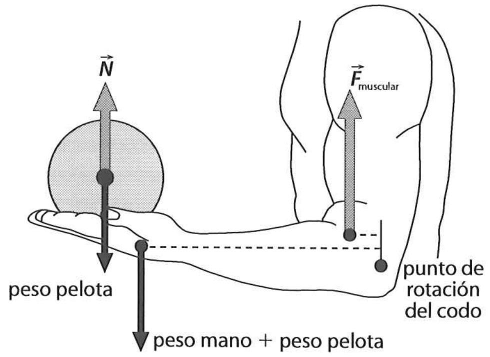
12 **Si a toda acción se opone una reacción igual y de sentido contrario, ¿por qué una bola de plastilina lanzada contra una pared no sale rebotada?**

La reacción de la pared sobre la plastilina se emplea íntegramente en la deformación de esta. Podemos considerar que la plastilina es un material con un límite de elasticidad extremadamente bajo y, por tanto, muy deformable.

13 **Una persona sostiene una pelota en su mano. Dibuja todas las fuerzas que operan sobre ella y sobre la pelota.**

Si nos fijamos únicamente en la mano y la pelota, sobre la mano actúa, además de su propio peso, una fuerza igual al peso de la pelota. El bíceps mantiene el brazo en equilibrio al ejercer el par necesario para evitar la rotación del antebrazo alrededor del codo. De ese modo, sobre la pelota actúa su propio peso y la reacción normal que ejerce la mano sobre ella, igual en valor al peso de la pelota.



14 **Infla un globo y, sin hacerle el nudo, suéltalo: ¿cómo explicas lo que sucede?**

Es un ejemplo de conservación del momento lineal del sistema. El aire, al escapar con cierta velocidad, hace que el globo salga en sentido opuesto, con lo que se conserva el momento lineal.

15 **Si alguna vez has intentado ganar un premio «tirando al blanco» con una escopeta de perdigones de feria, ¿qué notaste en tu hombro cuando salieron disparados los perdigones?**

El «retroceso» de la escopeta de feria es debido a que, al efectuar el disparo, los perdigones adquieren un momento lineal que antes no tenían. Para conservar el momento lineal total anterior, la escopeta adquiere un momento lineal en sentido contrario al de los perdigones, que nosotros advertimos como «retroceso».

16 **Con las cortinas de baño previamente cerradas, abre súbitamente la llave del agua de la ducha, mientras sujetas el tubo flexible. ¿Qué es lo que ocurre? ¿Por qué?**

El mango o «teléfono» de la ducha retrocede con respecto a la dirección de avance del agua. La razón es la misma que la expuesta en la actividad anterior. El momento lineal de salida del agua origina el retroceso del teléfono de la ducha. Este mismo ejemplo puede comprobarse en el movimiento descontrolado que adquiere una manguera abierta cuando es soltada.

17 **Por accidente se parte el cable que mantenía sujeto a la nave a un astronauta que había salido a hacer una reparación. ¿Qué le recomendarías que hiciera con su llave inglesa para regresar a ella?**

Tiene que lanzarla con la mayor velocidad posible en sentido inverso al seguido por la nave. De ese modo, él adquirirá el momento lineal necesario para acercarse a la nave.

18 **El dispositivo de la figura 10.17, denominado «Newton's Cradle» o «Bolas de Newton» ilustra el principio de conservación del momento lineal. Suele constar de cinco bolas de acero idénticas en contacto mutuo. ¿Qué sucederá si desplazamos dos bolas y luego las soltamos? ¿Y si desplazamos cuatro, dejando solo una en el punto más bajo?**

Con este dispositivo se puede hacer es una esclarecedera experiencia de cátedra para ilustrar los fenómenos de conservación del momento lineal y de la energía mecánica.

Al desplazar dos bolas, de modo que golpeen contra las tres que quedan en reposo, la conservación del momento lineal del sistema (y de la energía mecánica), exige que por el otro extremo salgan dos bolas tras el impacto, que se elevarán hasta la misma altura de la que salieron las dos primeras. Las dos que impactaron quedan en reposo.

Al soltar cuatro bolas, estando una en el punto más bajo en reposo, saldrán por el otro extremo cuatro bolas, como exige la conservación del momento lineal. Siempre quedarán una en el punto más bajo.

Puede plantearse otra cuestión para forzar la reflexión del alumnado: *¿Por qué no salen rebotadas las bolas que impactan? ¿Se conservarían el momento lineal y la energía mecánica en ese caso?*

19 **¿Por qué cuando saltamos sobre el suelo desde cierta altura es importante tocar tierra con las piernas flexionadas?**

La variación de momento lineal que se produce cuando llegamos al suelo es la misma flexionando o no las piernas. Sin embargo, al flexionarlas, aumentamos el tiempo que dura dicha variación del momento lineal y, en consecuencia, disminuye el valor de la fuerza que actúa contra nosotros.

20 **En una vistosa demostración, un karateka se dispone a romper de un solo golpe varios ladrillos apoyados en sus extremos sobre dos bloques de madera; para ello lleva el brazo con una determinada cantidad de movimiento $\vec{p}$ contra los ladrillos. Razona en qué caso comunica una mayor fuerza contra los ladrillos:**

a) **Golpea con un tiempo mayor de contacto con los ladrillos.**

b) **El tiempo de ejecución del golpe es muy breve.**

c) **Da un golpe seco haciendo que la mano rebote en el impacto.**

La respuesta correcta es la ***c)***. Al dar un golpe seco haciendo que la mano rebote, la variación del momento lineal de la mano del karateka es máxima (debido al rebote), por lo que el impulso transmitido a las tablas es el mayor posible. Por otra parte, al tratarse de un golpe seco, el tiempo de contacto es mínimo, por lo que la fuerza aplicada es máxima.

21 **Sobre un cuerpo en reposo de 25 kg de masa actúa, en un caso, una fuerza de 10 N durante 10 s, y en otro, una fuerza de 50 N durante 2 s. Responde:**

a) **¿En cuál de las dos situaciones se le comunica al cuerpo mayor velocidad?**

b) **¿Cuánto valdrá dicha velocidad?**

a) El momento lineal que comunican ambos impulsos es el mismo, por lo que la velocidad que adquiere el cuerpo es también la misma.

b) El valor de dicha velocidad es:

$$\frac{Ft}{m} = 4 \text{ m/s}$$

22 **Calcula la fuerza media que ha ejercido un cinturón de seguridad sobre un conductor de 75 kg cuyo vehículo ha colisionado contra un obstáculo fijo, sabiendo que circulaba a 110 km/h y que el impacto ha durado 0,06 s.**

El impulso recibido por la persona en la colisión es $F \cdot \Delta t = \Delta p$, donde $\Delta p = -2\,291{,}7$ kg m/s. Dado que el impacto dura 0,06 s, la fuerza media que actúa contra el pecho del conductor es de $-38\,194{,}4$ N.

Debe hacerse notar que el valor de esta fuerza es muy elevado, debido a la corta duración del impacto, por lo que las fracturas óseas son inevitables y la suerte del conductor estaría muy comprometida. Esto puede servir para reflexionar acerca de las consecuencias de impactos a velocidad excesiva, pero también para insistir en la necesidad de utilizar siempre el cinturón de seguridad, pues la velocidad a la que hubiese salido despedido el conductor, si no lo hubiera llevado puesto, habría significado, sin duda alguna, su muerte instantánea.

Cuestiones y problemas (páginas 272/273)

Primera y segunda ley: concepto de fuerza

1 **¿Es necesaria la presencia de fuerzas para mantener un cuerpo en movimiento indefinidamente?**

No. En ausencia de fuerzas un cuerpo permanece en reposo o con movimiento rectilíneo uniforme.

2 **De estas dos definiciones de fuerza: $F = dp/dt$ y $F = ma$. ¿Cuál es más general? ¿Por qué?**

La más general es la primera, pues no presupone necesariamente la constancia de la masa, premisa necesaria para la validez de la segunda expresión.

3 **Razona si las siguientes afirmaciones son correctas o incorrectas a la luz de la primera ley:**

a) **Un cuerpo no puede desplazarse sin que una fuerza actúe sobre él.**

b) **Toda variación en la velocidad de un cuerpo exige la actuación de una fuerza.**

c) **Un cuerpo se para si la fuerza que actuaba sobre él se hace cero y se mantiene nula.**

a) Falso; la primera ley afirma justamente lo contrario.

b) Verdadero; variación de velocidad significa aceleración y toda aceleración es inherente a la actuación de una fuerza externa.

c) Falso; esta era la creencia pregalileana. Al afirmar que la fuerza se hace cero, hemos de suponer que no actúa ninguna otra fuerza.

En ese caso, el cuerpo se moverá indefinidamente con MRU, como afirma la primera ley.

4 **¿Puede darse el caso de que sobre un cuerpo actúe una única fuerza y, sin embargo, el módulo de su velocidad sea constante?**

En la Unidad 8 vimos que un cuerpo puede tener módulo de velocidad constante y, sin embargo, estar acelerado. En este caso, la aceleración ha de ser centrípeta. Esta aceleración implica la existencia de una fuerza centrípeta, que mantendrá constante el módulo de la velocidad.

5 **Razona la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: «desplazar un satélite de 1 000 kg de masa en el espacio vacío y en situación de ingravidez no nos costaría ningún esfuerzo, ya que el satélite no pesaría nada».**

Es un equívoco muy común suponer que si las cosas no pesan, entonces no cuesta moverlas.

La confusión tiene sus raíces en el error conceptual de confundir masa con peso. Un cuerpo en situación de ingravidez tiene masa inercial. Cuanto mayor sea su masa inercial, mayor será la fuerza que tendremos que ejercer para ponerlo en movimiento. Estamos, pues, en presencia de la segunda ley de Newton.

Dado que esta respuesta suele contradecir la «noción particular de las cosas» que comparten muchos alumnos y alumnas, es conveniente apoyarnos en ejemplos como los siguientes:

- Por un lado, si la propuesta de la pregunta fuese cierta, el impacto de cualquier asteroide, por pequeño que fuera, apartaría totalmente a la Tierra de su órbita, pues nuestro planeta actuaría como ese satélite que no pesa nada.
- Por otro lado, ¿acaso no costaría nada empujar un elefante que estuviera flotando en el agua?

6 **¿Puede un cuerpo moverse en una dirección o en un sentido distintos al de la fuerza que actúa sobre él? ¿Y puede acelerarse en una dirección diferente a la de la fuerza que actúa?**

En el primer caso, la respuesta es afirmativa. La actuación de una fuerza implica la existencia de una variación en la velocidad (como magnitud vectorial). Que la variación de velocidad ocurra en un sentido no implica que la velocidad del cuerpo en ese momento tenga ese sentido. Por tanto, sí podría el cuerpo moverse en sentido contrario al de actuación de la fuerza. En ese caso, la fuerza haría disminuir el valor de esa velocidad y podría acabar invirtiendo su sentido (salvo el caso del rozamiento). Ejemplos de este caso son el ascenso en un lanzamiento vertical, el rozamiento que actúa sobre un cuerpo en movimiento, el movimiento de un péndulo, el de un muelle entre su posición de equilibrio y uno de los extremos, etcétera.

