuya aceleración fuese en todo momento perpendicular a la trayectoria y aumentase, además, de forma constante? ¿Y si la aceleración se mantuviese constante?**

Hemos de insistir en estas cuestiones para que los alumnos y alumnas subrayen o anoten todos los aspectos que consideren relevantes y mediten sobre ellos. Aquí se nos indica que la aceleración es en todo momento perpendicular a la trayectoria. Es decir, la única aceleración que existe es centrípeta, por tanto será nula la aceleración tangencial. De ello se deduce que el módulo de la velocidad es constante.

En consecuencia, si la aceleración (centrípeta) aumenta de forma constante y el módulo de la velocidad no cambia, de la expresión de la aceleración centrípeta $a_c = v^2/r$ se desprende que el radio debe disminuir de forma constante. Por tanto, describiría un movimiento en espiral hacia el centro, con un módulo de velocidad constante.

En el segundo caso, si la aceleración es constante, también lo será el radio, por lo que el movimiento será circular y uniforme.

24 **¿Puede ser negativo el módulo de la velocidad? ¿Y el de la aceleración?**

Por la definición de módulo como valor absoluto, nunca podrán ser negativos.

Los signos solo son indicativos de los sentidos (atributo vectorial distinto del módulo).

25 **¿Cuáles de las siguientes ecuaciones se corresponderían con la de un cuerpo que se desplaza en una única dirección con aceleración constante? Razona tu respuesta.**

a) $\vec{r} = \sqrt{2}\,t^2\vec{j}$

b) $x = -4t^3 + t$

c) $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 10\vec{j}$

d) $y = 2t - 4t^2$

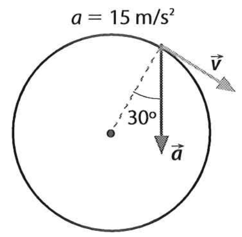
Deben satisfacerse dos requisitos según el enunciado: movimiento en una sola dirección, lo que supone que $\vec{v}$ como derivada de $\vec{r}$ solo tenga una componente (aspecto que satisfacen los cuatro casos) y que la aceleración, como derivada segunda de $\vec{r}$, sea constante, cosa que sucede si la variable t aparece elevada al cuadrado. Queda pues descartado el caso ***b)***, de modo que los casos ***a)***, ***c)*** y ***d)*** satisfacen las condiciones del problema.

D26 **La siguiente figura representa la aceleración total, en un instante dado, de una partícula que describe círculos de 3 m de radio. Calcula, en ese instante:**

a) **La aceleración centrípeta.**

b) **El valor de la velocidad.**

c) **La aceleración tangencial.**



a) La aceleración centrípeta, según se desprende de la figura, valdrá $a_c = a \cos 30° = 12{,}99$ m/s².

b) Como $a_c = \dfrac{v^2}{r}$, entonces, dado que conocemos el valor de a_c y de r, obtenemos que:

$$v = 6{,}24 \text{ m/s}$$

c) La aceleración tangencial será:

$$a_t = a \operatorname{sen} 30° = 7{,}5 \text{ m/s}^2$$

D27 **Dado el vector velocidad:**

$$\vec{v} = 3t\vec{i} + 4t\vec{j}$$

calcula:

a) **La aceleración tangencial.**

b) **La aceleración normal.**

c) **El radio de curvatura.**

a) La aceleración tangencial, por definición, se obtiene derivando el módulo de la velocidad, que viene dado por:

$$v = \sqrt{(3t)^2 + (4t)^2} = \sqrt{25t^2} = 5t$$

Derivando el módulo de la velocidad, obtenemos la aceleración tangencial:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 5 \text{ m/s}^2$$

b) y *c)* Si calculamos el vector aceleración total (derivando $\vec{v}$), obtenemos que:

$$\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} \text{ m/s}^2$$

Es, por tanto, constante y su módulo resulta ser también de 5 m/s². Es decir, la única aceleración existente es la aceleración tangencial; al no haber aceleración centrípeta tampoco hay radio de curvatura.

28 **Un cuerpo se mueve describiendo círculos de radio r con valor de velocidad v. Al cabo de cierto tiempo, se observa que tanto el valor de la velocidad como el radio se han duplicado. Razona si son ciertas o falsas las siguientes proposiciones:**

a) **Su aceleración centrípeta no ha cambiado.**

b) **Su aceleración centrípeta se ha duplicado.**

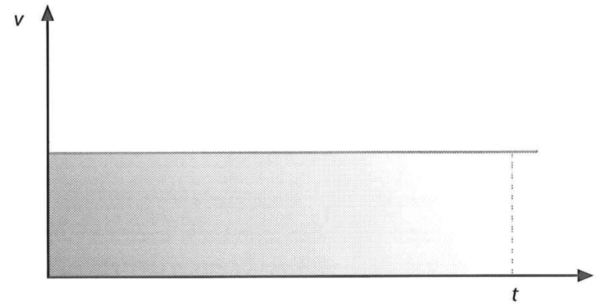
c) **Su aceleración centrípeta disminuye a la mitad.**

d) **Necesariamente ha existido una componente tangencial de la aceleración.**

Al duplicarse el valor de la velocidad y del radio, la aceleración centrípeta se duplica con respecto a la original. Por tanto, las únicas propuestas ciertas son la *b)* y la *d)*, pues la variación del valor de la velocidad supone la existencia de aceleración tangencial.

Análisis gráfico de movimientos

29 **¿Qué indica el área sombreada de la siguiente gráfica? ¿Qué tipo de movimiento representa? ¿Cuánto valdría su aceleración?**



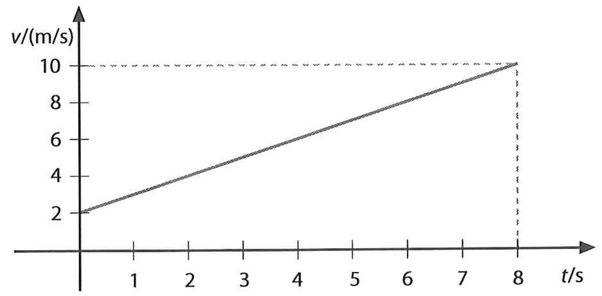
Se trata de un rectángulo cuya área se obtendría multiplicando la altura (valor de velocidad) por la base (tiempo). Así, el área $= vt$ representaría el espacio recorrido por el cuerpo.

El movimiento representado en la gráfica sería un movimiento que transcurre con módulo de velocidad constante.

Dado que la gráfica representa el valor de la velocidad (módulo) frente al tiempo, no podemos asegurar que la aceleración sea cero. Para poderlo hacer, hubiese sido necesario que en el eje de ordenadas se representara el vector velocidad. Así pues, nada podemos afirmar acerca de la existencia o no de aceleración. Lo único que podríamos decir es que, si hubiese aceleración, sería centrípeta.

Esta cuestión debe servir para que los alumnos y alumnas reflexionen una vez más sobre la importancia de distinguir entre módulo y vector.

30 **¿Cuánto vale el desplazamiento efectuado en el movimiento cuya gráfica velocidad-tiempo se ofrece a continuación? ¿Cómo varía la velocidad? ¿Cómo sería la aceleración? ¿Cuánto valdría?**



Si consideramos que el movimiento es en una dirección, el desplazamiento equivale al valor del área encerrada bajo la gráfica; en este caso, el desplazamiento es de 48 m.

La velocidad varía de modo constante, por lo que la aceleración es constante. El valor de esta coincide con la pendiente de la gráfica.

Es decir:

$$a = \frac{v_f - v_0}{t} = 1 \text{ m/s}^2$$

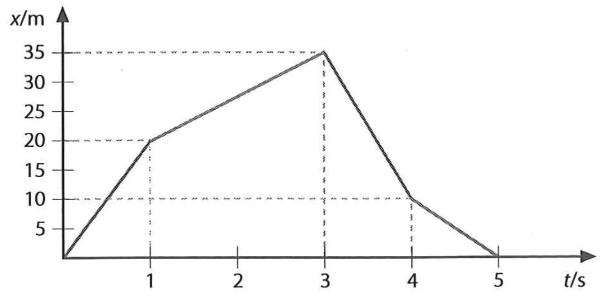
31 **La siguiente gráfica muestra el desplazamiento en función del tiempo para un cuerpo que se mueve a lo largo del eje *X*. Halla las velocidades medias en los siguientes intervalos:**

a) **Entre 0 s y 1 s.**

b) **Entre 0 s y 4 s.**

c) **Entre 1 s y 5 s.**

d) **Entre 0 s y 5 s.**



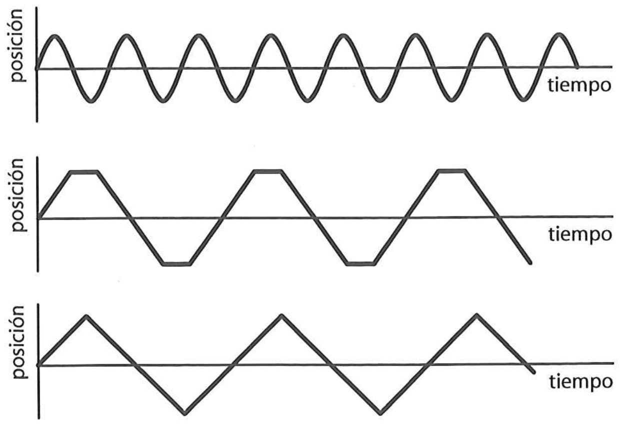
a) Entre 0 y 1 s: $v_m = \frac{x_1 - x_0}{t} = \frac{20 - 0}{1} = 20$ m/s

b) Entre 0 y 4 s: $v_m = \frac{10 - 0}{4} = 2{,}5$ m/s

c) Entre 1 y 5 s: $v_m = \frac{0 - 20}{4} = -5$ m/s

d) Entre 0 y 5 s: $v_m = 0$ m/s

D32 **Explica razonadamente qué gráfica posición-tiempo de las que se proponen describe adecuadamente el movimiento del péndulo de un reloj de cuco.**



La única gráfica que explicaría el movimiento del péndulo de un reloj de cuco es la primera.

La segunda gráfica supone que se detiene un tiempo considerable en cada extremo para luego moverse con velocidad constante entre ambos, lo que no corresponde a la situación real del movimiento.

La tercera gráfica contempla movimiento uniforme entre ambos extremos y corte drástico a velocidad cero en cada extremo, lo que tampoco es real.

Análisis numérico de movimientos

33 **La ecuación de posición de un móvil viene dada por:**

$$\vec{r} = 4t^2\,\vec{i} - 3\vec{j} + 5\,\vec{k} \text{ m}$$

Razona y calcula:

a) **¿En qué dirección se mueve?**

b) **¿Cuánto se ha desplazado en los 10 primeros segundos?**

c) **¿Cuál ha sido su velocidad media en esos 10 s?**

d) **¿Qué velocidad lleva a los 10 s?**

e) **¿Cuánto vale su aceleración? ¿Qué tipo de movimiento lleva?**

a) La única componente variable del vector de posición es la componente *X*, por lo que esa es la dirección del movimiento.

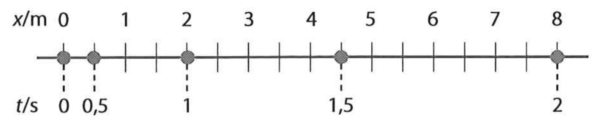
b) $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t = 10) - \vec{r}(t = 0) = 400\vec{i}$ m

c) $\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = 40\vec{i}$ m/s

d) La velocidad en cualquier instante es $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 8t\vec{i}$ m/s, por lo que en $t = 10$ s, vale $80\vec{i}$ m/s.

e) La aceleración se obtiene derivando la velocidad, dando $8\vec{i}$ m/s. Por tanto, su movimiento es rectilíneo (en la dirección *X*) y con aceleración constante.

D34 **La siguiente figura muestra las posiciones que ocupa una bola en movimiento.**



A partir de ella, deduce:

a) **La ecuación de posición en función del tiempo.**

b) **La velocidad media en el intervalo de tiempo considerado.**

c) **La velocidad instantánea en los tiempos señalados.**

d) **La aceleración de la bola.**

e) **La velocidad de la bola al cabo de 5 s.**

a) Analizando comparativamente los valores de posición y tiempo, llegamos a la conclusión de que la ecuación de posición en función del tiempo que satisface todos los pares de valores es:

$$x = 2t^2 \text{ m}$$

b) La velocidad media en el intervalo de tiempo considerado será:

$$v_m = \frac{x_f - x_0}{t} = \frac{8 - 0}{2} = 4 \text{ m/s}$$

c) La velocidad en cualquier instante se obtiene derivando la posición, $v(t) = 4t$ m/s.

Sustituyendo los valores ofrecidos, tenemos que:

- $v(0) = 0$ m/s
- $v(0{,}5) = 2$ m/s
- $v(1) = 4$ m/s
- $v(1{,}5) = 6$ m/s
- $v(2) = 8$ m/s

d) Derivando la velocidad, obtenemos que la aceleración de la bola es de 4 m/s^2.

e) Sustituyendo en la ecuación de velocidad deducida en el apartado ***c)***, obtenemos que la velocidad al cabo de 5 s será de 20 m/s.

35 **La siguiente tabla muestra las coordenadas *x, y, z* (en metros) de una partícula en función del tiempo (en segundos):**

(m) \ t(s)	0	1	2	3	4	5
x	2	2	2	2	2	2
y	0	2	4	6	8	10
z	0	1	4	9	16	25

a) **Determina su vector de posición en función del tiempo.**

b) **¿Cuál es el vector desplazamiento correspondiente a los 5 s?**

c) **¿Cuántos metros ha recorrido en esos 5 s?**

d) **Representa las gráficas *v-t* y *a-t* en el intervalo de tiempo que aparece en la tabla.**

a) Analizando la variación temporal de cada coordenada, obtenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \text{ m} \\ y = 2t \text{ m} \\ z = t^2 \text{ m} \end{array}\right\} \vec{r} = 2\vec{i} + 2t\vec{j} + t^2\vec{k} \text{ m}$$

b) $\Delta\vec{r}$ (entre 0 y 5 s) $= \vec{r}(5) - \vec{r}(0) =$

$= (2\vec{i} + 10\vec{j} + 25\vec{k}) - 2\vec{i} = 10\vec{j} + 25\vec{k}$ m

c) El valor del desplazamiento efectuado en ese tiempo es el módulo del vector calculado en el apartado anterior, por lo que:

valor del desplazamiento = 26,92 m

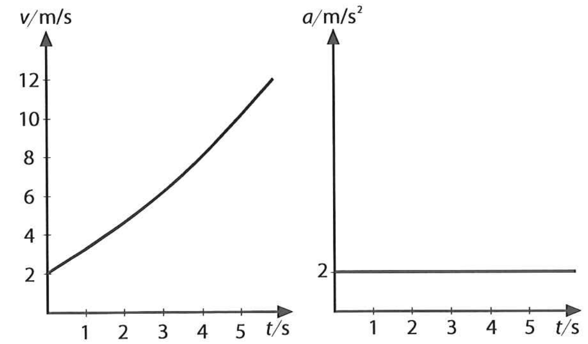
d) Para representar las gráficas, calculamos los módulos de la velocidad en $t = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5 s, a partir de la ecuación de velocidad, $\vec{v} = 2\vec{j} + 2t\vec{k}$ m/s, de donde resulta:

$v(0) = 2$ m/s $\quad v(1) = 2{,}8$ m/s $\quad v(2) = 4{,}5$ m/s

$v(3) = 6{,}3$ m/s $\quad v(4) = 8{,}2$ m/s $\quad v(5) = 10{,}2$ m/s

Por otra parte, si calculamos la aceleración, obtenemos que $\vec{a} = 2\vec{k}$ m/s^2; es, por tanto, constante.