También puede moverse permanentemente en una dirección distinta, como es el caso de la actuación de fuerzas centrípetas.

Sin embargo, la respuesta a la segunda parte de la pregunta es negativa. Puesto que la aceleración es proporcional vectorialmente a la fuerza que actúa, tendrá siempre la misma dirección y sentido que dicha fuerza actuante.

7 **Si yendo a 100 km/h te vieras en la tesitura de tener que optar entre chocar contra un muro de cemento o contra un montón de paja, no hay duda acerca de cuál sería tu elección. Pero ¿cómo explicas tu respuesta si en ambos casos la variación final del momento lineal ha sido la misma?**

Aunque la cantidad de movimiento en ambos choques, efectivamente es la misma, en el caso de la paja, buena parte de la energía que lleva el móvil se transforma en deformar la misma, al ser esta un material de consistencia elástica que permite su deformación. De esta manera, la «reacción» de la paja antes el choque (tercera ley de Newton) se reparte entre la propia paja y el vehículo que circula a 100 km/h. Por el contrario, el muro de hormigón no se deforma, por lo que la energía del golpe no se reparte, con las fatales consecuencias fáciles de prever.

8 **Sobre un cuerpo que se mueve con aceleración actúan solo dos fuerzas. De este hecho podemos deducir que:**

a) **El cuerpo no puede moverse con velocidad constante.**

b) **La velocidad del cuerpo nunca puede hacerse cero.**

c) **La suma de las dos fuerzas nunca puede ser cero.**

d) **Las dos fuerzas deben actuar a lo largo de la misma línea de acción.**

a) Cierto, puesto que la velocidad varía si hay aceleración.

b) Falso; el enunciado no indica si la aceleración es positiva o negativa.

c) Cierto; la resultante no puede ser nula si hay aceleración.

d) Falso; fuerzas en distintas direcciones dan lugar a una resultante neta.

9 **Sobre un cuerpo de 10 kg de masa actúa una fuerza constante de 15 N en la dirección del movimiento. Si la velocidad inicial del cuerpo es de 3 m/s:**

***a)* ¿Cuál será su velocidad al cabo de 5 s?**

***b)* ¿Cuánto valen sus momentos lineales inicial y final al cabo de esos 5 s?**

***c)* Comprueba la veracidad de la siguiente expresión general de fuerza:**

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

La aceleración, en la dirección del movimiento, valdrá:

$$a = F/m = 1{,}5\ \text{m/s}^2$$

Por tanto, la velocidad en función del tiempo vendrá dada por:

$$v = v_0 + at = 3 + 1{,}5t\ \text{m/s}$$

a) La velocidad a los 5 s será:

$$v = 10{,}5\ \text{m/s}$$

b) $p_0 = mv_0 = 10\ \text{kg} \cdot 3\ \text{m/s} = 30\ \text{kg m/s}$

$p_f = mv_f = 10\ \text{kg} \cdot 10{,}5\ \text{m/s} = 105\ \text{kg m/s}$

c) El momento lineal, en función del tiempo, vale:

$$p = mv = 10\ \text{kg}\ (3 + 1{,}5t)\ \text{m/s} = (30 + 15t)\ \text{kg m/s}$$

Haciendo dp/dt, obtenemos justamente el valor de la fuerza de 15 N.

10 **Un cuerpo de 10 kg, sometido a una fuerza constante, se mueve en cierto instante con una velocidad de $5\vec{i}$ m/s. Al cabo de 12 s, su velocidad es de $11\vec{i} + 4\vec{j}$ m/s. Determina:**

***a)* Las componentes de la fuerza.**

***b)* El valor de la fuerza.**

a) A partir de la definición general de fuerza:

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{10\ \text{kg}\ (11\vec{i} + 4\vec{j})\ \text{m/s} - 10\ \text{kg}\ (5\vec{i})\ \text{m/s}}{12\ \text{s}} = 5\vec{i} + 3{,}33\vec{j}\ \text{N}$$

Así pues, las componentes de la fuerza valen 5 N y 3,33 N en las direcciones *X* e *Y*, respectivamente.

b) Calculando el módulo de la fuerza, obtenemos $F = 6$ N.

Tercera ley y conservación del momento lineal

11 **Dejamos caer libremente desde la ventana de clase una pelota: ¿se mantiene constante su momento lineal? ¿Por qué?**

No. Ha aumentado por la acción de una fuerza, en este caso constante (la fuerza de la gravedad).

12 **Un firme creyente en las leyes de Newton, aunque no muy versado en ellas, decidió que podría derribar un muro propinándole una fuerte patada. De tan insólita experiencia salió convencido en lo referente a las fuerzas de reacción (así se lo recordaban su fémur y los huesos del pie), pero no tanto respecto a que la fuerza de acción hubiese resultado igual; y es que el muro ni se inmutó. ¿Qué ha pasado con dicha fuerza de acción? ¿No ha habido variación del momento lineal en el muro? ¿Nos han engañado con la definición de fuerza? Estas son las dudas que asaltan al infortunado durante su convalecencia. ¿Le podrías ayudar tú a encontrar respuesta?**

No cabe ninguna duda de que la reacción ha sido igual a la acción. Pero no debemos olvidar que fuerzas iguales tienen efectos distintos sobre distintos cuerpos.

El muro, si está convenientemente construido, tiene cimientos que lo anclan a tierra.

Por tanto, no estamos hablando de mover solo el muro. De ese modo, la reacción sobre la pierna del muchacho produce un efecto mucho mayor que su acción sobre el inmutable muro.

13 **En 1786, G. A. Bürger publicó las *Aventuras del barón de Münchhausen*, en las que este jactancioso y lunático personaje narra en primera persona sus descabelladas e increíbles aventuras. En una de ellas cuenta cómo evitó perecer junto a su caballo al quedar atrapado en unas arenas movedizas: «Así hubiese perecido inevitablemente si la fuerza de mi propio brazo no me hubiese sacado, tirándome de la propia coleta, junto con mi caballo, al que apretaba firmemente entre mis rodillas». ¿Se te ocurre algún comentario a la luz de lo estudiado en este tema?**

La aventura del barón resulta tan insólita como pretender subir cierta altura agarrándose de la propia cabeza y tirando hacia arriba.

La variación de momento lineal (o lo que es lo mismo, la producción de movimiento partiendo del reposo) solo es posible bajo la acción de fuerzas externas, pero nunca de fuerzas internas, pues en ese caso las fuerzas de acción y reacción estarían actuando sobre el mismo cuerpo, imposibilitando el movimiento.

Cualquier otra persona podría haber salvado al barón de esa manera, pero él mismo nunca.

14 **Un zoólogo que está estudiando la población de osos polares adormece un ejemplar cuya masa desea determinar. Para ello, solo dispone de una cuerda larga y una cinta métrica. ¿Cómo podría hacerlo? (Se supone que el cazador conoce su peso).**

Dado que el oso es polar, suponemos que la acción transcurre sobre hielo; es decir, podemos despreciar el rozamiento. El zoólogo podría calcular la masa del oso de la siguiente manera:

Con un extremo de la cuerda ata al animal y con el otro se ata él mismo. Marca el sitio donde se encuentran ambos y, a continuación, empuja fuertemente al oso. Debido al tercer principio, el momento lineal del conjunto oso-persona se conservará, por lo que ambos se deslizarán en sentidos opuestos.

Cuando la cuerda se haya estirado del todo, el animal y la persona se habrán desplazado distancias diferentes en el mismo tiempo, pues sus velocidades eran distintas.

Es decir:

$$m_{oso} \cdot v_{oso} = -m_{pers} \cdot v_{pers}$$

Por lo que:

$$m_{oso} \cdot \frac{d_{oso}}{t} = -\ m_{pers}\,\frac{d_{pers}}{t}$$

El signo solo es indicativo del sentido del movimiento. Eliminando *t* y tomando valores absolutos, se obtiene:

$$m_{oso} = m_{pers} \cdot \frac{d_{pers}}{d_{oso}}$$

Por tanto, no tendría más que medir con la cinta métrica las distancias recorridas por ambos.

15 **A principios del siglo XX, varios científicos debatían sobre la posible navegación espacial y la construcción de cohetes capaces de moverse en el vacío. Cierto periodista les acusó de desconocer la tercera ley de Newton, pues, según él, las naves espaciales no podrían moverse por su propia fuerza motriz en el vacío, al no haber aire contra el que sus materiales de escape de combustión pudieran ejercer fuerza. ¿Qué opinas tú?**

El principio de conservación del momento lineal no necesita de la existencia de material exterior. Para la navegación espacial basta con que los gases de combustión sean expelidos a gran velocidad para que la nave, por conservación del momento lineal, se mueva en sentido opuesto.

16 **PAU Una esfera de 100 g cae desde una altura de 5 m sobre la arena de la playa y se hunde en ella 30 cm. Determina:**

***a)* La aceleración de frenado, suponiéndola constante.**

***b)* La fuerza que ejerce la arena contra la bola.**

***c)* El tiempo que tarda en detenerse desde que entra en contacto con la arena.**

***d)* Si se conserva la cantidad de movimiento de la esfera en algún instante.**

a) Primero debemos calcular con qué velocidad llega la bola a contactar con la arena al caer desde 5 m:

$$v = \sqrt{2gh} = 9{,}9\ \text{m/s}$$

Cuando ha recorrido 30 cm en el interior de la arena, su velocidad es cero. Por lo tanto:

$$v_f^2 = 0 = v^2 + 2ad \Rightarrow a = \frac{-v^2}{2d} = 163{,}3\ \text{m/s}^2$$

b) La fuerza de frenado será:

$$F = ma = 0{,}1\ \text{kg}\ (-163{,}3\ \text{m/s}^2) = -16{,}33\ \text{N}$$

c) Conocida la aceleración, podemos calcular el tiempo que ha tardado en pararse:

$$v_f = 0 = v_0 + at \Rightarrow t = \frac{-v_0}{a} = \frac{-9{,}9\ \text{m/s}}{-163{,}3\ \text{m/s}^2} = 0{,}06\ \text{s}$$

d) No, porque actúan fuerzas externas sobre la esfera (la fuerza gravitacional primero, a la que se añade la fuerza de frenado de la arena después).

17 **PAU Determina la relación entre las masas de dos carritos, A y B, que colisionan. Para ello, lanzamos el carrito A con una velocidad de 0,7 m/s contra el carrito B, que está en reposo. Después del impacto, A rebota con una velocidad de 0,3 m/s, mientras que B sale despedido con una velocidad de 0,5 m/s.**

En la colisión se cumple que:

$$m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B = m_A\vec{v}\,'_{2A} + m_B\vec{v}\,'_{2B}$$

Aplicando los valores con el criterio de signos correspondiente, tenemos:

$$0{,}7 \cdot m_A = -0{,}3 \cdot m_A + 0{,}5 \cdot m_B \Rightarrow m_B = 2 \cdot m_A$$

Es decir, la masa de B es el doble que la de A.

18 **Dada la relación de masas obtenida en el ejercicio anterior, ¿con qué velocidad se movería el conjunto si los dos carritos se hubieran quedado enganchados después de la colisión?**

Si los dos carritos quedan enganchados, según el principio de conservación del momento lineal:

$$m_A \cdot v_{0A} + m_B \cdot v_{0B} = (m_A + m_B) \cdot v_{AB}$$

despejando la velocidad del conjunto:

$$v_{AB} = 0{,}23\ \text{m/s}$$

19 **PAU Un coche de 1 400 kg de masa circula a 120 km/h y consigue frenar en 15 m. ¿Cuál ha sido la fuerza de frenado que ha actuado, suponiéndola constante?**

La aceleración que actúa es:

$$v_f^2 = 0 = v_0^2 + 2ad \Rightarrow a = \frac{-v_0^2}{2d} = -37{,}037\ \text{m/s}^2$$

Por tanto:

$$F = ma = -51\ 852\ \text{N}$$

20 **PAU Un futbolista golpea el balón con una fuerza media de 400 N. El esférico sale lanzado formando un ángulo de 45° con la horizontal y vuelve a tocar tierra a una distancia de 35 m. ¿Cuánto tiempo ha durado el contacto entre el pie y el balón? Dato: $m_{balón} = 240$ g**

Se trata de un problema de impulso mecánico en el que conocemos la fuerza media que actúa, pero desconocemos el tiempo, *t*. Para establecer el impulso, deberemos calcular la velocidad con que sale el balón.

A partir de la expresión de alcance máximo de un lanzamiento parabólico, podemos deducir la velocidad de lanzamiento del balón:

$$v_{lanz} = 18{,}5\ \text{m/s} \Rightarrow \Delta p = mv_{lanz} = 4{,}44\ \text{kg m/s}$$

Por tanto:

$$F_m t = \Delta p \Rightarrow t = 0{,}011\ \text{s}$$

21 **La velocidad de una partícula de 2 kg de masa que se mueve en la dirección *X* varía con el tiempo según la expresión $v = -16 + 4t^2$ m/s.**

***a)* Deduce la expresión para la fuerza que actúa sobre dicha partícula, así como su valor a los 2 s.**

***b)* ¿Cambia de sentido el movimiento de la partícula? ¿Cuántas veces? Demuestra tu respuesta.**

a) Puesto que una expresión de la fuerza es $F = dp/dt \cdot m$, derivamos la expresión del momento lineal y multiplicamos por la velocidad:

$$F = 8t \cdot 2\ \text{N} = 16t\ \text{N}$$

Para hallar el valor a los dos segundos basta con sustituir en la expresión anterior:

$$F_2 = 32\ \text{N}$$

b) Como sabemos, un movimiento cambia de sentido cuando su velocidad se hace cero, por lo tanto:

$$v = 0 = -16 + 4t^2$$

La ecuación de segundo grado solo aporta un valor que debamos tener en cuenta, $t = 2$ s.

22 **Una partícula cuya masa es de 300 g y que se mueve a 0,5 m/s a lo largo del eje *X*, choca contra una partícula de 400 g que se encuentra en reposo. Después del choque, la primera partícula se mueve a 0,2 m/s en una dirección que forma 30° con el eje *X*. Determina:**

***a)* La magnitud y la dirección de la velocidad de la segunda partícula después del choque.**

***b)* La variación de la velocidad y del momento lineal de cada partícula.**

a) Puesto que el único movimiento inicial tenía lugar en la dirección *X*, la conservación del momento lineal exige que:

$$m_1\vec{v}\,'_{1x} + m_2\vec{v}\,'_{2x} = m_1\vec{v}_1$$

$$m_1\vec{v}\,'_{1y} = m_2\vec{v}\,'_{2y} = 0$$

Sustituyendo los valores ofrecidos en la primera ecuación, obtenemos:

$$\vec{v}\,'_{2x} = 0{,}245\vec{i}\ \text{m/s}$$

Por otro lado, sustituyendo valores en la segunda ecuación, se obtiene:

$$\vec{v}\,'_{2y} = -0{,}075\vec{j}\ \text{m/s}$$

Por tanto: $v'_2 = 0{,}256$ m/s; su dirección es:

$$\text{tg}\ \beta = \frac{v'_{2y}}{v'_{2x}} = -0{,}306 \Rightarrow \beta = -17°$$

b) $\Delta\vec{v}_1 = \vec{v}_1' - \vec{v}_1 = (0{,}173\vec{i} + 0{,}1\vec{j}) - 0{,}5\vec{i} =$

$$= -0{,}327\vec{i} + 0{,}1\vec{j} \text{ m/s}$$

$$\Delta\vec{v}_2 = \vec{v}_2' = \vec{v}_2 = (0{,}245\vec{i} - 0{,}075\vec{j}) - 0 =$$
$$= 0{,}245\vec{i} - 0{,}075\vec{j} \text{ m/s}$$

$$\Delta\vec{p}_1 = m_1\Delta\vec{v}_1 = -0{,}098\vec{i} + 0{,}03\vec{j} \text{ kg m/s}$$

$$\Delta\vec{p}_2 = m_2\Delta\vec{v}_2 = 0{,}098\vec{i} - 0{,}03\vec{j} \text{ kg m/s}$$

Como puede comprobarse, se produce una transferencia de momento lineal.

23 PAU Dos carritos idénticos se mueven en sentidos opuestos uno al encuentro del otro sobre un carril de aire (no existe rozamiento y el movimiento es uniforme). Inicialmente el carrito A se mueve en el sentido positivo de *X* y B lo hace en sentido negativo. Tras el impacto en el punto medio ambos rebotan en sentidos opuestos. Las gráficas que se te ofrecen describen la variación temporal de algunas de las variables asociadas a este experimento. Identifica razonadamente qué gráfica corresponde a cada una de las proposiciones que se enumeran a continuación. (Si no se corresponde con ninguna, indícalo expresamente).

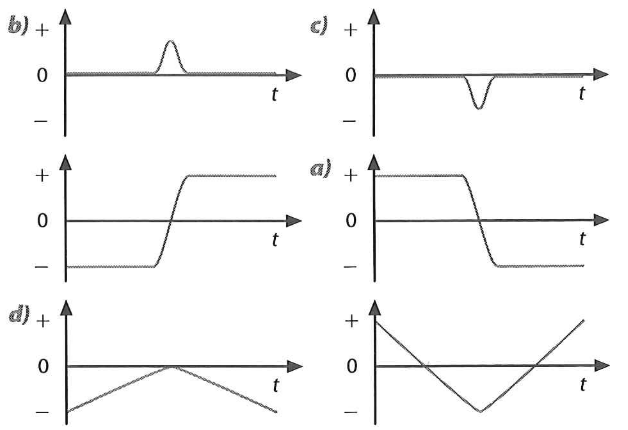
a) **El momento lineal del carro A.**

b) **La fuerza que actúa sobre el carro B.**

c) **La fuerza que actúa sobre el carro A.**

d) **La posición del carro A.**

e) **La posición del carro B.**



a) En la gráfica ***a)*** el momento lineal inicial es positivo, pero tras el impacto rebota, por lo que su momento lineal es ahora negativo.

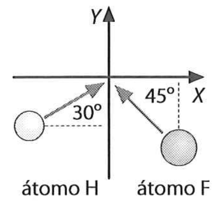
b) La gráfica ***b)*** representa la fuerza que actúa durante el impacto sobre el carro B; tiene sentido positivo, pues es ejercida por A sobre B y produce que B varíe su momento lineal en sentido positivo.

c) Es la gráfica ***c)***, por las mismas razones que se han expuesto en el apartado anterior.

d) Es la gráfica ***d)***. Inicialmente el carro se mueve hacia el sentido positivo, como se indica en el enunciado. Se considera que el impacto sucede en el origen 0, tras el cual, el carro A se mueve en sentido negativo.

e) La posición del carro B no aparece representada por ninguna gráfica. Sería justamente la inversa de la anterior.

24 PAU En una reacción entre átomos en fase gaseosa, un átomo de H colisiona contra otro de F, en las condiciones que se indican en la figura, dando lugar a una molécula HF. Si los valores de las velocidades iniciales son $v_H = 2{,}6 \cdot 10^5$ m/s y $v_F = 9{,}1 \cdot 10^4$ m/s, determina la velocidad y la dirección de la molécula resultante (busca los datos de masas en el libro).



En primer lugar, buscamos las masas del átomo de hidrógeno, del de flúor y de la molécula de fluoruro de hidrógeno.

$$m_H = 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ kg};$$
$$m_F = 3{,}15 \cdot 10^{-26} \text{ kg}; \; m_{HF} = 3{,}32 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

En segundo lugar, vamos a expresar las velocidades iniciales de los elementos en forma vectorial. Para ello hay que tener en cuenta, además del ángulo que forma cada trayectoria con los ejes de coordenadas, el sentido. Las componentes *x* y *y* del hidrógeno serán positivas mientras que para el flúor, la componente *x* será positiva y la *y* negativa. Así pues:

$$\vec{v}_{0H} = v_{0H} \cos 30° \, \vec{i} + v_{0H} \operatorname{sen} 30° \, \vec{j} =$$
$$= 2{,}6 \cdot 10^5 \cdot 0{,}87\,\vec{i} + 2{,}6 \cdot 10^5 \cdot 0{,}5\,\vec{j} =$$
$$= 2{,}26 \cdot 10^5\,\vec{i} + 1{,}3 \cdot 10^5\,\vec{j}$$

$$\vec{v}_{0F} = -v_{0F}\,\vec{i} \cos 45° + v_{0F} \operatorname{sen} 45°\,\vec{j} =$$
$$= -\,9{,}1 \cdot 10^4 \cdot 0{,}7\,\vec{i} + 9{,}1 \cdot 10^4 \cdot 0{,}7\,\vec{j} =$$
$$= -\,63{,}7 \cdot 10^5\,\vec{i} + 63{,}7 \cdot 10^5\,\vec{j}$$

Una vez que disponemos de todos los datos, no hay más que aplicar la ecuación de conservación del momento lineal teniendo en cuenta que tras el choque, ya solo hay una velocidad porque los átomos están unidos.

$$m_H \cdot \vec{v}_{0H} + m_F \cdot \vec{v}_{0F} = m_{FH} \cdot \vec{v}_{FH}$$

De esta ecuación vectorial se despeja la velocidad final del conjunto:

$$\vec{v}_{FH} = \frac{m_H \cdot \vec{v}_{0H} + m_F \cdot \vec{v}_{0F}}{m_{FH}}$$

Sustituyendo cada término por su expresión vectorial y operando obtenemos una expresión del tipo:

$$\vec{v}_{FH} = \vec{v}_{FHx}\,\vec{i} + \vec{v}_{FHy}\,\vec{j}$$

cuyo módulo o valor es:

$$v_{FH} = \sqrt{v_{FHx}^2 + v_{FHy}^2} = 8{,}38 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

Para hallar el ángulo con que sale despedida la molécula de fluoruro de hidrógeno no hay más que calcular:

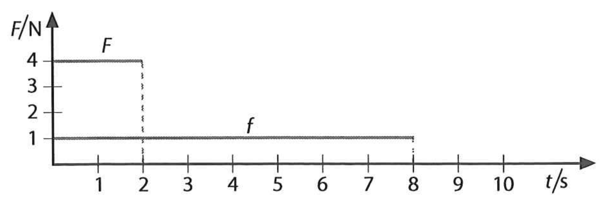
$$\theta = \operatorname{artg} \frac{v_{FHy}}{v_{FHx}} = 126{,}3°$$

Concepto de impulso mecánico

25 Las fuerzas grandes siempre producen un mayor impulso que las pequeñas. ¿Es este enunciado verdadero o falso? Razona tu respuesta.