Representando los valores obtenidos:



D36 **La ecuación de movimiento de cierto cuerpo en el plano *XY* viene dada por la ecuación $\vec{r} = 4\cos 3t\,\vec{i} + 4\,\text{sen}\,3t\,\vec{j}$ m (*t* en segundos).**

a) **Demuestra que la trayectoria de dicha partícula es una circunferencia centrada en el origen (0, 0) de radio 4 m.**

b) **Determina los vectores velocidad y aceleración.**

c) **Demuestra que el vector aceleración siempre apunta hacia el centro (es opuesto a *r*).**

d) **Demuestra que el módulo de dicha aceleración cumple la igualdad $|a| = |v|^2/r$.**

a) Las componentes *x* e *y* de la ecuación de posición son:

$$x = 4\cos 3t$$
$$y = 4\,\text{sen}\,3t$$

Elevando ambas componentes al cuadrado y sumándolas, se obtiene:

$$x^2 + y^2 = 4^2\,(\cos^2 3t + \text{sen}^2\,3t)$$

de donde se obtiene:

$$x^2 + y^2 = 4^2$$

que es la ecuación de una circunferencia de radio 4 m centrada en el origen.

b) La velocidad se obtiene derivando el vector de posición, obteniéndose:

$$\vec{v} = -12\,\text{sen}\,3t\,\vec{i} + 12\cos 3t\,\vec{j} \text{ m/s}$$

siendo la aceleración:

$$\vec{a} = -36\cos 3t\,\vec{i} - 36\,\text{sen}\,3t\,\vec{j} \text{ m/s}^2$$

c) Como puede observarse, el vector $\vec{a}$ equivale a $-9\vec{r}$, por lo que es opuesto a este, apuntando hacia el centro.

d) El módulo de la aceleración vale:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-36\cos 3t)^2 + (-36\,\text{sen}\,3t)^2} = 36 \text{ m/s}^2$$

Mientras que el módulo de la velocidad al cuadrado es:

$$|\vec{v}|^2 = (-12\,\text{sen}\,3t)^2 + (-12\cos 3t)^2 = 144 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

Se comprueba que:

$$\frac{|\vec{v}|^2}{r} = \frac{144}{4} = 36 \text{ m/s}^2$$

Evaluación (página 220)

Señala en cada caso la respuesta que consideres correcta:

1. **Un cuerpo se desplaza 10 m cada segundo hacia el norte y 3 m cada segundo hacia el este. Si su posición inicial es (0, 2), ¿cuál de las siguientes ecuaciones representa correctamente la posición en función del tiempo?**

a) $x = (2 + 10t) + 3t$ m

b) $\vec{r} = (2 + 10)t\vec{i} + 3t\vec{j}$ m

▶ ***c)*** $\vec{r} = 3t\vec{i} + (2 + 10t)\vec{j}$ m

2. **¿Cuáles de las siguientes afirmaciones te parecen correctas?**

▶ ***a)*** **Un movimiento con velocidad constante nunca puede ser circular.**

b) **La aceleración, en caso de existir, tiene siempre la misma dirección y sentido que la velocidad.**

c) **La velocidad tiene la misma dirección y sentido que el vector posición.**

3. **Si la ecuación de posición de un cuerpo es $\vec{r} = 2t\vec{i} + 3\vec{j}$ m, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?**

▶ ***a)*** **Su velocidad es $\vec{v} = 2\vec{i}$ m/s.**

▶ ***b)*** **Se mueve solo en la dirección *X*.**

▶ ***c)*** **Se desplaza 20 m en los 10 primeros segundos.**

4. **Si la ecuación de posición de un cuerpo es $\vec{r} = 5\vec{i} + 2t^2\vec{j}$ m, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?**

▶ ***a)*** **Su movimiento transcurre en una recta.**

b) **Su velocidad es constante.**

▶ ***c)*** **Su aceleración es constante.**

5. **¿Qué afirmaciones de las siguientes son ciertas para un movimiento cuya aceleración es tangencial y constante?**

a) **Recorre los mismos espacios en los mismos intervalos de tiempo.**

▶ ***b)*** **Es rectilíneo.**

c) **Su velocidad nunca podrá ser cero.**

6. **De un movimiento cuya aceleración constante es siempre perpendicular a la trayectoria podemos decir que:**

a) **Su velocidad es constante.**

b) **Tiene aceleración tangencial constante.**

▶ ***c)*** **Pasa por la misma posición en intervalos de tiempo iguales.**

7. **Si un cuerpo está sometido a aceleración constante, puede decirse que:**

a) **Su trayectoria nunca podrá ser curvilínea.**

b) **Su velocidad siempre irá en aumento.**

c) **No pasará dos veces por el mismo punto.**

Ninguna de las afirmaciones es correcta.

8. **Si un cuerpo se desplaza los primeros 50 km a una velocidad constante de 80 km/h y los siguientes 50 km (en la misma dirección) a otra velocidad constante de 60 km/h, entonces la velocidad media en todo el trayecto es:**

▶ ***a)*** **68,57 km/h**

b) **70 km/h**

c) **72,35 km/h**

9. **Indica si un cuerpo que se mueve bajo una aceleración constante perpendicular a su trayectoria:**

a) **Puede moverse en una recta.**

b) **Puede variar el valor de su velocidad.**

c) **Puede tener aceleración tangencial.**

a) No.

b) No.

c) No.

10. **¿Es posible que un cuerpo en movimiento con aceleración constante tenga en algún momento un desplazamiento igual a cero?**

Sí, si la aceleración es contraria a la velocidad inicial y el movimiento es en una recta, al volver a pasar por el punto de partida, el desplazamiento neto desde el momento en que empezó a moverse es cero.

9 Movimientos en una y dos dimensiones

E S Q U E M A D E L A U N I D A D

- **1. ¿Cómo se describen los movimientos?** páginas 222/223
  - **2.1. Las ecuaciones de movimiento de los cuerpos** páginas 222/223
  - **2.2. Las gráficas del movimiento** página 223
- **2. Movimientos en una dimensión: movimientos rectilíneos** páginas 224/235
  - **2.1. Movimiento rectilíneo uniforme** páginas 224/226
  - **2.2. Movimientos rectilíneos con aceleración constante** páginas 227/231
  - **2.3. Los movimientos rectilíneos con aceleración constante en la naturaleza** páginas 232/235
- **3. Movimientos en dos dimensiones. Movimientos parabólicos** páginas 236/242
  - **3.1. Lanzamiento horizontal** página 238
  - **3.2. Movimiento parabólico completo** páginas 239/241
  - **3.3. Superposición de movimientos uniformes** página 242
- **4. Movimientos circulares** páginas 243/246
  - **4.1. El movimiento circular uniforme** páginas 243/245
  - **4.2. El movimiento circular uniformemente acelerado** página 246
- **5. ¿Por qué pueden variar los movimientos?** página 246
- **Ideas claras** página 247

Cuestiones previas (página 221)

1. Dejamos caer simultáneamente y desde la misma altura dos cuerpos de distinta masa. Despreciando el rozamiento con el aire, indica la opción u opciones que consideres correctas:

a) **El de mayor masa llega antes al suelo.**

b) **Los dos llegan al suelo con la misma velocidad.**

c) **Los dos llegan al suelo a la vez.**

d) **El de menor masa llega antes al suelo.**

Esta cuestión tiene por finalidad detectar la persistencia de las ideas erróneas referidas a la caída libre y valorar la estrategia que hay que seguir para desechar esas ideas. Las respuestas correctas son la *b)* y la *c)*.

2. Lanzamos hacia arriba dos objetos de distinta masa con la misma velocidad. Señala la opción que consideres correcta:

a) **El más ligero llega más alto.**

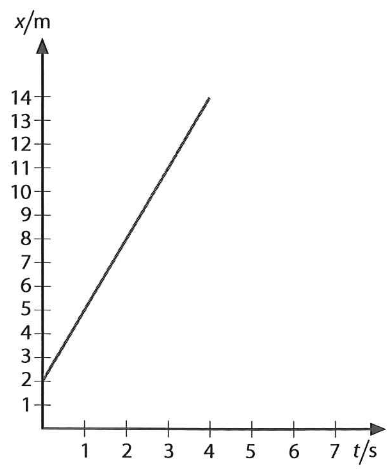
b) **El más pesado llega más alto.**

c) **Alcanzan los dos la misma altura.**

Puede ocurrir que bastantes alumnos y alumnas hayan contestado correctamente la pregunta anterior y, sin embargo, no lo hagan en la respuesta a esta. Ello nos indica que no está del todo desterrada la idea de que la masa desempeña un papel en los tiempos de caída o en la altura que pueda alcanzar en un lanzamiento vertical. La respuesta correcta es la *c)*.

Actividades (páginas 223/245)

1 En la figura 9.2 se representa la ecuación de posición de un cuerpo. Determina dicha ecuación y calcula a partir de ella, qué posición tendrá el cuerpo en $t = 10$ s.



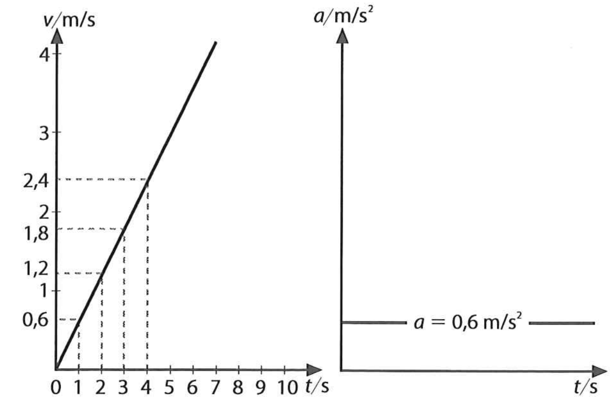
De la simple observación de la gráfica es fácil obtener dos puntos de la misma, por ejemplo, cuando $x = 2$, $t = 0$ y cuando $x = 4$, $t = 1$. Con dos puntos de una recta, por cualquiera de los procedimientos que el alumno ya domina y que aprendió en Matemáticas, se obtiene la ecuación de la recta $x = 2 + 3t$.

Una vez calculada la ecuación, no hay más que sustituir:

$$x = 2 + 3 \cdot 10 = 32 \text{ m}$$

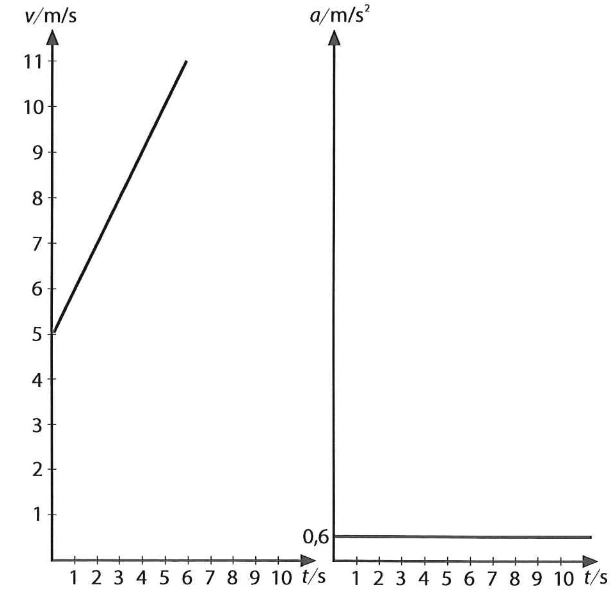
2 Representa las gráficas velocidad-tiempo y aceleración-tiempo durante los diez primeros segundos del movimiento para los casos *b)* y *c)* de la aplicación 2 (página 223) del *Libro del alumno*.

Para el caso en que $v = 0{,}6t$ m/s, las gráficas son:



valores											
	t (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	v (m/s)	0	0,6	1,2	1,8	2,4	3	3,6	4,2	4,8	5,4	6

Para el caso en que $v = 5 + 0{,}6t$ m/s, son:



3 La ecuación de posición de un cuerpo que se desplaza a lo largo de una recta viene dada por la expresión:

$$x = 80 - 3t^2 \text{ m}$$

a) **Determina sus ecuaciones de velocidad y aceleración en función del tiempo. ¿Qué significado tienen los signos de la velocidad y la aceleración?**

b) **Calcula, en intervalos de 0,5 s y durante los cinco primeros segundos, los valores de su posición y velocidad.**

b) **Representa, en el intervalo indicado, las gráficas *x-t*, *v-t* y *a-t*.**

a) Las expresiones de la velocidad y la aceleración se obtienen de derivar la ecuación del desplazamiento.

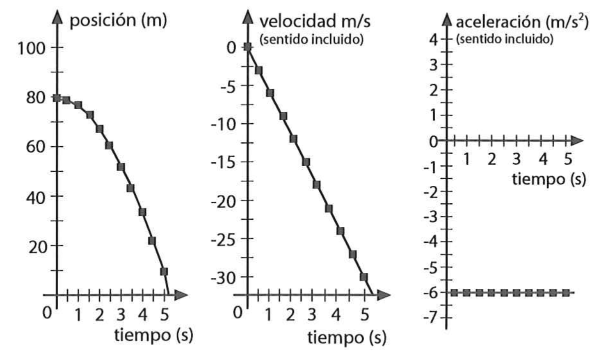
$$v = \frac{dx}{dt} = -6t \text{ m/s}; \; a = \frac{dv}{dt} = -6 \text{ m/s}^2$$

Los signos negativos de la velocidad y la aceleración indican, que el sentido del movimiento es contrario al adoptado como positivo. De hecho, como se verá en la tabla del apartado siguiente, el cuerpo se va acercando paulatinamente al lugar tomado como origen y lo hace con una celeridad cada vez mayor.

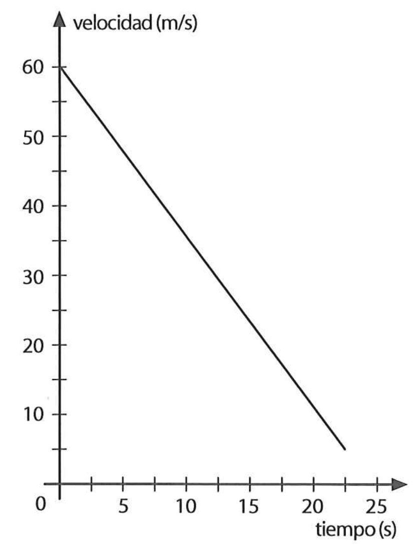
b) Sustituyendo en las ecuaciones de la posición y la velocidad podemos elaborar una tabla como esta:

Tiempo (s)	Posición (m)	Velocidad (m/s)
0	80	0
0,5	79,25	−3
1	77	−6
1,5	73,25	−9
2	68	−12
2,5	61,25	−15
3	53	−18
3,5	67,75	−21
4	32	−24
4,5	19,25	−27
5	5	−30

c)

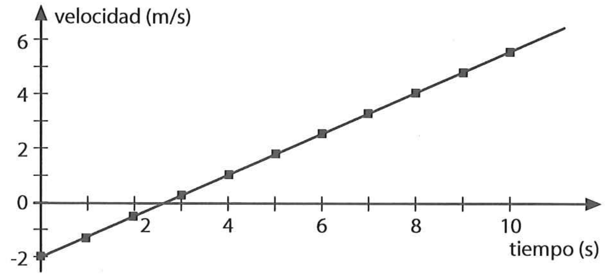


4 ¿Cuál es la ecuación de velocidad que corresponde a la gráfica velocidad-tiempo representada en la figura 9.3?



De la simple observación de la gráfica se pueden obtener dos puntos que son más que suficientes para determinar la ecuación, por ejemplo, cuando $t = 0$, $v = 60$ y cuando $t = 20$, $v = 1$. Con estos datos obtenemos $v = 60 - 2{,}5t$.