Depende del tiempo de actuación. El impulso es el producto de la fuerza aplicada por el tiempo de actuación. A igualdad de tiempo de actuación, sí es cierto que las fuerzas grandes producen mayores impulsos.

26 Sobre un cuerpo de masa *m* inicialmente en reposo se aplican, en sucesivos experimentos, las fuerzas *F* y *f*, representadas en la gráfica. ¿En qué caso será mayor la velocidad final?



La fuerza de 1 N actúa durante 8 s, mientras que la fuerza de 4 N lo hace durante 2 s. Por tanto, el impulso producido por ambas fuerzas es idéntico y comunicarán la misma velocidad al cuerpo de masa *m*.

27 PAU Algunos tenistas logran en sus servicios comunicar a la pelota velocidades de 200 km/h. Si la masa de la pelota es de 100 g y el impacto dura 0,15 s, ¿qué fuerza media ha actuado sobre la pelota?

El impulso comunicado en ese tiempo vale:

$$F_m t = \Delta p \Rightarrow F_m = \frac{mv_f}{t} = 37{,}0 \text{ N}$$

28 PAU Un átomo de Ra (de número másico 224) que está en reposo se desintegra espontáneamente emitiendo una partícula alfa (núcleo de He) con una velocidad de 105 m/s. ¿Cuál es la velocidad y el sentido del movimiento que adquiere el núcleo residual?

Es una reacción de desintegración alfa:

$${}^{224}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + {}^{220}_{86}\text{Rn}$$

Si suponemos que el átomo de radio se encuentra inicialmente en reposo, en la desintegración debe conservarse el momento lineal. Como el momento lineal inicial del radio es cero:

$$m_{He}v_{He} = -m_{Rn}v_{Rn}$$

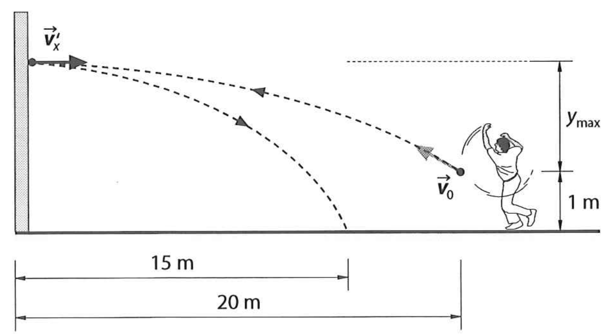
Sustituyendo los valores, se obtiene la velocidad del radón:

$$v_{Rn} = -1\,818{,}1 \text{ m/s}$$

y su sentido es contrario al de la partícula α.

29 En un partido de pelota vasca, un pelotari golpea desde 20 m una pelota de 200 g, que sale despedida de su mano (a 1 m sobre el suelo) formando un ángulo de 30° sobre la horizontal. La pelota golpea horizontalmente contra la pared y, tras rebotar, cae a 15 m de ella. ¿Qué impulso ha ejercido la pared sobre la pelota?

En el siguiente dibujo se ilustra la solución a este problema:



El hecho de golpear la pared (que dista 20 m) horizontalmente significa que está justo a mitad de su alcance máximo y en su punto de máxima altura. Por tanto, como $x_{máx} = 40$ m, a partir de la expresión de alcance máximo en un lanzamiento parabólico, podemos calcular la velocidad con que sale la pelota de la mano del pelotari: $v_0 = 21{,}27$ m/s. Como la velocidad con que llega a la pared es la componente horizontal:

$$v_{0x} = v_0 \cos 30° = 18{,}4 \text{ m/s}$$

Si ahora queremos calcular la velocidad con la que sale, podemos hacerlo imaginando que el rebote es un lanzamiento horizontal desde cierta altura (que calcularemos en primer lugar) que cae a una distancia horizontal de 15 m. La altura a la que impacta la pelota con la pared es la altura máxima de la primera parábola (que resulta ser 5,77 m), a la que hay que añadir 1 m de altura inicial:

$$y = y_{máx} + 1 = 6{,}77 \text{ m}$$

Combinando las ecuaciones componentes de *x* e *y* del lanzamiento horizontal, obtenemos la ecuación parabólica de la trayectoria, que nos permitirá calcular la velocidad con que sale rebotada la pelota:

$$y = 1/2\, gx^2/v_x'^2 \Rightarrow v_x' = 12{,}76 \text{ m/s}$$

Por tanto, el impulso que la pared comunica a la pelota vale:

$$I = mv'x - (-mv_{0x}) = 6{,}23 \text{ kg m/s}$$

30 Un vagón que dispone de un contenedor abierto por la parte superior tiene una masa total de 1 250 kg y se mueve a una velocidad de 30 km/h sobre una vía recta. En cierto momento comienza a llover y el contenedor se llena a razón de 5 L/min.

a) **¿Con qué velocidad se moverá al cabo de hora y media de incesante lluvia (se desprecia el rozamiento)?**

b) **Expresa la velocidad del vagón en función del tiempo.**

a) Suponemos que no actúan sobre el vagón fuerzas externas. En ese caso se conservará el momento lineal. Al cabo de 90 min (hora y media), la masa del vagón se habrá incrementado en 450 kg de agua, por lo que:

$$Mv_0 = (M + m)\,v \Rightarrow v = 22 \text{ km/h}$$

b) La masa de agua que se añade en función del tiempo (expresado en min) viene dada por:

$$m = 5t \text{ kg}$$

Por tanto, la velocidad en función del tiempo vendrá dada por:

$$v = \frac{M}{M + 5t} \cdot v_0$$

Sustituyendo *M*, resulta:

$$v = \left(\frac{1\,250}{1\,250 + 5t} \cdot 30\right) = \frac{250}{250 + t} \cdot 30 \text{ km/h}$$

31 Una pelota de béisbol de 140 g de masa llega horizontalmente al bate con una velocidad de 39 m/s. Tras el impacto sale despedida con una velocidad de 45 m/informando un ángulo de 30° sobre la horizontal. ¿Cuánto vale el impulso comunicado a la pelota? (Expresa dicho impulso como vector, determinando su valor y dirección).

Sabemos que la variación del momento lineal es igual al impulso mecánico.

$$\vec{I} = \Delta\vec{p}$$

Analicemos los dos casos, el antes y después del impacto:

$\vec{p}_i = mv_{ix} = -0{,}140 \text{ g} \cdot 39\vec{i} \text{ m/s} = -5{,}46\,\vec{i} \text{ kg m/s}$

$\vec{p}_f = mv_f \cdot \cos 30°\,\vec{i} + mv_f \operatorname{sen} 30°\,\vec{j}$

$\vec{p}_f = 0{,}140 \text{ g} \cdot 45 \text{ m/s} (\cos 30\,\vec{i} + \operatorname{sen} 30\,\vec{j}) =$

$\vec{p}_f = 5{,}46\,\vec{i} + 3{,}15\,\vec{j} \text{ kg m/s}$

Por tanto:

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = 10{,}91\,\vec{i} \text{ kg m/s} + 3{,}15\,\vec{j} \text{ kg m/s}$$

El modulo y la dirección será:

$$I = 11{,}4 \text{ kg m/s}; \alpha = 16°$$

Evaluación (página 274)

Señala la respuesta correcta en cada uno de los ejercicios:

1. Dos cuerpos, uno de 10 kg y otro de 15 kg, tendrán el mismo momento lineal si:

a) La velocidad del primero es 2/3 de la del segundo.

b) La velocidad del primero es 1/2 de la del segundo.

▶ *c)* La velocidad del primero es 3/2 de la del segundo.

2. Un cuerpo se moverá con velocidad constante si:

▶ *a)* No actúan fuerzas sobre él.

b) Actúa sobre él una fuerza constante que mantenga su velocidad.

▶ *c)* Las fuerzas que actúan sobre él se anulan.

3. Si no actúan fuerzas sobre un cuerpo:

▶ *a)* El cuerpo no se acelera.

b) El cuerpo estará en reposo.

c) El cuerpo acabará parándose si estaba en movimiento.

4. Las fuerzas de acción y reacción:

a) Solo son iguales si el cuerpo no está acelerando.

b) Actúan sobre el mismo cuerpo, son iguales y de sentidos opuestos.

▶ *c)* Actúan sobre cuerpos distintos.

5. Una misma fuerza actúa frenando dos cuerpos de masas m y m'. Si $m' = 3m$ y se movían con la misma velocidad:

▶ *a)* La aceleración negativa que adquiere m es el triple que la que adquiere m'.

b) El espacio que recorre m hasta detenerse es el triple que el que recorre m'.

c) Ambos recorren el mismo espacio hasta detenerse.

6. Si comunicamos el mismo impulso a dos cuerpos en reposo de masas m y m', y $m = 2m'$:

▶ *a)* Variamos su momento lineal en la misma cantidad.

b) Comunicaremos a ambos la misma velocidad.

▶ *c)* El cuerpo de masa m saldrá con la mitad de velocidad que el de masa m'.

7. Un sistema de referencia inercial es aquel que:

a) Se halla sometido a rotación uniforme.

▶ *b)* Está en reposo.

▶ *c)* Se mueve con velocidad constante.

8. Una fuerza de 20 N actúa sobre dos cuerpos, uno de 5 kg y otro de 10 kg, inicialmente en reposo:

▶ *a)* La velocidad del primero será en todo instante el doble que la del segundo.

b) Acabarán teniendo la misma velocidad, pues el segundo tiene el doble de inercia.

▶ *c)* El primero habrá recorrido el doble de distancia en cualquier instante.

9. Una fuerza, F, actúa sobre dos cuerpos de 5 kg y 15 kg de masa, respectivamente, y les comunica la misma velocidad:

a) Eso no es posible de ninguna manera.

b) Entonces, la fuerza ha actuado el triple de tiempo sobre la masa de 5 kg.

▶ *c)* Entonces, la fuerza ha actuado el triple de tiempo sobre la masa de 15 kg.

10. Una persona de masa m empuja en una pista sin rozamiento a otra de masa $m' = 1/2m$:

a) La persona de masa m' comenzará a moverse, y la de masa m permanecerá en reposo.

b) La persona de masa m nunca podrá ejercer fuerzas si no hay rozamiento.

▶ *c)* La persona de masa m' recorrerá el doble de distancia que la de masa m y en sentido opuesto.

11 Fuerzas en la naturaleza: aplicaciones

ESQUEMA DE LA UNIDAD

Cuestiones previas (página 275)

1. Cuando se detiene un cuerpo que estaba en movimiento es:

a) **Porque la fuerza que lo impulsaba ha dejado de actuar.**

b) **Porque ha actuado una fuerza que se opone al movimiento.**

Puede parecer redundante esta pregunta con respecto a las planteadas al inicio de la UNIDAD 10; sin embargo, el objetivo es comprobar que se han asimilado correctamente las leyes de Newton estudiadas allí y que a continuación se van a aplicar a numerosos problemas. Por consiguiente, no tendría que haber errores en la respuesta, y los alumnos deben decantarse sin problemas por la opción correcta, ***b)***.

2. Si tuvieses que arrastrar una caja pesada por el suelo, ¿cómo lo harías: intentando que el área de contacto con el suelo fuese la menor o la mayor posible? ¿Daría igual cualquiera de las dos opciones anteriores?

Se pretende con esta cuestión ver si tienen ya algunas ideas relativas al rozamiento. En teoría, deben haberlo estudiado en 4.° de ESO, pero, aun así, es muy posible que sigan relacionando mayor rozamiento con mayor superficie de contacto. A muchos alumnos les resulta chocante que el rozamiento entre dos cuerpos sea independiente del área de contacto entre ambos.

3. Si comprimes un muelle contra el suelo y lo sueltas, ¿qué fuerza es la que hace que el muelle se eleve?

No será fácil encontrar respuestas acertadas a esta pregunta, que no es trivial en este nivel de estudios. El cometido es hacer que los alumnos reflexionen que por lo menos tiene que haber una relación entre la compresión y el hecho de que el muelle salte.

Uno de los objetivos de esta unidad es el estudio de las fuerzas restauradoras. Sin embargo, puede guiárseles a una respuesta correcta haciéndoles ver la similitud que tiene esta pregunta con la situación de salto descrita en la unidad anterior al abordar las fuerzas de acción y reacción. En la propuesta de evaluación de la unidad se vuelve a plantear la pregunta (con respuesta múltiple). En las soluciones de la prueba se da cumplida respuesta.

Actividades (páginas 277/292)

1 PAU Si tu masa es de 60 kg y te encuentras en la superficie terrestre:

a) **¿Con qué fuerza te atrae la Tierra a ti? ¿Con qué fuerza atraes tú a la Tierra?**

b) **¿Qué aceleración te comunica a ti dicha fuerza? ¿Qué aceleración le comunica esa misma fuerza a la Tierra?**

c) **¿Te resulta familiar alguno de los valores obtenidos?**

Datos: masa de la Tierra: $6 \cdot 10^{24}$ kg; radio de la Tierra: 6 370 km.

a) Por aplicación de la expresión de la ley de gravitación, obtenemos que la fuerza de atracción entre la Tierra y una persona de 60 kg es:

$$F = 590 \text{ N}$$

b) Aplicando la segunda ley, se obtiene que la aceleración sobre la persona de 60 kg es:

$$a = 9{,}83 \text{ m/s}^2$$

mientras que la aceleración que esa misma fuerza comunica a la Tierra es:

$$a_T = 9{,}83 \cdot 10^{-23} \text{ m/s}^2$$

Este valor resulta ser tan pequeño que se puede concluir que la Tierra no se mueve.

c) La aceleración comunicada a la persona es la de la gravedad.

2 Trata de hacer una estimación de la altura sobre la superficie terrestre hasta la que es lícito considerar 9,8 m/s² como valor de *g* sin superar un 2 % de error.

Hasta unos 6 390 km del centro terrestre y, por tanto, a 10 km sobre la superficie, podemos considerar el valor de 9,8 m/s² sin superar el 2 % de error. A esa distancia, el valor de *g* es de aproximadamente 9,6 m/s².

3 PAU Determina el valor de la aceleración de la gravedad en Mercurio si su masa es 0,055 veces la masa terrestre y su radio es 0,38 veces el radio de la Tierra. En esas condiciones, ¿hasta qué altura máxima se elevaría un objeto lanzado verticalmente si con la misma velocidad en la Tierra se eleva 20 m?

$$g = G\frac{m_{\text{Mercurio}}}{r^2_{\text{Mercurio}}} = G\frac{0{,}055 \cdot m_T}{(0{,}38 \cdot r_T)^2} = 3{,}74 \text{ m/s}^2$$

La altura máxima en un lanzamiento vertical viene dada por $y = \frac{v_0^2}{2g}$. Si en la Tierra y en Mercurio el objeto es lanzado con la misma velocidad, por igualación tenemos:

$$2\, g_M y_M = 2\, g_T y_T$$

Por tanto:

$$y_M = y_T \cdot \frac{g_T}{g_M} = 52{,}4 \text{ m}$$

4 ¿Qué valor tiene *g* a 400 km de altura sobre la superficie terrestre? ¿Cómo se explica el estado de ingravidez de los astronautas que reparan satélites o habitan estaciones orbitales a esa altura?

La aceleración de la gravedad a esa altura es de 8,70 m/s², muy lejos, por tanto, de la «gravedad cero». La situación de ingravidez, como se comentó en la unidad anterior al hablar de sistemas de referencia, se debe al hecho de que los astronautas están en una caída libre continua, pero compuesta con la velocidad orbital necesaria para no llegar a «tocar suelo».

5 Teniendo en cuenta el carácter vectorial de $\vec{g}$, establece a qué distancia del centro de la Tierra se encuentra el punto donde la resultante de la gravedad lunar y terrestre es cero.

Datos: masa lunar: 0,012 m_T; distancia media Tierra-Luna: 384 000 km.

En ese punto se cumple que $g_T = g_L$, luego:

$$G\frac{m_T}{d^2} = G\frac{0{,}012 \cdot m_T}{(3{,}84 \cdot 10^8 - d)^2}$$

Resolviendo el valor de *d* (distancia del centro terrestre al punto considerado), se obtiene:

$$d = 346\,088 \text{ km}$$

6 Un bloque se halla en reposo sobre un plano inclinado. Se aumenta gradualmente la inclinación hasta llegar al punto en el que empieza a deslizarse. ¿Qué condición cumplen las fuerzas que actúan en la dirección del movimiento en ese preciso instante?

En ese preciso instante, la componente del peso en la dirección del plano se iguala en valor a la fuerza de rozamiento estática.

7 ¿Te da pie la cuestión anterior para idear un procedimiento para la medida experimental de los coeficientes de rozamiento? Detalla el procedimiento e indica cómo obtendrías el valor del coeficiente. ¿Qué tipo de coeficiente estarías midiendo?

En efecto, conocida la inclinación a la que se produce esta igualdad, podemos determinar el valor del coeficiente de rozamiento estático:

$$mg \operatorname{sen} \alpha = \mu mg \cos \alpha \Rightarrow \mu = \operatorname{tg} \alpha$$

8 Un disco se desliza por una superficie horizontal partiendo con una velocidad inicial de 3,5 m/s. Si su velocidad después de recorrer 2 m es de 2 m/s, ¿cuánto vale el coeficiente de rozamiento entre disco y suelo? ¿Qué tipo de coeficiente de rozamiento has determinado?

Puesto que tenemos la distancia que recorre el disco (2 m), la velocidad inicial (3,5 m/s) y la final (2 m/s), con cualquiera de las ecuaciones que conocemos de cinemática podemos calcular la aceleración:

$$v^2 = v_0^2 - 2ad \Rightarrow a = 2{,}06 \text{ m/s}^2$$

por otro lado:

$$ma = \mu\, mg$$

$$\mu = a/g = 0{,}21$$

El coeficiente determinado es cinético, puesto que el cuerpo está en movimiento.

9 PAU Un cuerpo es impulsado con una velocidad inicial v_o para que ascienda por un plano inclinado θ grados con la horizontal. Si el coeficiente de rozamiento cinético entre cuerpo y plano es μ_c, determina una expresión para:

a) **La aceleración del cuerpo durante el ascenso.**

b) **La distancia *s* que recorre en el ascenso hasta que se para.**

a) Durante el ascenso, la componente tangencial del peso y la fuerza de rozamiento se oponen al desplazamiento, por lo que la ecuación del movimiento queda:

$$-mg \operatorname{sen} \theta - \mu_c mg \cos \theta = ma$$

$$a = -g\,(\operatorname{sen} \theta + \mu_c \cos \theta)$$

b) La distancia *s* que recorre hasta que se para ($v = 0$) puede obtenerse a partir de:

$$v^2 = v_0^2 + 2as$$

$$0 = v_0^2 - 2g\,(\operatorname{sen} \theta - \mu_c \cos \theta)\, s$$

Despejando *s*, tenemos:

$$s = \frac{v_0^2}{2g\,(\operatorname{sen} \theta + \mu_c \cos \theta)}$$

10 PAU Una fuerza de 55 N empuja un bloque de 22 N de peso contra la pared. El coeficiente de rozamiento estático entre el cuerpo y la pared es 0,6. Si el bloque está inicialmente en reposo:

a) **¿Seguirá en reposo?**

b) **¿Cuál es la fuerza que ejerce la pared sobre el cuerpo?**

En este caso sería la fuerza de rozamiento la que podría impedir que el cuerpo cayera. El valor de dicha fuerza de rozamiento será:

$$F = \mu N = 0{,}6 \cdot 55 \text{ N} = 33 \text{ N}$$

a) Dado que el peso no supera el valor de la fuerza de rozamiento estática, el cuerpo no caerá.

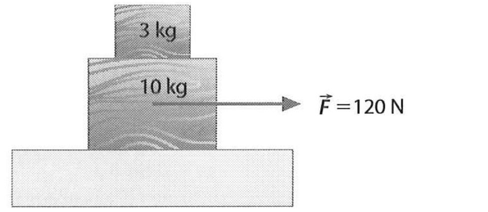
b) La pared ejerce una fuerza de 55 N sobre el cuerpo (la correspondiente reacción).

11 PAU Se coloca un bloque de 3 kg encima de otro de 10 kg, como se indica en la figura 11.11. El coeficiente de rozamiento cinético entre este último bloque y el suelo es de 0,25. Si sobre el bloque de 10 kg actúa una fuerza horizontal, *F*, de 120 N, determina:

a) **¿Qué aceleración adquiere el conjunto?**

b) **¿Qué fuerza provoca la aceleración del bloque de 3 kg?**

c) **¿Cuál debe ser el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático entre ambos bloques para que el de 3 kg no resbale?**



a) Con una fuerza de 120 N tendremos:

$$F - F_r = (m' + m)\, a$$

$$a = \frac{F - \mu\,(m' + m)\, g}{m' + m} = 6{,}78 \text{ m/s}^2$$

b) La fuerza de rozamiento estática entre ambos bloques es la que provoca la aceleración del bloque de 3 kg.

c) El cuerpo no resbalará mientras $ma \leq \mu' mg$. Por tanto, el mínimo valor de μ' para que esto no ocurra es:

$$\mu' = \frac{a}{g} = 0{,}69$$

12 Al colgar una masa de 500 g de sendos muelles, A y B, observamos que los estiramientos producidos son de 2 cm y 25 cm, respectivamente. ¿Cuál es el valor de *k* de cada muelle? ¿En qué unidades se mide?