5 Un cuerpo se desplaza a lo largo de una recta con una aceleración constante de $+0{,}8$ m/s². Representa su gráfica velocidad-tiempo en los diez primeros segundos si partió con una velocidad inicial de -2 m/s. Determina posteriormente la ecuación de velocidad en función del tiempo. ¿En qué instante se hace cero su velocidad? ¿Vuelve a ser cero en algún otro instante?



De la expresión $v = v_0 + at$ obtenemos la ecuación de la velocidad:

$$v = -2 + 0{,}8t$$

Para saber si se puede hacer 0 la velocidad, no tenemos más que suponer que sea así y buscar solución a la ecuación:

$$0 = -2 + 0{,}8t$$

despejando el tiempo $t = 2{,}5$ s. La ecuación, como se ve, es de primer grado y tiene una única solución.

6 ¿Cuánto tarda la luz del Sol en llegar a nosotros teniendo en cuenta que esta estrella se halla a una distancia media de la Tierra de 149 600 000 km y que la luz se propaga aproximadamente a $3 \cdot 10^8$ m/s? (Resuelve la actividad situándote tú mismo como origen del sistema de referencia).

Si nos situamos como origen del sistema de referencia ($x = 0$), el Sol se halla a una distancia $x_0 = 149\,600\,000$ km.

Como la velocidad de la luz es de 300 000 km/s, podemos calcular el tiempo que tarda la luz del Sol en llegar a nosotros, es decir, en llegar a $x = 0$ desde su posición inicial. Como desde nuestro punto de vista la luz del Sol viene a nuestro encuentro (signo negativo para su velocidad), la expresión que hay que usar será; $x = x_0 - vt$. En nuestro caso:

$$0 = 149\,600\,000 - 300\,000t$$

Por tanto:

$$t = 498{,}6 \text{ s} = 8 \text{ min } 19 \text{ s}$$

7 Dos vehículos (A y B) inician simultáneamente un viaje en la misma dirección y sentido. El vehículo A, con una velocidad de 80 km/h, parte de una localidad que se halla a 30 km del vehículo B, que se desplaza a 110 km/h.

a) **¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta que el segundo vehículo dé alcance al primero?**

b) **¿Qué distancia habrá recorrido el vehículo A en el momento del encuentro? ¿Y el vehículo B?**

Tomando como origen del sistema de referencia la posición inicial del vehículo B, la ecuación de posición de A (cuya posición inicial con respecto a B es $x_{0A} = 30$ km) será:

$$x_A = x_{0A} + v_A t = 30 + 80t \text{ km}$$

mientras que la ecuación de posición de B será:

$$x_B = v_B t = 110t \text{ km}$$

El valor de t es el mismo para ambos, pues parten simultáneamente. El alcance se producirá cuando ambos se encuentren en la misma posición, es decir, cuando $x_A = x_B$, por lo que:

$$30 + 80t = 110t$$

Despejando t,obtenemos:

$$t = 1 \text{ h}$$

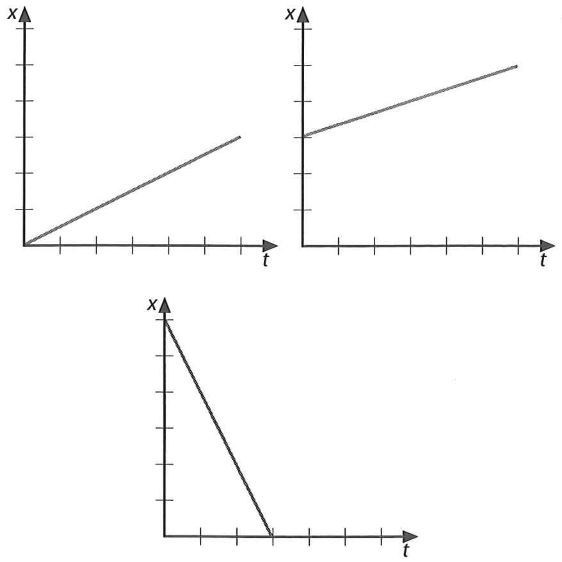
Es decir, lo alcanzará al cabo de 1 h de ponerse ambos vehículos en movimiento.

8 ¿Qué representa la pendiente de la gráfica *x-t* del movimiento rectilíneo uniforme? Representa las ecuaciones de posición $x = 3 + 2t$ y $x = 3 + 4t$ y compáralas.

Representa la velocidad.

Si se representan las ecuaciones de posición del enunciado, se obtienen dos rectas con la misma ordenada en el origen, 3, pero la segunda con el doble de pendiente que la primera.

9 **¿Cuál de las siguientes gráficas representa un valor más alto de la velocidad?**



La gráfica tercera, pues en ella es mayor la rapidez con que varía la posición. La pendiente negativa solo indica en este caso que el cuerpo se acerca al observador.

10 **Las ecuaciones de movimiento de dos móviles A y B son $x_A = 5t$ y $x_B = 140 - 2t$ (ambas en m). Determina:**

a) **¿Qué distancia los separa inicialmente?**

b) **¿En qué sentidos relativos se mueven uno respecto del otro?**

c) **¿En qué instante se cruzan?**

d) **Represente el movimiento de ambos en una misma gráfica *x-t*.**

a) Inicialmente, ($t = 0$), $x_A = 0$ y $x_B = 140$ m, luego la distancia que los separa es de 140 m.

b) Ambos móviles emprenden la marcha al mismo tiempo pero en sentidos opuestos. Normalmente, lo más sencillo para el alumnado es visualizar el movimiento de ambos cuerpos en la gráfica del apartado ***d)***.

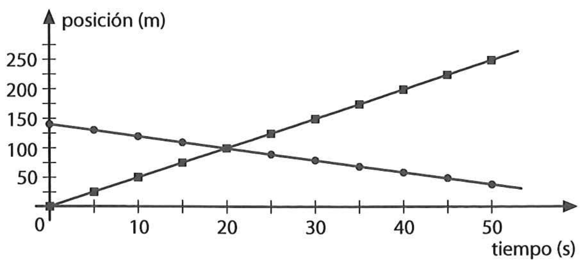
c) Se cruzarán cuando sus posiciones sean coincidentes, por lo que igualando ambas:

$$x_A = x_B$$

$$5t = 140 - 2t$$

despejando el tiempo, $t = 20$ s.

d)



11 **Dos vehículos (A y B) parten uno al encuentro de otro desde dos localidades que distan entre sí 400 km. El vehículo A viaja a 100 km/h, mientras que el B, que se pone en marcha un cuarto de hora después, lo hace a 120 km/h.**

a) **¿Cuánto tiempo pasa desde que partió A hasta que se produce el encuentro?**

b) **¿Qué distancia ha recorrido este vehículo?**

Resuelve las cuestiones numéricamente y representa el movimiento de ambos vehículos en una gráfica posición-tiempo.

a) Tomando como origen del sistema de referencia la posición inicial de A, las ecuaciones de posición para ambos vehículos serán:

$$x_A = v_A t = 100t \text{ km}$$

$$x_B = x_{0B} - v_B t_B = 400 - 120\left(t - \frac{1}{4}\right) = 430 - 120t \text{ km}$$

El encuentro se producirá cuando ambos estén en la misma posición, es decir, cuando $x_A = x_B$, por lo que:

$$100t = 430 - 120t$$

En consecuencia:

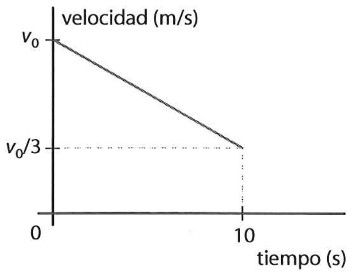
$$t = 1{,}95 \text{ h} = 117 \text{ min } 16 \text{ s}$$

Es decir, el encuentro se producirá al cabo de 117 min y 16 s contados desde que partió el vehículo A.

b) El espacio que recorre A será:

$$x_A = 100t = 195 \text{ km}$$

12 **Determina la aceleración correspondiente a la gráfica de la figura 9.13. ¿Sabrías determinar por procedimientos gráficos el desplazamiento efectuado?**



$$a = \frac{v_f - v_0}{t_f - t_0} = \frac{\frac{v_0}{3} - v_0}{10} = -\frac{2v_0}{30} = -\frac{v_0}{15}$$

Con respecto al segundo apartado, el desplazamiento efectuado puede obtenerse gráficamente calculando el área encerrada bajo la gráfica $v - t$. Dado que es un trapecio, el área es $1/2\ b\ (H + h)$, que aplicado al caso que nos compete, nos da un desplazamiento igual a:

$$\Delta x = \frac{1}{2}t\left(v_0 - \frac{v_0}{3}\right) = \frac{20v_0}{3}$$

13 **Un esquiador de saltos desciende con aceleración constante, de modo que duplica su velocidad de 10 m/s a 20 m/s en 3 s. Determina gráficamente (o usando el teorema de Merton) el espacio que habrá recorrido en ese intervalo de tiempo.**

El espacio es el mismo que el que habría recorrido, en ese mismo tiempo, con una velocidad promedio de 15 m/s. Es decir, 45 m.

14 **La nave transbordadora *Discovery* lleva una velocidad de 720 km/h en el momento del aterrizaje. Cuando entra en contacto con el suelo, despliega los paracaídas de frenado, que, junto con los propios frenos de la nave, hacen que esta se detenga totalmente en 20 s.**

a) **¿Cuál ha sido la aceleración, suponiéndola constante, de frenado?**

b) **¿Qué distancia ha recorrido la nave durante el frenado?**

La velocidad inicial (720 km/h) equivale a 200 m/s. Al cabo de 20 s su velocidad es cero, por lo que la aceleración será:

$$a = \frac{v - v_0}{t} = -10 \text{ m/s}^2$$

El espacio que recorrerá la nave o desplazamiento efectuado es:

$$d = v_0 t + 1/2at^2$$

$$d = 200 \text{ m/s} \cdot 20 \text{ s} + 172 \cdot (-10 \text{ m/s}^2) \cdot 20^2 \text{ s}^2 = 2\,000 \text{ m}$$

Es decir, la nave *Discovery* recorre 2 km hasta que se detiene por completo.

15 **PAU** **Un tiesto cae sobre un viandante desde el balcón de un quinto piso que está a 13 m. ¿De cuánto tiempo dispone la persona en cuestión para evitar el golpe? (En su caída, el tiesto se acelera a razón de 9,8 m/s²).**

Si consideramos el sistema centrado en la «víctima», entonces el tiesto se encuentra inicialmente a 13 m de su cabeza y se acerca a él con una aceleración de 9,8 m/s² sin velocidad inicial. Según el criterio de signos expuesto, la ecuación será:

$$y = y_0 - 1/2\ at^2$$

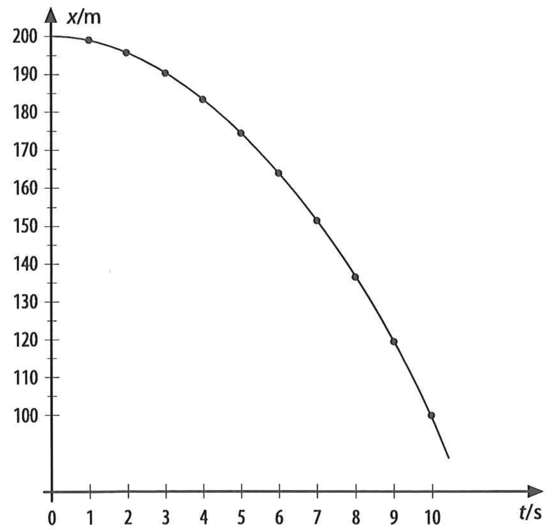
Cuando impacte contra el viandante, el valor de *y* será cero, y esto ocurrirá cuando *t* sea:

$$t = \sqrt{2y_0/a} = 1{,}6 \text{ s}$$

Ciertamente, debe tener muy buenos reflejos el viandante para esquivar el casi seguro «tiestazo».

16 **Construye la gráfica posición-tiempo correspondiente a la ecuación $x = x_0 - 1/2\ at^2$ durante los 10 primeros segundos, sabiendo que $x_0 = 200$ m y $a = 2$ m/s². A continuación determina en qué tiempo *x* es igual a 0.**

tiempo	posición	tiempo	posición
1	199	6	164
2	196	7	151
3	191	8	136
4	184	9	119
5	175	10	100



La posición se hará cero al cabo de 14,14 s.

17 **¿Qué llegará antes al suelo, una pila alcalina grande o un folio? ¿Por qué? Compruébalo.**

Véase la respuesta a la actividad siguiente.

18 **Repite la operación haciendo una bola compacta con el folio. ¿Qué ocurre ahora? ¿Pesa ahora más el folio? ¿Cuál puede ser entonces el factor distorsionador de la experiencia?**

No se debe pasar por alto las actividades 17 y 18, pues ayudan a romper muchos equívocos. A pesar de que el alumnado habrá oído hablar de la caída libre, cuando se les pide que ordenen por orden de llegada varios cuerpos de distinta masa dejados caer libremente, la mayoría cree que el más pesado llegará antes. Por ello, es bueno que hagan la comprobación y vean que no es la masa el factor que determina que lleguen o no a la vez. Verán que el factor distorsionador es el rozamiento con el aire, que es un fluido.

19 **Observa el vídeo completo de la caída de la pluma y el martillo en la Luna, en la siguiente dirección de Internet de la NASA. http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/image/feather-drop_sound.mov y haz una estimación, usando las expresiones pertinentes, de la aceleración gravitatoria de caída libre en la Luna.**

El objetivo de esta pregunta es doble: por una parte, visualizar un concepto que, a pesar de repetirse con pertinacia, la experiencia nos indica que no termina de ser interiorizado por un buen número de alumnos: la velocidad de caída, en ausencia de atmósfera (caso de la Luna), no depende de la masa de los cuerpos. Por otro lado, una estimación aproximada del tiempo que tardan en caer los cuerpos nos permite acercarnos al valor de la gravedad lunar, 1,6 m/s².

20 **PAU** **En un campeonato de salto de palanca, uno de los participantes se deja caer a la piscina desde la postura inicial de pino. Si la plataforma tiene 10 m de altura:**

a) **¿De cuánto tiempo dispone para ejecutar sus piruetas?**

b) **¿Con qué velocidad entrará en el agua?**

Responde a las cuestiones desde el punto de vista tanto de un hipotético saltador como desde el de un jurado que estuviera situado a ras del agua. Comprueba la igualdad de los resultados.

El saltador, desde su punto de vista, entrará en el agua cuando haya descendido o recorrido 10 m. La ecuación que él emplearía será:

$$y = 1/2\ gt^2 \Rightarrow t = 1{,}4 \text{ s}$$

Y entrará con una velocidad:

$$v = gt = 13{,}7 \text{ m/s}$$

Desde el punto de vista del jurado, las ecuaciones que se han de utilizar son:

$$y = y_0 - 1/2\ gt^2$$

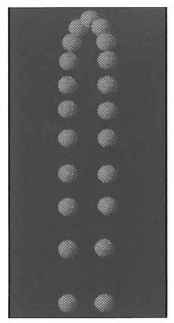
$$v = -gt$$

Así, el saltador llegaría al agua cuando $y = 0$, lo que ocurriría a los 1,4 s. La velocidad con que entraría el saltador en el agua sería de −13,7 m/s, donde el signo negativo indica que el saltador se mueve hacia el agua.

21 **Revisa tu contestación a la cuestión previa número 1 por si crees necesario modificar tus ideas.**

En estos momentos, el alumnado no debe tener duda de que todos los cuerpos que se dejan caer desde la misma altura llegarán al suelo a la vez con independencia de su masa.

22 **Observa la figura 9.21; se trata de una pelota lanzada casi verticalmente (para que pudiera tomarse la fotografía). Comprueba que existe simetría entre el movimiento de ascenso y el de descenso. ¿Por qué crees que esto es así? Trata de demostrar matemáticamente la existencia de esa simetría. Para ello, debes comprobar lo siguiente: *a)* que el tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima es la mitad del tiempo total de vuelo**



(o tiempo que tarda en llegar al suelo), y ***b)*** **que la velocidad con que llega al suelo es la misma (con sentido opuesto) que la velocidad con que fue lanzado inicialmente.**

En los dos subapartados que siguen al planteamiento de esta actividad se da cumplida respuesta a la demostración que se solicita. El fin perseguido con esta actividad es forzar la reflexión del alumno, de modo que sea capaz de aventurar las conclusiones que se demuestran posteriormente.

23 **El famoso «jet d'eau» (chorro de agua) del lago Leman en Ginebra (Suiza) alcanza una altura de 140 m. ¿Con qué velocidad mana el agua de la fuente? ¿Cuánto tarda el agua saliente en alcanzar su máxima altura?**

Dado que los 140 m es la máxima altura que puede alcanzar la fuente, y como:

$$y_{máx} = \frac{v_0^2}{2g}$$

se obtiene:

$$v_0 = \ = 52{,}4\ \text{m/s}$$

Por otro lado, como la velocidad final del chorro es 0, tenemos todos los datos de la ecuación $v = v_0 - gt$, salvo el tiempo pedido, que se despeja sin dificultad: $t = 5{,}3$ s.

24 **Indica cuáles serían las ecuaciones que describirían un lanzamiento vertical hacia abajo según:**

a) **El propio lanzador.**

b) **Un observador situado en el suelo.**

a) Desde el punto de vista del lanzador, y usando el criterio de signos que se ha expuesto, tendremos:

- Ecuación de posición (altura descendida):

$$y = v_0t + 1/2\,gt^2$$

- Ecuación de velocidad: $v = v_0 + gt$

b) Desde el punto de vista de un observador situado en el suelo, la altura a la que se encuentra el cuerpo que se lanzó desde una altura inicial, y_0, es:

- Ecuación de posición (altura desde el suelo):

$$y = y_0 - v_0t - 1/2\,gt^2$$

- Ecuación de velocidad: $v = -v_0 - gt$

25 **PAU** **Si das una patada a un balón a 1 m de altura del suelo, este sale despedido verticalmente. Al cabo de 5 s el balón cae. Calcula:**

a) **¿Cuál fue la velocidad con qué salió disparado el balón?**

b) **¿Hasta qué altura asciende?**

c) **¿Al cabo de cuánto tiempo vuelve a pasar por la altura inicial de 1 m?**

a) Al cabo de 5 s, el balón llega al suelo, momento en que su altura es cero:

$$y = y_0 + v_0t - 1/2\,gt^2 = 0$$

Por consiguiente:

$$v_0 = \frac{1/2\,gt^2 - y_0}{t} = 24{,}3\ \text{m/s}$$

b) La altura a la que asciende vendrá determinada por el momento en que la velocidad se haga cero:

$$v = v_0 - gt = 0$$

Por tanto, el tiempo en que $v = 0$ es $t = v_0/g = 2{,}5$ s, que, sustituido en la ecuación de la altura, nos dará la altura máxima a la que asciende:

$$y_{máx} = y_0 + v_0t - 1/2\,gt^2 = 31{,}1\ \text{m}$$

c) Salvo para el único punto en el que la altura es máxima, en los demás hay dos valores de tiempo que satisfacen la altura considerada. En el caso de $y = 1$ (altura inicial), un valor es, obviamente, $t = 0$, y el otro lo obtendremos a partir de la ecuación de altura, haciendo $y = 1$ m:

$$1 = 1 + v_0t - 1/2\,gt^2 \Rightarrow t = 2\frac{v_0}{g} = 4{,}9\ \text{s}$$

26 **Un saltador de trampolín ejecuta un salto vertical en la piscina con una velocidad inicial de 5 m/s desde una altura de 5 m. ¿Cuánto tiempo tarda en llegar al agua? ¿Se te ocurre alguna explicación para el valor negativo del tiempo que aparece en la solución?**

Al llegar al agua, $y = 0$:

$$y = y_0 + v_0t - 1/2\,gt^2 = 0$$

Por tanto,

$$5 + 5t - 4{,}9t^2 = 0$$

Despejando el tiempo, obtenemos:

$$t = -1{,}6\ \text{s}$$

Esto sería el tiempo que tardaría en alcanzar la altura inicial si hubiese saltado desde el suelo con la velocidad adecuada para llevar la velocidad de 5 m/s al llegar a la altura de 5 m (desde donde inicia el salto real).

27 **PAU** **Una pelota de tenis es sacada horizontalmente desde 2,20 m de altura a una velocidad de 140 km/h. ¿A qué distancia horizontal caerá? ¿Qué velocidad llevará al tocar el suelo?**

El tiempo que tarda en llegar al suelo es el mismo que tardaría en caída libre:

$$y = y_0 - 1/2\,gt^2 = 0 \Rightarrow t = 0{,}67\ \text{s}$$

Por tanto, la distancia horizontal a la que caerá será:

$$x = v_0t = 26{,}0\ \text{m}$$

La velocidad que llevará al llegar al suelo tiene dos componentes:

$$v_x = v_0 = 38{,}9\ \text{m/s}$$

$$v_y = -gt = -6{,}5\ \text{m/s}$$

Es decir,

$$\vec{v} = 38{,}9\vec{i} - 6{,}5\vec{j}\ \text{m/s}$$

cuyo valor es $v = 39{,}4$ m/s.

28 **Deduce la ecuación de la trayectoria del saltador de longitud que relaciona *x* con *y*. Comprueba que se trata de la ecuación de una parábola. Emplea el mismo procedimiento que se desarrolló en la aplicación del lanzamiento horizontal.**

Las expresiones de partida son las señaladas en el texto, es decir:

$$x = v_0 \cos\alpha\ t$$

$$y = v_0 \operatorname{sen}\alpha\ t - 1/2\,gt^2$$

Despejando t en la primera y sustituyéndolo en la segunda, se obtiene:

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{1/2g\,x^2}{(v_0\cos\alpha)^2}$$

que es la ecuación de una parábola.

29 **Demuestra, de un modo similar a como se hacía en el lanzamiento vertical, que el valor de la velocidad en el punto de aterrizaje es igual al valor de la velocidad de lanzamiento. (Basta con demostrar que v_y en el punto de aterrizaje es igual a $-v_{0y}$).**

Una vez se haya tomado conciencia de que la componente vertical de un movimiento parabólico es idéntica en todos sus extremos a una caída libre, cualquiera de las demostraciones efectuadas hasta ahora para este tipo de movimientos sujetos exclusivamente a la aceleración de la gravedad es válida para este ejercicio.

30 **¿Con qué ángulo de despegue se consigue el mayor alcance si los demás factores se mantienen iguales?**

A partir de la expresión del alcance máximo, observamos que, a igualdad de los demás factores, este se produce con un ángulo de 45°, puesto que en ese caso sen $2\alpha = 1$, máximo valor que puede tomar el seno de un ángulo.

31 **La aceleración lunar es unas seis veces menor que la terrestre. En una de las misiones Apolo, un astronauta dedicó parte del tiempo a jugar al golf. Si con un golpe comunicó a la pelota una velocidad de 7 m/s con un ángulo de elevación de 40°, ¿a qué distancia cayó la bola?**

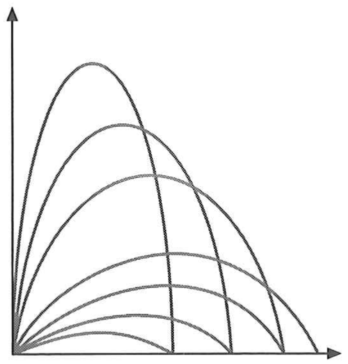
Usando la expresión del alcance máximo:

$$x_{máx} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g_{lunar}}$$

y dado que $g_{lunar} = g/6$, cabe concluir que el alcance en la luna es seis veces mayor que en la Tierra:

$$x_{máx} = \frac{6\,v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g} = 29{,}5\ \text{m}$$

32 **Comprueba, a partir de la expresión del alcance máximo, cómo puede lograrse un mismo alcance con dos ángulos distintos (suponiendo que permanezcan fijos los demás factores; figura 9.33). ¿Qué relación guardan esas parejas de ángulos?**



Las parejas de ángulos complementarios tienen el mismo valor de sen 2α. Por tanto, con cualquier pareja de ángulos complementarios se obtendrá el mismo alcance si las demás condiciones son iguales. Esta condición la cumplen, por ejemplo, los ángulos de 30° y 60°, o de 20° y 70°.

33 **¿Qué marca habría conseguido el mítico Bob Beamon si su salto hubiera tenido lugar en los áridos y pedregosos desiertos marcianos? Datos: marca de Bob Beamon en México (1968): 8,90 m; g_{Marte} = 3,6 m/s²**

Dado que el valor de g en Marte es 0,36 veces el valor de g en la Tierra, el alcance que se lograría en Marte sería 2,7 veces mayor que en la Tierra. Por tanto, la marca de Bob Beamon habría sido de 24,2 m.

34 **Para superar los 2,30 m de altura, un atleta salta con una velocidad de 5,1 m/s y un ángulo de 75°. Si su centro de gravedad está a 1,1 m del suelo, ¿se dan las condiciones para que pueda batir la marca?**

Tomando la ecuación 9.22 del *Libro del alumno* y teniendo en cuenta que se parte de una altura inicial de 1,1 m:

$$y_{máx} = y_0 + \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2g}$$

Sustituyendo:

$$y_{máx} = 1{,}1 + \frac{5{,}1^2 \operatorname{sen}^2 75}{2 \cdot 9{,}8} = 2{,}33\ \text{m}$$

Si el saltador, además de elevar su centro de gravedad a esa altura, no tropieza en su caída, tendremos que felicitarlo puesto que supera los 2,30 m anhelados.

35 **Una trainera avanza a contracorriente, mientras que un observador en reposo situado en la orilla mide su velocidad neta: 32 km/h. Sabemos que la velocidad de la corriente es de 8 km/h.**

a) **¿A qué velocidad avanzaría la trainera en aguas reposadas?**

b) **¿Qué velocidad neta mediría el observador de la orilla si la trainera avanzara a favor de la corriente?**

a) La velocidad neta que mide el observador en reposo en la orilla es la diferencia entre la velocidad de la trainera y la de la corriente. Es decir:

$$v_{neta} = v_{trainera} - v_{corriente} \Rightarrow v_{trainera} = 40\ \text{km/h}$$

que sería la velocidad a la que se movería en aguas en reposo.

b) Como es obvio, si avanzara a favor de la corriente, la velocidad neta sería ahora de 48 km/h.

36 **PAU** **Sabiendo que la Luna completa su órbita alrededor de la Tierra en 27,32 días (período sidéreo) y que su distancia media es de 384 000 km, ¿cuál es la aceleración centrípeta (gravitacional) que actúa sobre la órbita de este satélite?**

Si expresamos el período sidéreo en segundos, y la distancia media en metros, obtenemos:

$$T = 2\,360\,448\ \text{s}$$

$$r = 3{,}84 \cdot 10^8\ \text{m}$$

Por aplicación de la ecuación 9.31 del *Libro del alumno:*

$$a_c = \frac{4\pi^2}{T^2}\,r = 2{,}7 \cdot 10^{-3}\ \text{m/s}^2$$

Comentario de interés. Este cálculo llevó a Isaac Newton a pensar que la fuerza gravitacional decrecía conforme al inverso del cuadrado de la distancia. La razón es que la distancia media a la Luna es 60 veces mayor que el radio terrestre, mientras que la aceleración centrípeta de la Luna, dirigida hacia la Tierra, es 1/3 600 veces la aceleración en la superficie terrestre.

37 **La Tierra completa una vuelta alrededor del Sol en 365 días. Si la distancia media al Sol es de 149 600 000 km, calcula la velocidad angular orbital de la Tierra y su velocidad lineal.**

La velocidad angular orbital de la Tierra alrededor del Sol es:

$$\omega = 2\pi/T = 2 \cdot 10^{-7}\ \text{rad/s}$$

El valor de su velocidad lineal será:

$$v = \omega r = 29\,920\ \text{m/s}$$

Así pues, la «nave» Tierra nos lleva en su viaje alrededor del Sol a la nada despreciable velocidad de casi 30 000 m/s.

Cuestiones y problemas (páginas 250/253)

Gráficas de movimientos en una dimensión

1 **¿Qué son las ecuaciones del movimiento?**

Las ecuaciones de movimiento permiten conocer los valores de las magnitudes cinemáticas en función del tiempo.

2 **¿Qué representa el área encerrada bajo una gráfica velocidad- tiempo? ¿Por qué?**

Representa el desplazamiento efectuado; tal como se ve en la figura 9.7 (página 226 del *Libro del alumno*).

3 **Demuestra gráficamente la validez del teorema de la velocidad media sobre un diagrama velocidad-tiempo para un movimiento rectilíneo con aceleración constante.**

Véase la gráfica 9.14 del *Libro del alumno* (página 229).

4 **¿Qué representa la pendiente de la gráfica posición-tiempo de un movimiento con velocidad constante?**

Dicha pendiente representa la velocidad.

5 **¿Qué representa el área encerrada bajo una gráfica aceleración-tiempo?**

a) **El espacio recorrido.**

b) **La velocidad.**

c) **La variación de velocidad.**

La respuesta correcta es la *c)*.

6 **¿Cómo determinarías la velocidad en cada instante a partir de la gráfica posición-tiempo de un movimiento rectilíneo con aceleración constante?**

Determinando (matemáticamente o por métodos gráficos) la pendiente de la recta tangente a la gráfica en ese instante.

7 **Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 15 m/s. Representa sus gráficas del movimiento.**

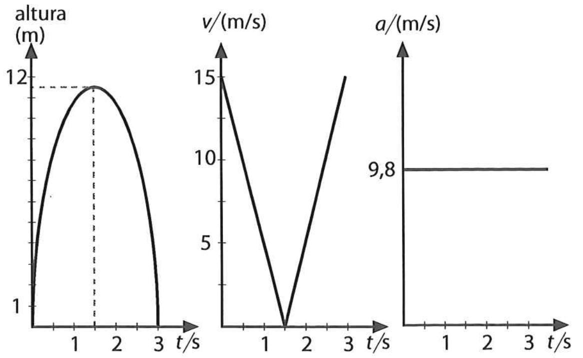
(En las gráficas posición-tiempo y velocidad-tiempo especifica al menos los tres puntos característicos: salida, altura máxima y aterrizaje).

La máxima altura es $y_{máx} = \dfrac{v_0^2}{2g} = 11{,}5$ m.

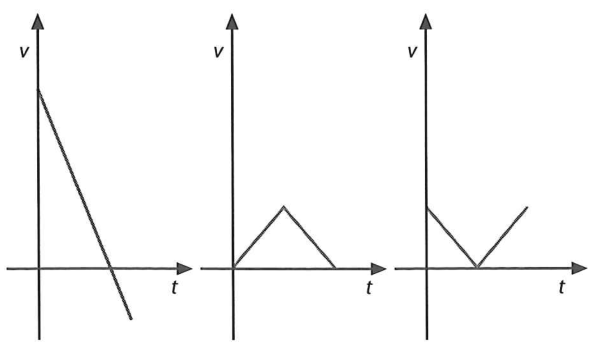
El tiempo que tarda en llegar a esa altura es $\dfrac{v_0}{g} = 1{,}5$ s.

El tiempo total de vuelo es 3,0 s.