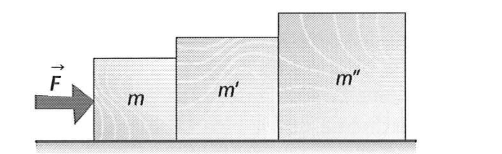
El valor de *k* para el muelle A es de 245 N/m, mientras que el valor de *k* para el muelle B es de 19,6 N/m. Se mide en newton dividido por metro (N/m).

13 PAU Tres cuerpos de masas *m*, *m'* y *m''*, respectivamente, reposan en contacto sobre una superficie horizontal (figura 11.21). Se aplica una fuerza, *F*, sobre el cuerpo de masa *m*, de modo que el sistema en su conjunto comienza a moverse. Si los coeficientes de rozamiento son distintos para cada cuerpo:

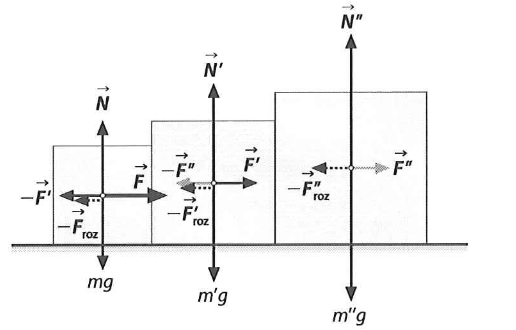
a) **Dibuja las fuerzas que actúan sobre cada uno de los cuerpos.**

b) **Determina la expresión de la aceleración del sistema.**

c) **Halla el valor de la aceleración si *F* = 30 N, *m* = 2 kg, *m'* = 3 kg, *m''* = 5 kg, $\mu_1 = 0{,}2$, $\mu_2 = 0{,}1$ y $\mu_3 = 0{,}3$.**



a) El esquema resultante de las fuerzas que actúan es:



Observa en este esquema, F es la fuerza general que se aplica sobre el sistema (y que actúa directamente sobre m), F' es la fuerza que m transmite a m', y F'' es la fuerza que m' transmite a m''. A su vez, en el diagrama se observan las correspondientes fuerzas de reacción a las acciones mencionadas, así como las diferentes fuerzas de rozamiento que actúan sobre cada cuerpo.

b) La ecuación dinámica para el sistema se reduce finalmente a:

$$F - (F_R + F'_R + F''_R) = (m + m' + m'')\ a$$

Despejando la aceleración, se obtiene:

$$a = \frac{F - (\mu_1 m + \mu_2 m' + \mu_3 m'')g}{m + m' + m''}$$

c) Sustituyendo en la anterior expresión los valores ofrecidos en el problema, resulta:

$$a = 0{,}84\ m/s^2$$

14 Deduce las ecuaciones que, en el caso de un descenso por un plano inclinado, nos informarían del espacio recorrido y de la velocidad en función del ángulo de inclinación y del tiempo.

Dado que la aceleración de descenso es $a = g$ sen α, tendremos que:

$$s = v_0 t + 1/2\ at^2 = v_0 t + 1/2\ g \text{ sen } \alpha \cdot t^2$$

$$v = v_0 + at = v_0 + g \text{ sen } \alpha \cdot t$$

15 PAU Dos masas de 6 y 9 kg penden de los extremos de una cuerda de masa despreciable en una máquina de Atwood. Si inicialmente la masa de 6 kg se encontraba 5 m por debajo de la de 9 kg, determina el tiempo que tardarán en cruzarse a la misma altura una vez que se abandone el sistema a su suerte.

Para empezar, conviene darse cuenta de que si la masas están separadas inicialmente 5 m, puesto que están atadas a la misma cuerda, se cruzarán cuando cada una de ellas haya recorrido la mitad, esto es, 2,5 m.

Por otro lado, una vez tenemos el espacio que ha de recorrerse y puesto que se supone que inicialmente las masas están en reposo ($v_0 = 0$), solo nos queda calcular la aceleración, cosa que podemos hacer con la expresión:

$$a = \frac{m' - m}{m' + m}\, g = 1{,}96\ m/s^2$$

Ya disponemos todos los datos para calcular el tiempo con cualquiera de las ecuaciones de cinemática. Por ejemplo:

$$s = s_0 + v_0 t + 1/2\ at^2$$

Despejamos el tiempo:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{2 \cdot \frac{2{,}5\ m}{1{,}96\ m/s^2}} = 1{,}6\ s$$

16 PAU Dos bloques de 3 kg cada uno cuelgan de los extremos de una cuerda que pasa por una polea; ¿qué peso debe añadirse a uno de los bloques para que el otro suba 1,6 m en 2 s?

La aceleración necesaria para que ascienda 1,6 m en 2 s es:

$$a = \frac{2y}{t^2} = 0{,}8\ m/s^2$$

Combinando las ecuaciones de movimiento de ambas masas, obtenemos:

$$m'g - mg = (m' + m)\ a$$

Es decir:

$$m' = \frac{mg + ma}{g - a} = 3{,}533\ kg$$

Por tanto, habría que añadir 533 g a una de las masas.

17 Resuelve la aplicación de la página 286 del *Libro del alumno* si el coeficiente de rozamiento entre m' y el plano es de 0,23.

Supongamos que el movimiento tuviera lugar hacia m. La ecuación de movimiento de m seguiría siendo:

$$mg - T = ma$$

La de m',sin embargo, sería:

$$T - m'g \text{ sen } \alpha - \mu m'g \cos \alpha = m'a$$

Por consiguiente:

$$a = \frac{m - m'(\text{sen } \alpha + \mu \cos \alpha)}{m + m'} \cdot g$$

Al resolver la expresión, saldría una aceleración negativa, lo que significa que no se moverá en ese sentido.

Debemos resolver la posibilidad de movimiento hacia el otro sentido. Si no obtuviésemos un valor positivo de aceleración, significaría sencillamente que el sistema estaría en equilibrio.

Replanteando las ecuaciones del movimiento, para el sentido en el que el bloque baja por el plano, ahora tendríamos:

- Para m':

$$m'g \text{ sen } \alpha - \mu m'g \cos \alpha - T = m'a$$

- Para m:

$$T - mg = ma$$

Resolviendo la aceleración, obtenemos:

$$a = \frac{m'(\text{sen } \alpha - \mu \cos \alpha) - m}{m + m'} \cdot g$$

Al dar valores, comprobamos que la aceleración también resultaría negativa. Por tanto, el sistema se encontrará en equilibrio.

18 ¿Qué relación deben guardar las masas de la actividad anterior para que se produzca una situación de equilibrio? ¿En qué casos se moverá en un sentido o en otro? Analiza la coherencia de tu resultado llevándolo a los casos extremos ($\alpha = 90°$ y $\alpha = 0°$). ¿Qué conclusiones sacas?

Analizando las dos expresiones obtenidas para la aceleración en los casos anteriores, comprobaremos que se hacen cero en los siguientes casos:

- Cuando:

$$m = m'(\text{sen } \alpha + \mu \cos \alpha)$$

- Cuando:

$$m = m'(\text{sen } \alpha - \mu \cos \alpha)$$

Es decir, el sistema se encontrará en equilibrio cuando:

$$m'(\text{sen } \alpha - \mu \cos \alpha) \leq m \leq m'(\text{sen } \alpha + \mu \cos \alpha)$$

En nuestro caso, si m está comprendido entre 0,9 kg y 2,1 kg, habrá equilibrio. Dado que la masa era de 2 kg, corresponde a una situación de equilibrio.

Si $\alpha = 90°$, habrá equilibrio cuando $m = m'$. Estaríamos en una situación equivalente a la de la máquina de Atwood, como cabría esperar.

Si $\alpha = 0°$, el plano sería horizontal y habría equilibrio si $m \leq \mu m'$, resultado congruente con el problema del plano horizontal.

19 Deduce una expresión para el período de oscilación o revolución del péndulo cónico en función de L y θ.

La fuerza centrípeta que actúa en el péndulo cónico es:

$$T \text{ sen } \theta = m\omega^2 r = m\omega^2 L \text{ sen } \theta$$

por lo que:

$$T = m\omega^2 L$$

como a su vez:

$$T = \frac{mg}{\cos \theta}$$

igualando, obtenemos:

$$\frac{g}{\cos \theta} = \frac{4\pi^2}{T^2} L$$

Despejando T, obtenemos:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L \cos \theta}{g}}$$

20 Trata de explicar ahora lo que sucede en los momentos de frenado al ascender y al descender.

En el momento de frenado al ascender, la situación es idéntica al arranque en descenso; levitaríamos momentáneamente. El frenado en descenso es idéntico al arranque en ascenso; en ese caso, nuestro peso parece aumentar.

21 PAU Una persona cuya masa es de 53 kg, decide experimentar lo explicado en este apartado subiéndose encima de una balanza en el interior del ascensor de su casa. Determina la lectura que dará la balanza en cada uno de los siguientes casos:

***a)* El ascensor está en reposo.**

***b)* Acelera hacia arriba a 2,5 m/s².**

***c)* Asciende con velocidad constante.**

***d)* Asciende frenando a razón de 2,0 m/s².**

***e)* Baja con una aceleración de 2,5 m/s².**

Posiblemente, para buena parte del alumnado pase desapercibida una dificultad de este problema y es la de las unidades. En nuestra vida cotidiana no usamos unidades de peso del sistema internacional (el newton) sino del técnico (también llamado terrestre); por lo tanto, la lectura de la balanza, en sentido estricto, no son kilogramos-masa (sistema internacional) sino kilogramos-fuerza o kilopondios.

En el sistema técnico, por otra parte, la unidad de masa es la UTM (Unidad Técnica de Masa), que equivale a 9,8 N del SI.

En este caso, resolveremos el problema en unidades del sistema internacional y dividiremos los sucesivos resultados por 9,8, factor de conversión entre el newton y los kg-f.