Así, las gráficas son:



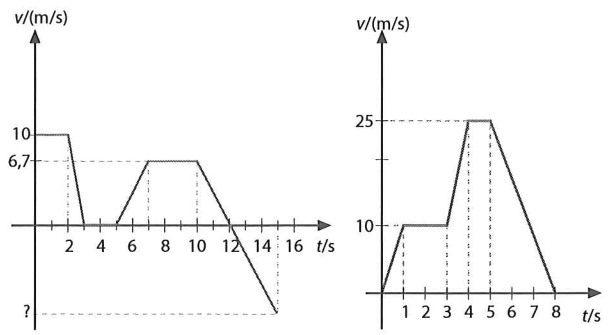
8 **¿Cuál de estas gráficas puede representar mejor la velocidad de una piedra que se lanza verticalmente hacia arriba y cae cuando alcanza su altura máxima?**



Teniendo en cuenta que las gráficas representan el módulo de la velocidad, la correcta es la tercera. Sin embargo, a la hora de resolver esta cuestión, es conveniente recalcar que, si lo que se representa es el vector velocidad, la gráfica no sería ascendente a partir del valor cero de velocidad (altura máxima), sino que seguiría en línea recta tomando valores negativos. Debemos recordar que los valores negativos solo indican sentido, pues el módulo es positivo por definición.

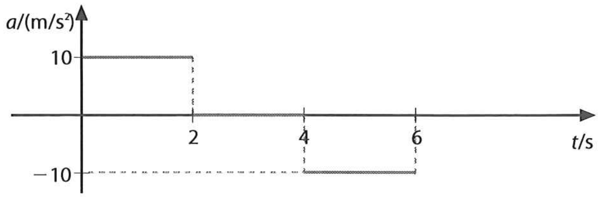
9 **Interpreta estas gráficas y calcula la velocidad, el espacio y la aceleración en cada etapa, así como el espacio total recorrido; representa la correspondiente gráfica de aceleración en cada caso:**

a) *b)*



Debemos tener en cuenta únicamente que en aquellos tramos en los que la gráfica *v-t* es una recta horizontal, las expresiones que hay que usar son las de un MRU, mientras que en los tramos en los que la gráfica muestra pendiente deben emplearse las expresiones del MRUA.

10 **Una partícula inicialmente en reposo es sometida a estas aceleraciones.**



Dibuja las gráficas *s-t* y *v-t*. Calcula el espacio máximo recorrido a los 6 s.

Entre 0 s y 2 s:

- $v_1 = a_1 t = 20$ m/s
- $s_1 = 1/2\, a_1 t^2 = 20$ m

Entre 2 s y 4 s:

- v permanece constante.
- $s_2 = vt = 40$ m

Entre 4 s y 6 s:

- $v_3 = v_1 - a_2 t = 0$ m/s
- $s_3 = v_1 t - 1/2\, a_2 t^2 = 20$ m

Así pues, el espacio total recorrido es de 80 m.

Movimientos en una dimensión

11 **Un movimiento que transcurre con velocidad constante puede ser:**

a) **Solamente rectilíneo uniforme.**

b) **Rectilíneo uniforme o circular uniforme.**

Razona la respuesta correcta.

La respuesta correcta es la *a)*. En el movimiento circular uniforme hay aceleración centrípeta.

12 **Las ecuaciones del movimiento tienen que ser congruentes con los resultados físicos. Si es así, las ecuaciones del movimiento rectilíneo con aceleración constante, llevadas al caso en que $a = 0$, deben dar lugar a las ecuaciones del movimiento con velocidad constante. Demuéstralo.**

Efectivamente, si en las ecuaciones del movimiento rectilíneo con aceleración constante hacemos $a = 0$, obtendremos las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniforme:

$$v = v_0 \pm at$$

Si $a = 0$, entonces $v = v_0$.

Es decir, la velocidad será constante e igual al valor inicial. Por otra parte:

$$x = x_0 \pm v_0 t \pm 1/2\, at^2$$

Si $a = 0$, entonces $x = x_0 \pm v_0 t$, que es la ecuación de posición en un movimiento rectilíneo y uniforme.

13 **PAU** **Un protón con una velocidad inicial de $2{,}3 \cdot 10^7$ m/s entra en una zona donde sufre una aceleración contraria constante de $1{,}3 \cdot 10^{15}$ m/s². ¿Qué distancia recorre hasta que se detiene?**

En el momento en que se detiene, su velocidad se hace cero. Si empleamos la expresión que nos relaciona las tres magnitudes cinemáticas (expresión 9.4), obtenemos:

$$s = \frac{v_0^2}{2a} = 0{,}203 \text{ m} = 20{,}3 \text{ cm}$$

D14 **Una persona está a punto de perder su tren. En un desesperado intento, corre a una velocidad constante de 6 m/s. Cuando está a 32 m de la última puerta del vagón de cola, el tren arranca con una aceleración constante de 0,5 m/s². ¿Logrará nuestro viajero aprovechar su billete o lo habrá perdido, junto con su tiempo y su aliento, en un infructuoso intento?**

Mientras el tren recorre una distancia x, el viajero debe recorrer la distancia $32 + x$. El movimiento del tren es acelerado partiendo del reposo, y el del viajero tiene velocidad constante. Así pues, sus ecuaciones de posición en función del tiempo son:

- Para el tren: $x = 1/2\, at^2$
- Para el viajero: $32 + x = vt$

Sustituyendo, obtenemos:

$$32 + 1/2\, at^2 = vt$$

Las soluciones de t obtenidas son 8 s y 16 s. Por tanto, logrará dar alcance al tren a los 8 s.

Movimientos acelerados en la naturaleza

15 **Tres objetos (A, B y C) cuyas masas valen 10, 3 y 5 kg, respectivamente, son lanzados verticalmente hacia arriba con la misma velocidad. Ordénalos según la altura alcanzada.**

Los tres alcanzan la misma altura, ya que la altura máxima no depende de la masa.

16 **Tres objetos (A, B y C) de masas 10, 3 y 5 kg, respectivamente, son lanzados verticalmente hacia abajo desde cierta altura con la misma velocidad. Ordénalos por orden de llegada al suelo.**

Los tres cuerpos llegan al suelo con la misma velocidad, puesto que son lanzados con la misma velocidad y desde la misma altura.

17 **¿Ha aparecido la masa en alguna de las ecuaciones de los movimientos acelerados en la superficie terrestre? Razona la respuesta.**

No ha aparecido la masa, pues la aceleración de la gravedad es la misma independientemente de la masa del cuerpo en movimiento.

18 **¿Cómo quedaría la expresión $v^2 = v_0^2 - 2a\,(x - x_0)$ en un caso de caída libre?**

En el caso de la caída libre, la velocidad inicial es cero, y el desplazamiento $(x = x_0)$ equivale a la altura descendida, mientras que el valor de a sería g. En esas condiciones, la velocidad de caída libre de un cuerpo se puede expresar en función de la altura descendida.

Si el observador es el que deja caer el cuerpo:

$$v^2 = 2\,gy$$

Si el sistema de referencia se sitúa en el suelo, la ecuación sería:

$$v^2 = 2\,(-g)\,(y - y_0) = 2\,g\,(y_0 - y)$$

Puesto que $y_0 - y$ equivale a la altura descendida, comprobamos que desde ambos puntos de vista se obtiene el mismo resultado.

19 **Una persona que está a cierta altura sobre el suelo tira una pelota hacia arriba con una velocidad v_0 y después arroja otra hacia abajo con una velocidad $-v_0$. ¿Cuál de las dos pelotas tendrá mayor velocidad al llegar al suelo?**

Las dos llegarán al suelo con la misma velocidad. Para demostrarlo, basta con comprobar que la velocidad de la pelota que se ha tirado hacia arriba es igual a $-v_0$ cuando vuelve a pasar por el punto de lanzamiento. Dado que el tiempo que emplea desde que sale hasta que vuelve a pasar por el punto de lanzamiento es $t = \dfrac{2v_0}{g}$, su velocidad en ese instante será:

$$v = v_0 - gt = v_0 - g\,\frac{2v_0}{g} = v_0 - 2v_0 = -v_0$$

Por tanto, dado que ambas pelotas tienen la misma velocidad descendente en el mismo punto, llegarán al suelo con la misma velocidad.

20 **PAU** **Se lanzan en sentido vertical hacia arriba dos cuerpos de masa *m* y *3m*, respectivamente, con la misma velocidad inicial, v_0. Razona cómo son comparativamente sus alturas máximas y los tiempos que tardan en volver a caer.**

Las alturas máximas que alcanzan los cuerpos lanzados verticalmente vienen dadas por:

$$y_{máx} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Queda claro que en la expresión no aparece involucrada la masa de los cuerpos, pues el valor de g solo depende de la masa de la Tierra y no de los cuerpos. En consecuencia, a igualdad de velocidad inicial, los cuerpos alcanzarán la misma altura y tardarán el mismo tiempo en volver a caer.

21 **Trata de razonar cómo afectaría la resistencia del aire a un lanzamiento vertical hacia arriba. ¿Tardaría el objeto lanzado más, menos o el mismo tiempo en ascender que en descender? La velocidad con que llega al suelo, ¿sería mayor, menor o igual que la del lanzamiento? Demuéstralo.**

En el movimiento de ascenso, tanto el peso como la fuerza de fricción se oponen al movimiento, por lo que la «deceleración» contraria al ascenso es mayor. En consecuencia, tarda menos en ascender hasta la máxima altura que luego en descender desde la altura máxima hasta el suelo; en este caso, la aceleración de descenso es la resultante de g menos la deceleración causada por la fricción.

Como la aceleración de descenso es menor que g, el valor de su velocidad al llegar al suelo será menor que la velocidad con que se lanzó.

22 **PAU** **¿Cuál es la profundidad de un pozo si el impacto de una piedra se escucha al cabo de 1,5 s después de haberla dejado caer? Dato: $v_{sonido} = 340$ m/s**

Debemos distinguir dos movimientos en el problema: la caída de la piedra, que tarda un tiempo t en llegar al fondo, y el movimiento de propagación ascendente del sonido (uniforme), que tarda un tiempo en llegar a nuestros oídos, t', recorriendo para ello la misma distancia, h (profundidad del pozo). Es decir:

$$t + t' = 1{,}5 \text{ s}$$

La altura descendida por la piedra es $h = 1/2\, gt^2$ (caída libre).

La altura ascendida por el sonido es $h = v_{son}t'$ (MRU).

Como ambas alturas son iguales, entonces:

$$v_{son}t' = 1/2\, gt^2$$

Teniendo presente la relación entre ambos tiempos, podemos escribir:

$$v_{son}\,(1{,}5 - t) = 1/2\, gt^2$$

Despejando t, se obtiene:

$$t = 1{,}44\ \text{s}$$

Llevando este valor a la ecuación de altura, obtenemos la profundidad del pozo:

$$h = 18{,}4\ \text{m}$$

23 Observa la siguiente contradicción: un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/s se encontrará a 15 m al cabo de 3 s (compruébalo, considerando $g = 10\ \text{m/s}^2$). Si ahora deseamos que alcance la misma altura, pero en la mitad de tiempo, nuestro sentido común nos dice que deberemos lanzarlo con mayor velocidad. Pero... ¿por qué no calculas cuál debe ser esa velocidad? ¿No te sugiere el resultado obtenido aquello de «quien va despacio llega lejos»? ¿Nos engañan las ecuaciones?

Efectivamente, la velocidad así calculada sería de 17,5 m/s. Sin embargo, si ahora nos planteamos el problema a la inversa, es decir, si calculamos los tiempos correspondientes a una altura de 15 m para los valores de velocidad dados, descubriremos la «trampa» de la pregunta.

Si en la ecuación $y = v_0t - 1/2\, gt^2$ introducimos ahora la altura de 15 m y si calculamos los tiempos usando las velocidades iniciales de 20 m/s y 17,5 m/s, obtenemos:

$$\text{para } v_0 = 20\ \text{m/s} \Rightarrow t_1 = 1\ \text{s};\ t_2 = 3\ \text{s}$$

$$\text{para } v_0 = 17{,}5\ \text{m/s} \Rightarrow t_1 = 1{,}5\ \text{s};\ t_2 = 2\ \text{s}$$

¡Ahora todo encaja! En el primer caso, se había elegido el tiempo que pasa por esa altura, pero en descenso. Sin embargo, en el ascenso pasa por esa altura al cabo de 1 s, es decir, tarda menos en llegar a la misma altura al ser lanzado con mayor velocidad.

D 24 Desde igual altura y al mismo tiempo se lanzan dos objetos con idéntica velocidad inicial: uno hacia arriba y otro hacia abajo. Si el primero tarda 5 s más en llegar al suelo, ¿con qué velocidad fueron lanzados?

Si los dos objetos tienen el mismo valor de velocidad inicial en el punto de partida y el primero cae 5 s después que el segundo, entonces el primero ha tardado 5 s en completar el movimiento de ascenso y descenso hasta volver a pasar por el punto de partida, ya que en este momento tendrá la misma velocidad que el que se lanzó hacia abajo. Por tanto, si consideramos únicamente ese tramo de ascenso-descenso, y dado que el tiempo total que tarda en completarlo es de 5 s, resulta:

$$t = \frac{2v_0}{g} = 5\ \text{s}$$

de donde se obtiene que:

$$v_0 = 24{,}5\ \text{m/s}$$

D 25 PAU Si lanzas una pelota verticalmente hacia arriba, estando tu mano a 1,4 m de altura en el instante en que la pelota despega, y cae al suelo al cabo de 4,5 s.

***a)* ¿Qué velocidad comunicaste a la pelota?**

***b)* ¿A qué altura ascendió?**

a) Una vez que cae al suelo, su altura es cero. Dado que se trata de un problema de lanzamiento vertical desde una altura inicial, usamos las expresiones pertinentes de dicho movimiento. Haciendo cero la altura, obtenemos la velocidad inicial del lanzamiento:

$$y = y_0 + v_0t - 1/2\, gt^2 = 0$$

$$1{,}4 + v_0 \cdot 4{,}5 - 1/2 \cdot 9{,}8 \cdot 4{,}5^2 = 0$$

De donde se obtiene, despejando, $v_0 = 21{,}7$ m/s.

b) En la máxima altura, la velocidad se hace instantáneamente cero, lo que permite obtener el tiempo transcurrido hasta que eso sucede:

$$v = v_0 - gt = 0 \Rightarrow t_{y\,\text{máx}} = 2{,}2\ \text{s}$$

que sustituido en la expresión de altura considerada anteriormente, conduce a un valor de altura máxima: $y = 25{,}4$ m.

26 PAU Una bola se deja caer desde 10 m de altura y tras rebotar en el suelo asciende hasta 6,5 m. Determina con qué velocidad llega al suelo y con qué velocidad sale tras el primer rebote.

De las ecuaciones generales del movimiento se obtiene que para una caída libre:

$$v = \sqrt{2gh}$$

Sustituimos los datos:

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 10} = 14\ \text{m/s}$$

Para el ascenso usamos la misma ecuación:

$$v' = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 6{,}5} = 11{,}3\ \text{m/s}$$

27 Un individuo situado a 60 m sobre el suelo ve subir —y pasar por delante de él— un cuerpo lanzado desde abajo y 8 s después lo ve bajar; ¿con qué velocidad fue lanzado?

Si consideramos el tramo de movimiento que transcurre desde que el cuerpo pasa en ascenso delante del individuo hasta que vuelve a pasar, pero en descenso, podemos calcular qué velocidad lleva en esa altura. Para ello, lo consideraremos como un lanzamiento vertical que tarda 8 s en volver a caer. Como ese tiempo es:

$$t = \frac{2v}{g} \Rightarrow v = \frac{tg}{2} = 39{,}2\ \text{m/s}$$

Es decir, cuando alcanza los 60 m, tiene una velocidad de 39,2 m/s. Ello nos permite calcular la velocidad con que fue lanzado, usando la expresión:

$$v^2 = v_0^2 - 2\,gy \Rightarrow v_0^2 = v^2 + 2\,gy$$

Obtenemos, así, $v_0 = 52{,}08$ m/s.

28 PAU Se lanza un objeto verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/s y 1 segundo después se lanza otro con la misma velocidad inicial. ¿A qué altura se cruzarán y cuánto tiempo habrá transcurrido en ese instante desde que se lanzó el primero?

Si llamamos y a la altura a la que se cruzan, para el primer cuerpo:

$$y = v_0t - 1/2\, gt^2 \Rightarrow y = 20t - 1/2 \cdot 9{,}8\, t^2$$

para el segundo cuerpo, la altura será, lógicamente, la misma pero el tiempo será de $(t - 1)$, luego:

$$y = 20\,(t - 1) - 1/2 \cdot 9{,}8\,(t - 1)^2$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones obtenemos:

$$y = 19{,}2\ \text{m};\ t = 2{,}54\ \text{s}$$

Movimientos en dos dimensiones

29 ¿Cómo pueden considerarse los movimientos parabólicos?

Como composición de dos movimientos.

30 Tres objetos (A, B y C) de masas 10, 3 y 5 kg, respectivamente, son lanzados horizontalmente con la misma velocidad. Ordénalos según su alcance. Razona la respuesta.

Todos alcanzan la misma distancia horizontal, debido a que el alcance máximo no depende de la masa.

31 Siguiendo con la congruencia de las ecuaciones, demuestra que las expresiones que permiten calcular *a)* la altura máxima, *b)* el tiempo que tarda en alcanzar esa altura máxima y *c)* el tiempo de vuelo de un movimiento parabólico coinciden con las de un lanzamiento vertical si se considera $\alpha = 90°$.

a) La expresión de altura máxima en los movimientos parabólicos viene dada por:

$$y_{\text{máx}} = \frac{v_0^2\,\text{sen}^2\,\alpha}{2g}$$

Si $\alpha = 90°$, entonces $\text{sen}^2\,\alpha = 1$, por lo que obtendríamos la expresión de máxima altura de un lanzamiento vertical, que es:

$$y_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{2g}$$

b) El tiempo que se tarda en alcanzar la máxima altura, en un movimiento parabólico, viene dado por:

$$t = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0\,\text{sen}\,\alpha}{g}$$

Si el ángulo es de 90°, resulta la expresión correspondiente al lanzamiento vertical:

$$t = \frac{v_0}{g}$$

c) En el caso del tiempo que se tarda en llegar al suelo, ocurre exactamente lo mismo que en el caso ***b)***, con la diferencia de que el tiempo de vuelo es el doble que el que se tarda en alcanzar la máxima altura.

32 Un objeto de 5 kg de masa se deja caer desde cierta altura. A la vez, y desde la misma altura, otros dos objetos, uno de 3 kg y otro de 10 kg, son lanzados en sentido horizontal con velocidades de 5 y 15 m/s, respectivamente. ¿Sabrías ordenar los cuerpos por orden de llegada al suelo?

El objetivo de esta cuestión es incidir en las consecuencias que se derivan de considerar los movimientos parabólicos (en este caso el lanzamiento horizontal) como una composición de movimientos. De la idea de la composición se desprende que el tiempo que tardan en llegar al suelo es el mismo, pues es el mismo que tardarían en llegar cayendo libremente (conviene ilustrar la cuestión haciendo referencia a la figura 9.27). Por tanto, los valores de masas o velocidades iniciales horizontales carecen de relevancia.

33 Desde un avión que vuela horizontalmente con una velocidad v se lanza un objeto hacia atrás con una velocidad horizontal $-v$. Explica el movimiento de dicho objeto visto por un observador que viaje en el avión y por otro que se halle en reposo en tierra.

El observador del avión vería salir el objeto con una velocidad horizontal igual a $-v$. Describiría, pues, un lanzamiento horizontal con esa velocidad inicial. Sin embargo, para el observador en tierra, el objeto habría sido abandonado en reposo, y, por tanto, lo vería caer libremente.

34 ¿Cómo podrías determinar la altura de un cerro disponiendo solo de un reloj y las piedras del suelo?

Lanzaríamos la piedra horizontalmente, de modo que llegase hasta la base del cerro. Con el reloj cronometraríamos el tiempo de caída, que, por composición de movimientos, sería el mismo que el que invertiría en descender la altura del cerro en caída libre. De ese modo, la altura será:

$$h = 1/2\, gt^2$$

35 ¿Con qué ángulo deberíamos saltar para que la altura y el alcance fuesen iguales?

Debe cumplirse que:

$$x_{\text{máx}} = y_{\text{máx}} \Rightarrow \frac{v_0^2\,\text{sen}\,2\alpha}{g} = \frac{v_0^2\,\text{sen}\,2\alpha}{2g}$$

De esta igualdad se desprende que:

$$2\,\text{sen}\,2\alpha = \text{sen}^2\alpha$$

Desarrollándola obtendremos:

$$4\,\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha = \text{sen}^2\,\alpha$$

Esto nos conduce como solución a:

$$\text{tg}\,\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 76°$$

36 Si fueras entrenador de atletismo, y teniendo en cuenta que un mismo alcance se puede lograr con dos ángulos distintos, ¿cuál de los dos ángulos recomendarías a un saltador de longitud, el mayor o el menor? ¿Por qué?

El menor, ya que debemos tener en cuenta que la velocidad de despegue debe ser la misma. Sin embargo, es más fácil lograr una velocidad mayor con un ángulo de inclinación menor, pues su valor vendrá marcado fundamentalmente por la velocidad de carrera (v_{0x}), aspecto que nos es más fácil controlar. Por el contrario, si deseamos lograr esa misma velocidad de despegue con un ángulo mayor, debemos conseguir un gran impulso más vertical (aumentar v_{0y}), para lo que hemos de vencer nuestro propio peso.

37 ¿En qué punto de una trayectoria parabólica es menor la velocidad? ¿Por qué?

En el punto de altura máxima, pues en todos los puntos la velocidad resulta de componer la velocidad de avance (v_{0x} constante) con la velocidad de ascenso-descenso (v_y variable). Sin embargo, en el punto de máxima altura, la única componente que actúa es v_{0x}.

38 Un niño sentado en un vagón de tren que viaja a velocidad constante lanza hacia arriba una pelotita. ¿Cuál de las tres escenas siguientes tendrá lugar?

***a)* La pelotita cae sobre los ocupantes del asiento de delante.**

***b)* Golpea en el periódico del viajero de atrás.**

***c)* La pelota vuelve a caer en las manos del pequeño, para alivio de los demás pasajeros.**

La opción correcta es la ***c)***, pues la pelota, al ser lanzada, lleva la velocidad horizontal del tren. En consecuencia, su movimiento es la composición del movimiento de lanzamiento vertical y del movimiento del tren. Así pues, cuando caiga, habrá recorrido la misma distancia horizontal que el tren y el niño.

39 ¿Qué ocurrirá en el caso de la actividad anterior si el tren frena en el instante del lanzamiento? ¿Y si acelera? ¿Y si gira a la izquierda?

Si el tren frenara, la pelota caería sobre los ocupantes del asiento delantero. Si acelerara, caería sobre los ocupantes del asiento trasero. Si girara a la izquierda, caería a la derecha.

40 ¿Cómo podríamos calcular, sirviéndonos de una regla, la velocidad de caída (damos por supuesto que vertical) de las gotas de lluvia por el trazo oblicuo que dejan en las ventanillas laterales de un vehículo que se mueve con velocidad conocida?

El trazo oblicuo que dejan surge de componer la velocidad propia de caída y la velocidad de movimiento del vehículo. Así pues, el trazo oblicuo es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos horizontal y vertical representan, respectivamente, la velocidad del coche y la velocidad de caída de la gota. De este modo, midiendo con la regla los trazos y los catetos, y conociendo la equivalencia entre la velocidad del coche y la longitud del cateto horizontal, es posible deducir a partir del valor del cateto vertical a qué velocidad corresponde.

41 **A menudo se argumenta que la altitud de un lugar favorece el logro de marcas en saltos de longitud, como le ocurrió al legendario Bob Beamon, con sus 8,90 m, en las olimpiadas de México de 1968. ¿Qué factores relacionados con la altitud crees que pueden afectar al salto?**

Una menor presión atmosférica y, en consecuencia, una menor densidad del aire que haría disminuir la fricción, así como un valor de g ligeramente menor, que permitiría un mayor salto. Sin embargo, en descargo del legendario Bob Beamon cabe decir que ha habido más pruebas de atletismo en lugares como México u otros de similar o mayor altitud, y no se han batido marcas como la suya.

42 **Un movimiento parabólico norte-sur de largo alcance en la superficie terrestre ¿es realmente un movimiento plano? Razona tu respuesta.**

No, pues a la velocidad de lanzamiento en dirección norte-sur hay que añadir la correspondiente a la rotación de la Tierra en sentido oeste-este. En consecuencia, si consideramos que el plano de movimiento es el plano del meridiano del lugar de lanzamiento, resulta evidente que el objeto no cae en el mismo meridiano.

43 **¿Qué velocidad comunica la pértiga a un saltador que bate una marca de 6,04 m si el ángulo de despegue es de 82°?**

La marca es la máxima altura que alcanza. Por tanto, a partir $y_{máx} = \dfrac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$ obtenemos que la velocidad que la pértiga comunica al saltador, v_0, es 10,98 m/s.

44 **Un intrépido motorista pretende saltar una fila de camiones dispuestos a lo largo de 45 m. La rampa de despegue es de 20° y pretende aterrizar en otra rampa similar de la misma altura. Si en el momento del despegue su velocímetro marcaba 90 km/h, ¿cuál es el futuro inmediato de nuestro intrépido héroe: la gloria o el hospital? Demuéstralo.**

Si determinamos el alcance que logrará a partir de la expresión $x_{máx} = v_0 \operatorname{sen} 2\alpha/g$, vemos que aterrizará a 41 m, por lo cual su futuro inmediato será el hospital.

45 **Un experto lanzador «a balón parado» se dispone a ejecutar el saque de una falta desde una distancia de 20 m con respecto a la portería. La barrera de jugadores contrarios está a 9 m y su altura media es de 1,80 m. La velocidad de salida en dirección a puerta del balón, que forma 15° con el suelo, es de 90 km/h.**

a) **¿Será gol?**

b) **¿Y si los de la barrera, temiendo el balonazo, se agachan?**

a) Con los datos ofrecidos, lo primero que debemos determinar es si al recorrer los 9 m que le separan de la barrera, el balón tendrá altura suficiente para superar la de los jugadores. Las componentes horizontal y vertical de la velocidad inicial, en m/s, son:

$$v_{0x} = 25 \cdot \cos 15° = 24{,}15 \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = 25 \cdot \operatorname{sen} 15° = 6{,}47 \text{ m/s}$$

El tiempo que tarda el balón en recorrer la distancia de 9 m lo podemos deducir a partir de:

$$x = v_{0x}t \Rightarrow t = 0{,}37 \text{ s}$$

La altura que llevará el balón se calcula a partir de la expresión $y = v_{0y}t - 1/2\, gt^2$; en el tiempo indicado es de 1,72 m. Por tanto, no superará la barrera.

b) Suponiendo que la barrera no ha servido para nada, podemos repetir el procedimiento, ahora en el caso en que $x = 20$ m. Obtenemos, de ese modo, que el tiempo que tardaría el balón en alcanzar la portería es de 0,83 s. Si calculamos la altura correspondiente a ese tiempo usando la expresión anterior, obtenemos que es de 1,99 m, es decir, por debajo del larguero. Por tanto, es gol.

46 **Viajando en coche a 54 km/h, bajo un aguacero y en ausencia de viento, observamos que las gotas de lluvia dejan unas trazas de 4 cm de largo que forma 60° con la vertical en las ventanillas laterales. ¿Cuál es la velocidad de caída de las gotas de agua?**

Usaremos el procedimiento explicado en ejercicios anteriores. La componente horizontal del trazo, producida por el movimiento del coche, mide $4 \cdot \operatorname{sen} 60° = 3{,}46$ cm, mientras que la componente vertical, que corresponde a la caída de la gota, mide $4 \cdot \cos 60° = 2$ cm. Como el trazo de 3,46 cm corresponde a una velocidad de 54 km/h, por una simple proporcionalidad obtenemos la velocidad de caída de las gotas:

$$v_{caída} = \frac{54 \text{ km/h} \cdot 2 \text{ cm}}{3{,}46 \text{ cm}} = 31{,}17 \text{ km/h}$$

47 **Una persona salta en caída libre desde un helicóptero que vuela a 90 km/h y a 30 m de altura. Debe caer sobre unas colchonetas a bordo de un barco que viaja a 54 km/h en su mismo sentido. ¿A qué distancia horizontal debe estar el barco en el momento del salto? ¿Y si se mueven en sentidos opuestos?**

La persona que salta está dotada de la velocidad del helicóptero y, por tanto, recorrerá la misma distancia horizontal que este en el mismo tiempo. Como la velocidad del barco es menor, mientras este recorre la distancia x, la persona (y el helicóptero) recorrerán la distancia horizontal $d + x$, donde d es la distancia que nos pide el problema. Por tanto, en el tiempo t:

- Distancia recorrida por el barco: $x = v_{barco}t = 15t$
- Distancia recorrida por la persona: $d + x = v_{hel}t = 25t$

Por consiguiente: $d + 15t = 25t$.

Dado que el tiempo que tarda en caer al barco es el mismo que tardaría en caída libre:

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = 2{,}47 \text{ s}$$

Sustituyendo este valor de tiempo, obtenemos que:

$$d = 24{,}74 \text{ m}$$

Si se mueven en sentidos opuestos el barco se debe encontrar a 98,8 m.

D48 **Una partícula, localizada inicialmente en el origen, tiene una aceleración de $3\vec{j}$ m/s² y una velocidad inicial de $5\vec{i}$ m/s.**

a) **¿Qué tipo de movimiento describe?**

b) **Expresa los vectores de posición y velocidad en función del tiempo.**

c) **Calcula el desplazamiento y el módulo de su velocidad a los 2 s.**

a) Es parabólico, pues a la velocidad inicial en la dirección X habrá que componer la velocidad en aumento que adquiere en la dirección Y, debido a la aceleración que actúa en dicha dirección.

b) Las componentes x e y del vector de posición vienen dadas, en función del tiempo, por:

$$x = v_0t = 5t \text{ m}$$

$$y = 1/2\, at^2 = 1{,}5t^2 \text{ m}$$

Por tanto, el vector de posición será:

$$\vec{r} = 5t\vec{i} + 1{,}5t^2\vec{j} \text{ m}$$

Derivando el vector de posición, obtenemos el vector velocidad:

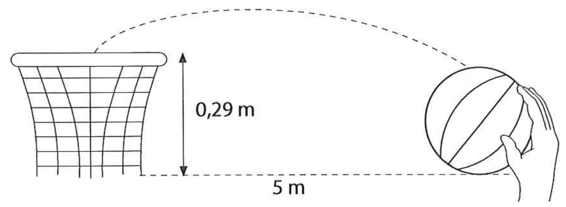
$$\vec{v} = 5\vec{i} + 3t\vec{j} \text{ m/s}$$

c) El desplazamiento a los 2 s será $\Delta\vec{r} = \vec{r}(2) - \vec{r}(0) = 10\vec{i} + 6\vec{j}$ m. Su módulo es 11,66 m.

La velocidad de la partícula a los 2 s es $\vec{v} = 5\vec{i} + 6\vec{j}$ m/s, siendo su módulo igual a 7,81 m/s.