El valor de la fuerza que ejerce sobre el suelo es igual a N.

a) $N = mg = 519{,}4\ N = 53\ kg$

b) $N = m(g + a) = 651{,}9\ N = 66{,}5\ kg$

c) $N = mg = 519{,}4\ N = 53\ kg$

d) $N = m(g - a) = 413{,}4\ N = 42{,}2\ kg$

e) $N = m(g - a) = 386{,}9\ N = 39{,}5\ kg$

22 PAU La Tierra es un sistema en rotación y, por tanto, no inercial. Teniendo en cuenta que su radio es de 6 370 km y que efectúa una rotación completa en 23 h y 56 min, determina la fuerza centrífuga que actúa sobre una persona de masa m situada en:

***a)* Un punto del ecuador.**

***b)* Un punto de latitud 40° N.**

***c)* El polo.**

En primer lugar, pasamos las unidades al SI:

$$6\,370\ km = 6{,}37 \cdot 10^6\ m$$

$$23\ h\ y\ 56\ min = 8{,}62 \cdot 10^4\ s$$

Por otro lado, como $F_c = \dfrac{mv^2}{R} = m\omega^2 R$

a) $F_c = m\left(\dfrac{2\pi\ rad}{8{,}62 \cdot 10^4\ s}\right)^2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 = 0{,}034m\ N$

b) A una latitud de 40° N, el radio es $r = R \cos 40°$:

$$F_c = m\left(\frac{2\pi\ rad}{8{,}62 \cdot 10^4\ s}\right)^2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 \cdot \cos 40° = 0{,}027m\ N$$

c) En el polo el radio de giro es cero, por lo tanto, no habrá fuerza centrífuga.

23 ¿Cuál es la razón del ensanchamiento ecuatorial y achatamiento de los polos que hace que la Tierra no sea una esfera perfecta?

En la zona ecuatorial, la fuerza centrífuga sobre las masas es mayor y se opone a la fuerza de atracción gravitatoria. En consecuencia, la «gravedad efectiva» es menor en la zona ecuatorial que en las zonas polares. De ahí el «alejamiento» del centro de las masas en el ecuador y el «acercamiento» en la zonas polares.

Cuestiones y problemas (páginas 296/297)

La fuerza gravitacional

1 ¿De qué modo varía la duración de los años planetarios con la distancia al Sol?

Según la tercera ley de Kepler, $T^2 = kd^3$.

2 Razona cómo resuelve la ley de gravitación universal el problema de la caída libre.

A partir de la expresión de la fuerza gravitacional:

$$F_{grav} = G\frac{m_T m}{(r_T + h)^2} = ma \Rightarrow a = G\frac{m_T}{(r_T + h)^2}$$

Si $h << r_T$, resulta:

$$a = G\frac{m_T}{r_T^2}$$

La aceleración obtenida es la de la gravedad, g.

3 ¿Es constante el valor de la aceleración de la gravedad?

No. Varía con el inverso del cuadrado de la distancia al centro de la Tierra. Sin embargo, puede considerarse constante para valores de la altura, h, relativamente pequeños respecto al radio terrestre.

4 Razona la veracidad o falsedad de estas afirmaciones:

***a)* La Tierra atrae a todos los cuerpos en su seno con la misma fuerza, comunicándoles, por consiguiente, la misma aceleración.**

***b)* La fuerza con que la Tierra atrae a los cuerpos es proporcional a la masa de cada uno de ellos.**

***c)* La fuerza es distinta para cada cuerpo, como lo es también la aceleración que les comunica.**

a) Es falso. La Tierra atrae a los cuerpos que se encuentran en su seno con una fuerza que es proporcional a la masa del cuerpo atraído.

b) Cierto, como se ha comentado en el apartado anterior.

c) Falso. La fuerza es distinta, pero la aceleración es la misma.

5 ¿Pesa todo cuerpo material? ¿Tiene masa todo cuerpo con peso?

Los cuerpos materiales solo pesan en presencia de campos gravitatorios. El peso, por tanto, no es una propiedad de la materia, sino que es una propiedad de la materia en campos gravitacionales. Sin embargo, la masa es una propiedad de la materia independientemente de la existencia de campos gravitatorios. Por tanto, todo cuerpo está dotado de masa.

6 La masa de la Luna es 0,012 veces la terrestre y su radio es aproximadamente 1/4 del radio terrestre. ¿Cuánto vale g en la Luna?

El valor de g en la Luna será:

$$g_L = G\frac{m_L}{r_L^2} = G\frac{0{,}012 \cdot m_T}{(1/4 \cdot r_T)^2} = 1{,}88\ m/s^2$$

7 **Un cuerpo que se deja caer sobre la superficie terrestre desde una altura *h* llega al suelo con una velocidad *v*. ¿Cuánto debería valer comparativamente la altura en la Luna, *h'*, para que llegara al suelo con la misma velocidad que en la Tierra?**

Si consideramos que $g_L = 1/6\ g$, y dado que la velocidad con que llega al suelo un cuerpo que se deja caer desde una altura *h* es $v = \sqrt{2gh}$, para que la velocidad al llegar al suelo fuese igual, debe dejarse caer desde una altura seis veces superior. Es decir, $h' = 6\ h$.

8 **Deduce una expresión para calcular la velocidad orbital de los satélites, suponiendo que su órbita es estable y circular.**

La fuerza centrípeta que actúa sobre el satélite es la fuerza gravitacional. Desde el punto de vista del sistema de referencia centrado en el satélite, la fuerza centrífuga que operaría sobre él sería igual en valor a la gravitatoria. En cualquier caso:

$$G\frac{m_T m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

Despejando *v*:

$$v = \sqrt{G\frac{m_T}{r}}$$

donde $r = r_T + h$.

9 **Un astronauta de una estación orbital se coloca encima de una balanza. Indica, razonando tu respuesta, qué marcará la balanza.**

a) **El mismo peso que en Tierra.**

b) **El peso que corresponda al valor de *g* a esa distancia orbital.**

c) **Nada.**

No marcará nada. Tanto él como la balanza están sometidos a la misma aceleración. Es decir, ambos están en situación de caída libre.

10 **PAU** **¿A qué altura sobre la superficie terrestre debemos situar un satélite artificial si deseamos que esté siempre sobre la vertical del meridiano de Greenwich? ¿Cuál será su velocidad orbital? Datos: $m_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg; $r_T = 6\,370$ km**

Si llamamos *r* a la distancia desde el centro terrestre hasta el satélite, entonces $r = r_T + h$. Como hemos visto en la cuestión 8, un satélite en órbita cumplirá que:

$$G\frac{m_T m}{r^2} = m\omega^2 r$$

Como, a su vez, $\omega = 2\pi/T$, y dado que para que se mantenga siempre sobre el meridiano de Greenwich debe tener el mismo período de rotación que la Tierra (24 h = 86 400 s), entonces, sustituyendo y reorganizando, obtenemos:

$$r^3 = G\frac{m_T}{4\pi^2}T^2$$

Se trata de la expresión física de la tercera ley de Kepler. Resolviendo *r*:

$$r = 42\,191 \text{ km}$$

De este modo, si $r_T = 6\,370$ km, entonces $h = 35\,821$ km, y su velocidad orbital será:

$$v = \omega r = \frac{2\pi}{T}r = 3\,080 \text{ m/s}$$

La fuerza de rozamiento

11 **Junta tus manos oprimiendo una contra la otra, primero suavemente y posteriormente con más fuerza, y trata de deslizarlas. Explica lo que sucede y comprueba la validez de lo explicado referente a las fuerzas de rozamiento.**

La finalidad de este ejercicio es que se entienda que la fuerza que llamamos «normal» y que es directamente proporcional a la de rozamiento, no es sino la fuerza ortogonal que ejerce una superficie contra otra y que, cando mayor es, más se opone, lógicamente, al movimiento de deslizamiento.

12 **¿Qué factores intervienen en el rozamiento por deslizamiento?**

La fuerza normal que oprime un cuerpo contra el otro y la naturaleza de las superficies de contacto.

13 **Parece razonable pensar que la rugosidad de las superficies en contacto haga que aumente el rozamiento, y que, al pulir dichas superficies, este disminuya. Sin embargo, es frecuente observar que, cuando se pulen en exceso, el rozamiento vuelve a incrementarse. ¿Cómo explicarías esto?**

Investigaciones recientes sugieren que el rozamiento depende del área de contacto «real» a escala molecular. Si un mismo cuerpo se apoya sobre una menor superficie, el área de contacto aparente es menor, pero la presión de contacto (entendida como fuerza/superficie de contacto) es mayor. Este hecho se compensaría con una menor presión de contacto cuando el área de apoyo o contacto es mayor. Sin embargo, al pulirlo en exceso se aumenta el área de contacto real a escala molecular entre ambos cuerpos. Esto explicaría el aumento del rozamiento que se experimenta.

14 **En una atracción de feria que consiste en una plataforma circular con paredes verticales en forma de cilindro que gira a toda velocidad, de modo que las personas en su interior quedan «adheridas» a las paredes sin caerse, ¿qué fuerzas actúan sobre las personas y por qué estas no se precipitan al suelo?**

Desde el punto de vista de las personas, sobre ellas actúa una fuerza centrífuga que las «oprime» contra la pared. Esta fuerza «normal» debe originar el rozamiento preciso para igualar, como mínimo, el peso de la persona. Las personas no se precipitarán al suelo mientras:

$$\mu m\omega^2 r \geq mg \Rightarrow \mu\omega^2 r \geq g$$

Se observa que esta condición de equilibrio no depende de la masa de las personas.

D15 **Desde la base de un plano inclinado θ grados respecto de la horizontal se impulsa hacia arriba un bloque con velocidad inicial v_0. Si el coeficiente de rozamiento estático entre bloque y plano es μ_e y el coeficiente de rozamiento cinético es μ_c.**

a) **¿Cuál es la condición que determinará si el bloque queda en reposo una vez, se para o, por el contrario, vuelve a descender a la base?**

b) **Suponiendo que el bloque vuelve a descender, demuestra que las velocidades final (al volver a llegar a la base del plano) e inicial guardan la siguiente relación:**

$$\frac{v_f}{v_0} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\theta - \mu_c}{\operatorname{tg}\theta + \mu_c}}$$

a) Aunque es absolutamente cotidiano el fenómeno de que no cueste lo mismo poner algo en marcha que mantenerlo en movimiento, el concepto de que haya dos coeficientes de rozamiento, estático y dinámico, no suele ser fácilmente interiorizado por los alumnos. Una vez que el bloque que ha deslizado hacia arriba se ha detenido, la condición para que reinicie la marcha hacia abajo es simple:

$$F_t = mg\operatorname{sen}\theta > F_{r\,\text{estático}} = \mu_e\, mg\cos\theta$$

Por tanto, permanecerá en reposo en el punto más alto si $\operatorname{tg}\theta \leq \mu_e$.

Por el contrario, descenderá si $\operatorname{tg}\theta \geq \mu_e$.

b) Usaremos la ecuación $v^2 = v_0^2 \pm 2as$ para ambos movimientos.

- Subida: la fuerza tangencial gravitatoria y la de rozamiento (que siempre se opone al movimiento) se suman, de lo que, operando, obtenemos:

$$a = g\,(\operatorname{sen}\theta + \mu_c\cos\theta)$$

En este movimiento recordemos que se parte con una velocidad v_0 y la velocidad final es 0.

- Bajada: en esta ocasión, la fuerza tangencial tira hacia abajo (como siempre) y la de rozamiento se opone al movimiento, esto es, hacia arriba. Haciendo lo mismo que para la subida:

$$a = g\,(\operatorname{sen}\theta - \mu_c\cos\theta)$$

Por tanto, volviendo a la ecuación cinemática:

Subida: $0 = v_0^2 - 2as \Rightarrow v_0^2 = 2sg\,(\operatorname{sen}\theta + \mu_c\cos\theta)$

Bajada: $v_f^2 = 0 + 2as \Rightarrow v_f^2 = 2sg\,(\operatorname{sen}\theta - \mu_c\cos\theta)$

Dividiendo la segunda expresión entre la primera, simplificando, extrayendo la raíz cuadrada y, finalmente, dividiendo todos los miembros de numerador y denominador entre el coseno de θ obtenemos la relación buscada.

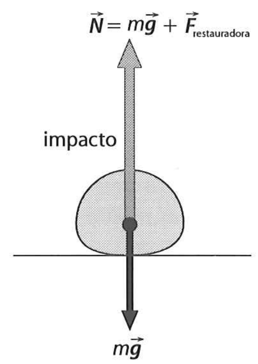
Las fuerzas elásticas o restauradoras

16 **Razona qué hace que una pelota elástica que cae al suelo salga rebotada hacia arriba. Explícalo desde el punto de vista de las fuerzas actuantes.**

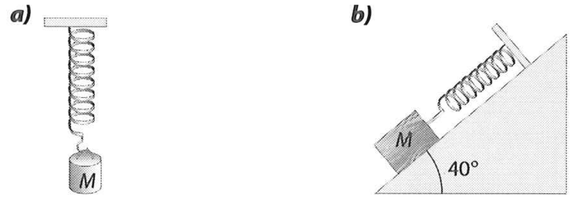
La pelota de goma se deforma cuando choca contra el suelo y, en realidad, el suelo también. Si este es rígido, podemos imaginarlo como un muelle con una gran fuerza restauradora frente a pequeñas deformaciones. Al deformarse la pelota, esta ejercerá una fuerza restauradora que actúa sobre el suelo. Por tanto, sobre el suelo actúan dos fuerzas: una igual en valor al peso de la pelota y otra que es la fuerza restauradora que la pelota ejerce sobre el suelo. Si este es rígido, responde con una reacción $\vec{N}$ (que actúa sobre la pelota) igual en valor a la suma del peso más la fuerza restauradora y que actúa verticalmente hacia arriba.

En consecuencia, podemos decir que la fuerza neta que actúa sobre la pelota es igual a la fuerza restauradora si el suelo es rígido. Esta fuerza neta está dirigida hacia arriba y es la causante de que la pelota se eleve de nuevo.

La complejidad, en este caso, radica en que la fuerza restauradora es variable en función de la deformación producida: es máxima cuando la pelota está totalmente deformada y cero cuando recupera su forma. Así pues, el diagrama en el momento del impacto será:



17 **Si la constante *k* del muelle de la figura es de 100 N/m, determina el estiramiento que sufrirá en los dos casos siguientes, si la masa es en ambas ocasiones de 5 kg. Repite el supuesto b) si el coeficiente de rozamiento es igual a 0,3.**



En el primer caso se cumple que:

$$kx = mg \Rightarrow x = 0{,}49 \text{ m} = 49 \text{ cm}$$

En el segundo caso:

$$kx = mg\operatorname{sen}\alpha \Rightarrow x = 0{,}31 \text{ m} = 31 \text{ cm}$$

En el tercer caso:

$$kx = mg\operatorname{sen}\alpha - \mu mg\cos\alpha \Rightarrow x = 0{,}2 \text{ m} = 20 \text{ cm}$$

Problemas en los que intervienen fuerzas

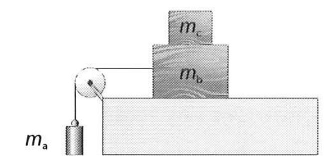
18 **¿Es cierto que los cuerpos con más masa llegan antes que los más ligeros al final de un plano inclinado si resbalan sin rozamiento?**

No. La aceleración con la que resbalan los cuerpos por un plano inclinado sin rozamiento es g sen α,independiente de la masa del cuerpo.

19 **Hacemos girar, mediante una cuerda, una esfera de madera en círculos verticales y en el sentido de las agujas del reloj. Si aumentamos el valor de la velocidad de giro, ¿qué persona tiene más posibilidades de sufrir un desagradable percance al romperse la cuerda: la que está a nuestra izquierda o la que se encuentre a nuestra derecha? ¿Por qué?**

La que está a nuestra izquierda tiene todas las de perder. La cuerda alcanza el mayor valor de tensión en el punto más bajo de la trayectoria. A su vez, el valor de esta es función de la velocidad, que también es mayor en el punto más bajo. Si la cuerda se rompe en el punto más bajo, al girar en el sentido de las agujas del reloj saldrá despedida la esfera hacia la izquierda.

20 **¿Cuánto debe valer la masa m_c de la figura para que el sistema esté en equilibrio si $m_a = 5$ kg, $m_b = 10$ kg y $\mu = 0{,}2$?**



Aplicando las ecuaciones de movimiento a cada uno de los bloques, y considerando como único el que forman m_b y m_c, se tiene:

$$m_a g - T = 0$$

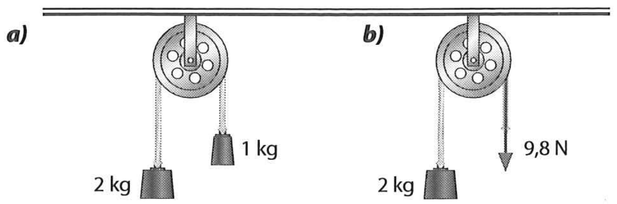
mientras que:

$$T - \mu\,(m_b + m_c)\,g = 0$$

Resolviendo el sistema, se obtiene:

$$m_c = 15 \text{ kg}$$

21 **PAU** **Las figuras a y b muestran dos máquinas de Atwood aparentemente similares. En el caso a se cuelga de un extremo de la cuerda una masa de 1 kg (9,8 N), mientras que en el caso b se tira directamente de la cuerda con una fuerza de 9,8 N. Determina la aceleración de la masa de 2 kg y la tensión de la cuerda, en ambos casos.**



- **Polea a:** Suponemos que el sistema se desplaza en el sentido de la masa de 2 kg. Por tanto, las ecuaciones del movimiento serán:

$$2\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 - T = 2\ \text{kg} \cdot a;\ T - 1\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 = 1\ \text{kg} \cdot a$$

$$a = 3{,}27\ \text{m/s}^2 \text{ y } T = 13{,}1\ \text{N}$$

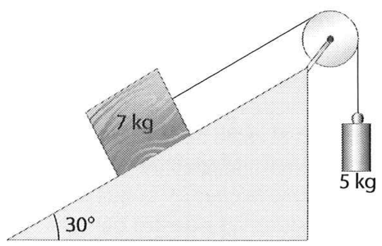
- **Polea b:** Suponemos, asimismo, que el sistema se mueve en el sentido de la masa de 2 kg. Por otra parte, en esta polea la tensión (fuerza con la que tira la cuerda) es conocida e igual a 9,8 N.

$$2\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 - 9{,}8\ \text{N} = 2\ \text{kg} \cdot a;\ a = 4{,}9\ \text{m/s}^2$$

22 Considerando despreciables las masas de la polea y la cuerda, indica cuál es la aceleración que adquieren las masas en el sistema de la figura, si:

a) **No hay rozamiento.**

b) **El coeficiente de rozamiento cinético vale 0,2.**



a) Si no hay rozamiento:

$$a = \frac{m - m'\text{sen}\,\alpha}{m + m'}\,g = \frac{5\ \text{kg} - 7\ \text{kg} \cdot \text{sen}\ 30°}{12\ \text{kg}}\ 9{,}8\ \text{m/s}^2 = 1{,}22\ \text{m/s}^2$$

b) Si existe rozamiento:

$$a = \frac{m - m'(\text{sen}\,\alpha + \text{m}\cos\alpha)}{m + m'}\,g = 0{,}23\ \text{m/s}^2$$

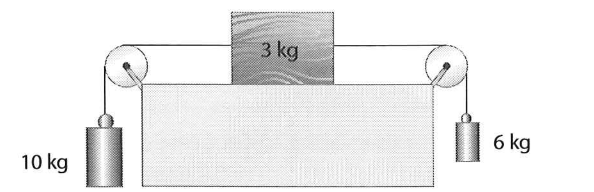
23 Demuestra que un sistema como el representado en el problema anterior estará en equilibrio si:

$$m\,(\text{sen}\,\alpha - \mu\cos\alpha) \le m' \le m\,(\text{sen}\,\alpha + \mu\cos\alpha)$$

donde m' es la masa que cuelga verticalmente.

Véanse las actividades 17 y 18 de desarrollo de la unidad.

24 PAU Determina la aceleración, así como el sentido del movimiento, del sistema de la figura si *a)* no hay rozamiento, *b)* el coeficiente de rozamiento es 0,3.



A la vista de las masas, el sistema, en caso de moverse, lo hará de modo que la masa central se desplace hacia la izquierda. Si no hay rozamiento, las ecuaciones de movimiento para cada cuerpo son:

- Para $m_a = 10$ kg: $m_a g - T = m_a a$
- Para $m_b = 3$ kg: $T - T' = m_b a$
- Para $m_c = 6$ kg: $T' - m_c g = m_c a$

En estas expresiones, T es la tensión de la cuerda que une m_a y m_b, mientras que T' es la tensión de la cuerda que une m_b y m_c. Sumando, obtenemos:

$$(m_a - m_c)\,g = (m_a + m_b + m_c)\,a$$

De este modo, $a = 2{,}06\ \text{m/s}^2$.

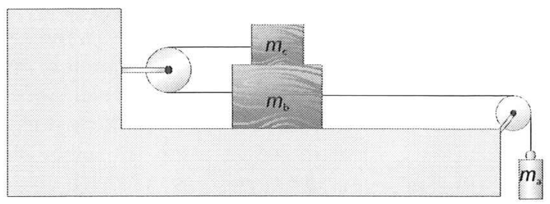
Si hay rozamiento, las ecuaciones de m_a y m_c quedarán iguales, pero la de m_b será:

$$T - T' - \mu m_b g = m_b a$$

Resolviendo a, obtenemos:

$$a = 1{,}59\ \text{m/s}^2$$

25 PAU En el sistema que muestra la figura, las masas tienen un valor de $m_a = 15$ kg, $m_b = 5$ kg, y $m_c = 3$ kg, y μ_c entre b y c es de 0,3. Si el rozamiento con la mesa y las poleas es despreciable (así como las masas de las poleas y la cuerda): determina la aceleración del sistema y halla las tensiones de las cuerdas.



Aplicando las ecuaciones de movimiento a cada cuerpo:

- Para m_a: $m_a g - T = m_a a$
- Para m_b: $T - T' - F_{r\,bc} = m_b a$
- Para m_c: $T' - F_{r\,bc} = m_c a$

Sumando las tres expresiones, obtenemos:

$$m_a g - 2F_{r\,bc}\,(m_a + m_b + m_c)\,a$$

La fuerza de rozamiento, $F_{r\,bc}$, es $\mu m_c g$. De