49 **Dos equipos de baloncesto se encuentran empatados a puntos; quedan breves instantes para que finalice el partido y de repente un jugador lanza el balón a canasta con una velocidad inicial de 8 m/s y formando un ángulo con la horizontal de 30°. La canasta está a 3 m de altura sobre un punto que dista del jugador 5 m. Indica si su equipo ha ganado el partido, sabiendo que el jugador, con los brazos estirados, lanzó el balón desde una altura de 2,71 m.**

El siguiente dibujo ilustra la situación descrita en el enunciado: la canasta queda 0,29 m por encima del punto de lanzamiento y a una distancia horizontal de 5 m. Por tanto, se trataría de determinar el tiempo que tarda en estar a 0,29 m de altura, pero en el movimiento de descenso de la parábola, que es como entran las canastas. Calculado dicho tiempo, hallaremos a qué distancia horizontal se encuentra la pelota en ese momento; si resulta ser de 5 m más o menos, se habrá hecho canasta.



$$y = v_{0y}t - 1/2\, gt^2$$

$$0{,}29 = 8 \cdot \operatorname{sen} 30° \cdot t - 4{,}9\, t^2$$

Despejando t de descenso (el mayor de los valores), obtenemos $t = 0{,}73$ s. Calculando ahora la distancia horizontal:

$$x = v_{0x}t = 8 \cdot \cos 30° \cdot 0{,}73 = 5{,}05 \text{ m}$$

Es decir… ¡canasta!

Movimientos circulares

50 **¿Tienen todos los puntos de un disco que gira la misma velocidad angular? ¿Y lineal?**

La velocidad angular es la misma, mientras que la lineal varía dependiendo del radio.

51 **Si la velocidad angular de un cuerpo que gira se triplica, ¿qué le ocurre a su aceleración centrípeta?**

Se hace nueve veces mayor.

52 **¿Por qué los *sprinters* del ciclismo llevan un piñón muy pequeño, además de los habituales? Explica su fundamento físico.**

La velocidad lineal a la que gira el piñón es la misma que la velocidad lineal a la que gira el plato grande que usan estos ciclistas, debido a que están unidos por la misma cadena. Sin embargo, el pequeño radio del piñón hace que gire a una gran velocidad angular, pues $\omega = v/r$. Como el movimiento de la rueda trasera está ligado al movimiento del piñón, conseguirán una gran velocidad.

D53 **Las ruedas traseras de un tractor son de mayor radio que las delanteras. Cuando el tractor está en movimiento, ¿qué ruedas tienen mayor velocidad lineal? ¿Y mayor velocidad angular? ¿Y mayor período? ¿Y mayor frecuencia? Razona tus respuestas.**

La velocidad lineal de ambas ruedas es la misma, pues ambas recorren, como es lógico, el mismo espacio en el movimiento conjunto del tractor. Sin embargo, de la igualdad $v = \omega r$ se desprende que la de menor radio (la pequeña o delantera) gira con mayor velocidad angular y da más vueltas para recorrer el mismo espacio. Por tanto, como: $T = 2\pi/\omega$ su período será menor y su frecuencia de giro mayor.

54 **PAU** **Un tractor tiene unas ruedas delanteras de 30 cm de radio, mientras que el radio de las traseras es de 1 m. ¿Cuántas vueltas habrán dado las ruedas traseras cuando las delanteras hayan completado 15 vueltas?**

Como la velocidad lineal a la que se desplazan ambas ruedas es la misma, se cumplirá que:

$$\omega_1 r = \omega_2 R$$

donde r y R son los radios de la rueda menor y mayor, respectivamente. La igualdad anterior puede expresarse en función del ángulo girado o número de vueltas, de modo que:

$$\frac{\theta_1 \cdot r}{t} = \frac{\theta_2 \cdot R}{t}$$

Por tanto:

$$\theta_2 = \theta_1 \frac{r}{R}$$

Al introducir los datos, se comprueba que las ruedas traseras han dado 4,5 vueltas.

55 **Una cinta magnetofónica de 90 min de duración total tiene al inicio una rueda libre cuyo radio es de 1,2 cm y otra que, con toda la cinta arrollada, tiene un radio de 2,5 cm. Al comenzar la audición, la rueda pequeña da 7 vueltas en 10 s. ¿Cuál es su velocidad angular? ¿Y su velocidad lineal? ¿Cuál es la velocidad angular de la rueda grande? ¿Cuántas vueltas habrá dado en los 10 s iniciales? ¿Qué magnitud permanece constante a lo largo de la audición? ¿Cuánto mide una cinta de 90 minutos?**

La rueda pequeña da 0,7 vueltas cada segundo, por lo que su velocidad angular es:

$$\omega = 0{,}7 \cdot 2\pi = 4{,}39 \text{ rad/s}$$

Su velocidad lineal es:

$$v = \omega r = 5{,}27 \text{ cm/s}$$

Dado que la velocidad lineal de ambas ruedas es la misma, pues la cinta es inextensible:

$$\omega_1 r = \omega_2 R \Rightarrow \omega_2 = 2{,}11 \text{ rad/s}$$

El ángulo que habrá girado dicha rueda en 10 s será:

$$\theta = \omega_2 t = 21{,}11 \text{ rad}$$

que corresponde a 3,35 vueltas.

La magnitud cuyo valor permanece constante en el transcurso de la audición de la cinta es la velocidad lineal.

En cuanto a lo que mide la cinta, hemos de tener en cuenta que cada cara dura 45 min, es decir, 2 700 s. Puesto que la velocidad lineal es de 5,27 cm/s, la longitud total de la cinta será de:

$$l = vt = 142{,}3 \text{ m}$$

D56 PAU **Una rueda de 0,5 m de radio gira con un período de 0,6 s. Determina la aceleración centrípeta de los puntos de su periferia.**

Recordamos que la aceleración centrípeta, $a_c = \frac{v^2}{R}$; por otro lado, la velocidad angular, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, donde T es el período.

Por último, la velocidad lineal de cualquier punto en un movimiento circular es $v = \omega R$.

Con todos estos datos

$$a_c = \frac{\left(\frac{2\pi}{T} \cdot R\right)^2}{R}$$, y sustituyendo obtenemos $a_c = 54{,}8\ \text{m/s}^2$

D57 **Un ciclista marcha con su bici de montaña, cuyas ruedas tienen un diámetro de 26 pulgadas, a una velocidad constante de 25 km/h. ¿Cuántas vueltas habrán dado sus ruedas en 15 minutos? ¿Cuál es el radio de dichas ruedas? ¿Qué velocidad angular llevan? ¿Cuál es su período y su frecuencia mientras giran de esa manera?**

Dato: 1 pulgada = 2,54 cm

Como una pulgada son 2,54 cm, el diámetro de la rueda es de 66,04 cm, por lo que la longitud de la rueda es de 207,5 cm o 2,075 m.

Marchando a la velocidad dada de 6,94 m/s, la distancia recorrida por las ruedas al cabo de 15 min será de:

$$d = vt = 6250\ \text{m} = 6{,}25\ \text{km}$$

Puesto que en cada vuelta las ruedas recorren 2,075 m, en esos 15 min habrán efectuado 3 012,5 vueltas.

El radio de las ruedas es de 33,02 cm, y su velocidad angular es:

$$\omega = \frac{v}{r} = 21{,}03\ \text{rad/s}$$

Por consiguiente, su período es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}29\ \text{s}$$

Dado que la frecuencia es la inversa del período, su valor es $3{,}34\ \text{s}^{-1}$.

D58 PAU **Por la periferia de una pista circular parten a la vez, del mismo punto y en direcciones opuestas, dos móviles con velocidades de 4 rpm y 1,5 rpm, respectivamente. ¿En qué punto se encontrarán y qué tiempo habrá transcurrido?**

Al cabo de un tiempo, t, un móvil habrá descrito un ángulo θ, mientras que el otro habrá descrito un ángulo $2\pi - \theta$, por lo que:

$$\theta = \omega_1 t = 4\,(2\pi/60)\,t = (8\pi/60)\,t\ \text{rad}$$

$$2\pi - \theta = 1{,}5\,(2\pi/60)\,t = (3\pi/60)\,t\ \text{rad}$$

Sustituyendo la primera igualdad en la segunda, y despejando el tiempo, se obtiene:

$$t = 10{,}9\ \text{s}$$

Llevando este valor a la primera ecuación, observamos que el punto de encuentro es aquel en el que $\theta = 4{,}57$ rad o 262°.

D59 **Un cuerpo que describe círculos de 10 cm de radio está sometido a una aceleración centrípeta cuyo módulo constante en cm/s² es, numéricamente, el doble del módulo de su velocidad lineal expresada en cm/s. Determina los módulos, direcciones y sentidos de los vectores $\vec{a}_c$, $\vec{v}$ y $\vec{\omega}$ y el número de vueltas que dará el móvil en 1 min.**

La condición expuesta en el enunciado es que:

$$a_c = 2v \Rightarrow v = \frac{a_c}{2}$$

A su vez:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{a_c^2}{4r}$$

Por tanto:

$$a_c = 4r = 40\ \text{cm/s}^2$$

En consecuencia, $v = 20$ cm/s.

Como $\omega = \frac{v}{r}$, entonces:

$$\omega = 2\ \text{rad/s}$$

A su vez, para calcular el número de vueltas que dará en 1 min, se halla el ángulo descrito:

$$\theta = \omega t = 120\ \text{rad} = 19\ \text{vueltas}$$

La $\vec{a}_c$ está dirigida hacia el centro de la circunferencia, y $\vec{v}$ tiene dirección tangencial, con sentido horario o antihorario. Si $\vec{v}$ tiene sentido horario, $\vec{\omega}$ está dirigida perpendicularmente al plano del papel y hacia dentro; si $\vec{v}$ tiene sentido antihorario, $\vec{\omega}$ tendrá dirección perpendicular al papel y sentido hacia fuera.

D60 PAU **Un disco de vinilo gira a 33 rpm. Al desconectar el tocadiscos, el disco tarda 5 s en parar. ¿Cuál ha sido la aceleración angular de frenado? ¿Cuántas vueltas ha dado hasta pararse?**

Cuando se para, la velocidad angular será cero:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 \Rightarrow \text{a} = \frac{-\omega_0}{t} = -0{,}69\ \text{rad/s}^2$$

Para ello, hemos expresado previamente la velocidad angular inicial en rad/s, con lo que resulta 3,45 rad/s. Calculando ahora, a partir de la expresión $\theta = \omega_0 t - 1/2\ at^2$, el ángulo que ha girado hasta pararse, determinamos el número de vueltas:

$$\theta = 8{,}6\ \text{rad} \Rightarrow 1{,}37\ \text{vueltas}$$

D61 **Una máquina de equilibrado de ruedas de coche hace que estas giren a 900 rpm. Cuando se desconecta, la rueda sigue girando durante medio minuto más hasta que se para. ¿Cuál es la aceleración angular de frenado? ¿Qué velocidad angular tendrá la rueda a los 20 s de la desconexión?**

La velocidad angular inicial, expresada en rad/s, es de 30π rad/s. En el instante en que se para, la velocidad angular es cero, por lo que, procediendo de la misma manera que en el problema anterior, obtenemos:

$$\alpha = -3{,}14\ \text{rad/s}^2$$

Conocida la aceleración angular de frenado, usamos la misma expresión para hallar la velocidad angular a los 20 s:

$$\omega = 31{,}4\ \text{rad/s}$$

D62 **Una pelota atada a una cuerda de 1 m de radio describe círculos con una frecuencia de 10 s⁻¹ en un plano horizontal a una altura de 3 m sobre el suelo. Si en cierto instante se rompe la cuerda, ¿a qué distancia, medida desde la base vertical del punto de lanzamiento, aterriza la pelota? ¿Saldrá indemne un niño de 1,2 m de altura que observa el vuelo de la pelota 10 m antes del punto de aterrizaje en el plano de la trayectoria?**

De los datos del problema parece fácil adivinar que el movimiento que animará la pelota, una vez rota la cuerda, es el de un tiro horizontal cuya v_{0x} será la velocidad lineal de la pelota en el instante de salir despedida. Puesto que conocemos la relación entre frecuencia y velocidad angular ($\omega = 2\pi\nu$) y, además, la relación entre velocidad angular y velocidad lineal ($v = \omega R$):

$$v_{0x} = 2\pi\nu R = 2 \cdot \pi \cdot 10\ \text{s}^{-1} \cdot 1\ \text{m} = 62{,}8\ \text{m/s}$$

Por otro lado, para el tratamiento de la componente vertical, aplicamos la ecuación de una caída libre y calculamos el tiempo que el objeto está cayendo:

$$h = 1/2\ gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}78\ \text{s}$$

introduciendo este tiempo en la ecuación de la componente horizontal:

$$x = v_{0x}\,t = 62{,}8\ \text{m/s} \cdot 0{,}78\ \text{s} = 49\ \text{m}$$

Por otra parte, podemos calcular la altura a la que estará la pelota a los 10 m de la base de lanzamiento. Para ello, en la ecuación del movimiento horizontal calculamos el tiempo para $x = 10$ m y el resultado obtenido lo insertamos en la ecuación del movimiento vertical para hallar la altura. Lamentablemente, los 1,11 m del suelo que obtenemos garantizan que el niño acabará con un fuerte pelotazo.

63 PAU **Sea un disco que gira a 45 rpm; calcula:**

a) **La velocidad angular y lineal de todos los puntos del disco que disten 1 cm del centro de rotación.**

b) **La velocidad lineal y angular de los puntos que disten 5 cm del centro de rotación.**

c) **Cuál tiene mayor aceleración normal.**

d) **El período y la frecuencia de este movimiento.**

La velocidad angular es la misma para todos los puntos del disco; expresada en rad/s, es de 4,71 rad/s. Teniendo en cuenta que $v = \omega r$:

a) $v = 4{,}71$ cm/s $= 0{,}047\,1$ m/s

b) $v = 23{,}55$ cm/s $= 0{,}235\,5$ m/s

Puesto que la aceleración normal o centrípeta, en función de la velocidad angular, es $a_c = \omega^2 r$, los puntos que se hallan a mayor distancia del centro tienen mayor aceleración centrípeta.

c) Como el período es $T = 2\pi/\omega$, obtenemos que $T = 1{,}3$ s.

Dado que la frecuencia es la inversa del período, su valor resulta ser de $0{,}75\ \text{s}^{-1}$.

64 **Un tren eléctrico da vueltas por una pista circular de 50 cm de radio con una velocidad constante de 10 cm/s. Calcula su velocidad angular, su aceleración normal, su período, su frecuencia y el número de vueltas que da en 10 s.**

Usando las expresiones $\omega = \frac{v}{r}$, $a_c = \frac{v^2}{r}$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\nu = \frac{1}{T}$ y $\theta = \omega t$, obtenemos $\omega = 0{,}2$ rad/s, $a_c = 0{,}02\ \text{m/s}^2$, $T = 31{,}4$ s y $\nu = 0{,}032\ \text{s}^{-1}$, así como el número de vueltas, que es 0,32.

65 PAU **Un volante de 2 dm de diámetro gira en torno a su eje a 3 000 rpm; un freno lo para a 20 s. Calcula la aceleración angular, el número de vueltas que da hasta pararse y la aceleración normal y total de un punto de su periferia una vez dadas 100 vueltas.**

La velocidad angular inicial con la que gira el volante es de 100π rad/s $= 314{,}16$ rad/s.

Aplicando la expresión $\omega = \omega_0 + \alpha t$, y teniendo en cuenta que, cuando se para, $\omega = 0$, obtenemos:

$$\alpha = -5\pi\ \text{rad/s}^2$$

Aplicando la expresión $\theta = \omega_0 t - 1/2\ \alpha t^2$ y dividiendo el resultado entre 2π rad/vuelta, comprobamos que el volante ha dado 500 vueltas hasta que se para.

El ángulo descrito cuando se han efectuado 100 vueltas es de 200π rad. Empleando la expresión anterior, podemos calcular el tiempo empleado en describir dicho ángulo, que resulta ser de 2,11 s. La velocidad angular que lleva el volante en ese instante es de 281 rad/s, por lo que:

$$a_c = \omega^2 r = 7\,895{,}7\ \text{m/s}^2$$

Por su parte, la aceleración tangencial es:

$$a_t = \alpha r = 1{,}57\ \text{m/s}^2$$

De este modo la aceleración total resulta ser:

$$a = 7\,895{,}7\ \text{m/s}^2$$

Evaluación (página 254)

Señala en cada caso la respuesta que consideres correcta:

1. Si la aceleración es cero, la gráfica de x con respecto a t:

▶ *a)* Es una recta con pendiente.

b) Es una parábola.

▶ *c)* Es una recta horizontal.

2. La ecuación $x - x_0 = v_0 t + 1/2\ at^2$:

▶ *a)* Solo es válida para movimientos rectilíneos con aceleración constante.

b) Solo es válida para movimientos con velocidad constante.

▶ *c)* Es también aplicable a movimientos con velocidad constante.

3. Dos objetos son lanzados verticalmente en sentidos opuestos con la misma velocidad inicial; entonces:

a) Tardan lo mismo en llegar al suelo.

▶ *b)* Los dos llegan al suelo con la misma velocidad.

c) La velocidad con que lleguen al suelo depende de la masa de cada uno.

4. Un objeto lanzado horizontalmente:

a) Tarda más en llegar al suelo que otro que se deja caer desde la misma altura.

▶ *b)* Tarda lo mismo en llegar al suelo que otro que se deja caer desde la misma altura.

c) Tardará menos en llegar al suelo si su masa es mayor.

5. Si dos objetos son lanzados horizontalmente desde la misma altura con distintas velocidades:

a) Caerá antes el que tenga mayor velocidad.

b) Caerá antes el que tenga menor velocidad.

▶ *c)* Caerán los dos a la vez.

6. Si se lanzan parabólicamente cuatro objetos con la misma velocidad y ángulos de 15°, 55°, 75° y 35°, respectivamente:

a) El tercero llega más lejos que los demás.

▶ *b)* El primero y el tercero caerán en el mismo punto.

▶ *c)* El segundo y el cuarto caerán en el mismo punto.

7. Un cuerpo es lanzado verticalmente y otro parabólicamente:

a) Llegarán a la vez al suelo si son lanzados con la misma velocidad.

▶ *b)* Si ascienden a la misma altura llegarán a la vez al suelo.

c) El cuerpo lanzado verticalmente siempre ascenderá más alto.

8. La velocidad angular en los movimientos circulares:

a) Tiene la dirección y el sentido del movimiento.

▶ *b)* Es perpendicular al plano del movimiento.

c) Tiene dirección radial.

9. La aceleración angular en los movimientos circulares:

a) Tiene dirección radial.

b) Tiene la dirección y el sentido del movimiento.

▶ *c)* Es perpendicular al plano del movimiento.

10. Si un móvil efectúa diez vueltas cada 8 s:

▶ *a)* Su período es de 0,8 s.

b) Su período es de 1,25 s.

▶ *c)* Su velocidad angular es de 7,85 rad/s.

10 Las leyes de la dinámica

ESQUEMA DE LA UNIDAD

1. El estado de movimiento de los cuerpos: la masa y el momento lineal
páginas 256/257

- **1.1. La cantidad de movimiento o momento lineal**
página 257

2. Las leyes de Newton acerca del movimiento o leyes de la dinámica
páginas 258/264

- **2.1. La primera ley: ley de inercia**
páginas 258/259
- **2.2. La segunda ley: concepto de interacción y fuerza**
páginas 260/261
- **2.3. La tercera ley: ley de acción y reacción**
páginas 262/264

3. Conservación del momento lineal: una consecuencia de la tercera ley
páginas 265/266

4. Impulso y cantidad de movimiento
página 267/268

5. Relatividad y tercera ley
página 268

Ideas claras
página 269

Cuestiones previas (página 255)

1. Si sobre un cuerpo en movimiento dejan de actuar todas las fuerzas, ¿acabará parándose?

Lo más común es que la mayoría de alumnos responda afirmativamente a esta cuestión, lo que demuestra un desconocimiento o, al menos, una falta de asimilación de la ley de inercia. Si es así, resultará indicativo de que tendremos que trabajar especialmente la ley de inercia desde el punto de vista conceptual. Es una ley que, pese a su aparente sencillez, requiere una abstracción de la realidad que escapa a muchos alumnos, tan aferrados a la comprobación empírica de que los cuerpos en movimiento acaban parándose (un objeto empujado por el suelo deja de moverse cuando dejamos de empujarlo). Al igual que en tiempos pregalileanos, la fricción es la protagonista oculta (nuestros alumnos no ven en ella una fuerza más actuando sobre el cuerpo).

2. Para que un cuerpo se mantenga indefinidamente en movimiento, ¿es necesario que actúe una fuerza sobre él?

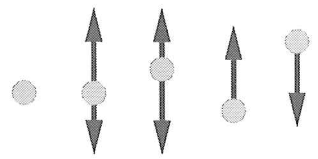
Esta pregunta incide en lo anterior, es decir, en la percepción de la mayoría de los alumnos de que solo es posible el movimiento indefinido si hay una fuerza actuando de modo permanente. No perciben como verosímil la ley de inercia.

3. Un objeto ha sido lanzado verticalmente hacia arriba. Indica qué diagramas representan las fuerzas que actúan en cada una de las siguientes situaciones (no hay resistencia del aire).

***a)* Mientras el objeto asciende.**

***b)* Cuando alcanza su máxima altura.**

***c)* Mientras el objeto desciende.**



Esta es una pregunta muy clarificadora para darse cuenta de la gran confusión que persiste entre los alumnos, que, a pesar de haber estudiado los conceptos de velocidad o fuerza en cursos anteriores, siguen mezclándolos y sin diferenciar claramente uno de otro. Muchas respuestas tienen que ver con lo apuntado en las cuestiones anteriores; la necesidad de una fuerza que «tire» del cuerpo en la dirección en que se mueve.

Muchos eligirán el primer diagrama (ausencia de fuerzas) para representar el punto de máxima altura, el segundo diagrama para el ascenso y el tercero para representar el descenso. Son pocos los que elegirán como única respuesta la que es correcta en relación a todas las situaciones; es decir, el último diagrama, donde la única fuerza que actúa sobre el cuerpo es la gravitatoria (su peso), que explica el movimiento desacelerado en ascenso y acelerado en descenso.

Actividades (páginas 256/268)

1 Si tuvieras que elegir, ¿a cuál de los dos animales antes mencionados frenarías: a la hormiga o al elefante? ¿Por qué razón?

Véase la respuesta a la actividad 3.

2 Si la velocidad es la misma, ¿qué distingue un movimiento del otro?

Véase la respuesta a la actividad 3.

3 ¿Qué magnitud o magnitudes consideras necesario tener en cuenta para describir correctamente el estado de movimiento de un cuerpo?

El único motivo de las cuestiones 1, 2 y 3 es que el alumnado deduzca con antelación que el estado de movimiento de un cuerpo no puede describirse únicamente en función de la velocidad, sino que debe contemplarse la masa juntamente con la velocidad.

4 En un saque de tenis, una pelota de 200 g es lanzada a 225 km/h.

***a)* ¿Cuál es su momento lineal (expresado en unidades del sistema internacional) en el instante en que sale despedida?**

***b)* Si el impacto con la malla de la raqueta dura 0,003 5 s, ¿cuál es la rapidez con que ha cambiado el momento lineal? ¿En qué unidades se mide?**

***c)* A la vista de dichas unidades, ¿se te ocurre a qué puede equivaler esa rapidez con la que cambia el momento lineal?**

Expresando la masa y la velocidad en unidades del SI, m = 0,2 kg y v = 62,5 m/s, tenemos que:

a) $p = mv$ = 12,5 kg m/s

b) La rapidez con que cambia el momento lineal es:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = 3\,571{,}4 \text{ kg m/s}^2$$

c) Como puede comprobarse, las unidades en que se mide la rapidez con que cambia el momento lineal son unidades de masa ¥ aceleración que, como es bien sabido, equivale a la fuerza que ha actuado. De esta equivalencia se da cumplida respuesta en el epígrafe 2.2. También se recordará que esta equivalencia ya fue considerada en la resolución de la actividad 6, apartado b), de la UNIDAD 8 de cinemática.

5 ¿Crees que nuestro laboratorio particular, la Tierra, es un sistema de referencia inercial en sentido estricto? ¿Por qué?

Es evidente que no, pues no cumple con ninguna de las condiciones que caracterizan a un sistema inercial. Sin embargo, para analizar fenómenos en intervalos de tiempo breves, podemos hacer la aproximación de considerarla como sistema inercial.

6 Imagina por un momento que te hallas en el interior de una nave espacial sin ventanas y, por tanto, sin referencias visuales externas, que está cayendo verticalmente hacia Tierra:

***a)* ¿Qué crees que marcaría una balanza que pusieras bajo tus pies?**

***b)* Si de tu bolsillo sacaras unas llaves y las soltaras para que cayeran libremente, ¿qué ocurriría? ¿Cumplirían, según tu apreciación, con la ley de inercia?**

***c)* ¿Considerarías necesario someter a revisión la definición dada de sistema inercial? Si es así, trata de complementar la definición.**

a) No marcaría peso alguno, pues todos los objetos del interior de la nave en caída libre estarían dotados de la misma aceleración. Estarían en situación relativa de «ingravidez».

b) Permanecerían en reposo relativo con respecto a la persona que efectúa la experiencia. Es decir, estarían cayendo exactamente con la misma aceleración que el observador en el interior de la nave, por lo que su posición relativa con respecto a este no cambia. Para el observador del interior de la nave, las llaves quedarían en reposo y cumplirían a la perfección con la ley de inercia, pues sobre ellas no se ha ejercido fuerza alguna (se han soltado o abandonado sin impulso).

c) Según la mecánica clásica, un sistema inercial sería aquel en el que se cumplen las leyes del movimiento enunciadas por Newton. Sin embargo, aquí observamos que un sistema en caída libre, o acelerado gravitacionalmente, se comporta para el observador de ese sistema como si fuese inercial. La pregunta es: ¿podría dilucidar el observador de ese sistema si su sistema está acelerado o no? Es más, ¿podría dilucidar si está en movimiento?

Así pues, habría que admitir que un sistema de coordenadas sometido a un campo gravitacional se comporta como un sistema inercial. Pero hay que precisar que ese sistema es un sistema inercial limitado en espacio y tiempo (es decir, sería inercial mientras dura la caída). Se trataría, pues, de un sistema inercial «local». Esta es la base de la teoría general de la relatividad enunciada por Einstein. Además, para que los ejemplos expuestos se cumplan, hemos de asumir que la masa inercial y la gravitacional son, en realidad, la misma cosa. A este respecto, sugerimos la lectura de las páginas 181-191 del libro *La física: aventura del pensamiento*, de A. Einstein y L. Infeld (Losada, Buenos Aires, 1982), en el que se exponen, de manera muy divulgativa, la cuestión de la relatividad general y el problema de «dentro y fuera del ascensor» en caída libre.

7 Un cuerpo de 5 kg se mueve según la ecuación:

$$\vec r = 3t^2\vec i - 2t\vec j + 5\vec k \text{ m}$$

Calcula la fuerza que actúa sobre él e indica en qué dirección lo hace.

Dado que la masa permanece constante, podemos utilizar la expresión:

$$\vec F = m \cdot \vec a, \text{ donde } \vec a = d^2\vec r/dt^2$$

En consecuencia:

$$\vec F = 30\vec i \text{ N (actúa en la dirección del eje } X)$$

8 Un cuerpo de 10 kg se encuentra inicialmente en la posición $\vec r_0 = 2\vec i + 5\vec j$ y sobre él comienza a actuar una fuerza constante $\vec F = 8\vec i$ N. Determina cuál será la ecuación de posición en función del tiempo y calcula el desplazamiento efectuado bajo la acción de dicha fuerza en los diez primeros segundos.

En otras unidades hemos insistido en la necesidad de usar la menor cantidad posible de fórmulas con el fin de simplificar los razonamientos de los problemas. El alumnado recuerda que la ecuación general de un movimiento es

$$\vec r = \vec r_0 + \vec v_0 t + 1/2\,\vec a t^2$$

Por otro lado, $\vec F = m\,\vec a$, de donde $\vec a = \dfrac{\vec F}{m}$

Calculando primero la aceleración e introduciendo todos los datos en la primera ecuación obtenemos:

$$\vec r(t) = \left(2 + \frac{2}{5}t^2\right)\vec i + 5\vec j \text{ m}$$

El desplazamiento efectuado en los diez primeros segundos es:

$$\Delta\vec r = \vec r\,(10) - \vec r\,(0) = (42\vec i + 5\vec j) - (2\vec i + 5\vec j) = 40\vec i \text{ m}$$

9 Sabiendo que la masa de la Luna es 0,012 veces la de la Tierra, ¿cómo es la aceleración que adquiere la Luna en comparación con la que adquiere nuestro planeta a causa de su interacción mutua?

La fuerza que actúa sobre ambos cuerpos celestes tiene el mismo valor. La aceleración que esta fuerza comunica a la Tierra vale:

$$a_T = \frac{F}{m_T}$$

La aceleración que esta fuerza comunicará a la Luna es:

$$a_L = \frac{F}{0{,}012\, m_T} = 83{,}3\, a_T$$

Es decir, la aceleración que la fuerza comunica a la Luna es unas 83 veces mayor que la que comunica a la Tierra.

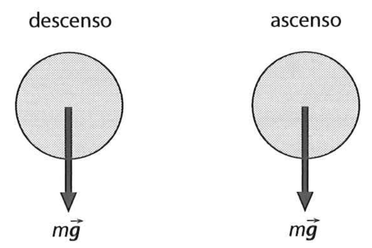
10 Pon ejemplos que ilustren el principio de acción y reacción.

La interacción Tierra-Luna o Sol-Tierra, dos personas sobre patines que se empujan, dos barcas que chocan en el agua, un avión a reacción, una manguera abierta suelta en el suelo, etcétera.

11 Dibuja los esquemas de las fuerzas que actúan sobre una pelota de goma que cae desde cierta altura a un suelo duro y luego rebota, en los siguientes momentos:

***a)* Descenso. *b)* Impacto. *c)* Ascenso.**

En el descenso y ascenso solo actúa la fuerza gravitacional sobre la pelota (su peso), si despreciamos la existencia de fricción con el aire:



La situación es algo más compleja durante el impacto. La pelota de goma se deforma cuando choca contra el suelo y, en realidad, el suelo también. Si este es rígido, podemos imaginarlo como un muelle con una gran fuerza restauradora frente a pequeñas deformaciones. Al deformarse la pelota, esta ejercerá una fuerza restauradora que actúa sobre el suelo. Por tanto, sobre el suelo actúan dos fuerzas: una igual en valor al peso de la pelota y otra que es la fuerza restauradora que la pelota ejerce sobre el suelo. Si este es rígido, responde con una reacción $\vec N$ (que actúa sobre la pelota) igual en valor a la suma del peso más la fuerza restauradora y que actúa verticalmente hacia arriba.

En consecuencia, podemos decir que la fuerza neta que actúa sobre la pelota es igual a la fuerza restauradora si el suelo es rígido. Esta fuerza neta está dirigida hacia arriba y es la causante de que la pelota se eleve de nuevo.

La complejidad, en este caso, radica en que la fuerza restauradora es variable en función de la deformación producida: es máxima cuando la pelota está totalmente deformada y cero cuando recupera su forma. Así pues, el diagrama en el momento del impacto será: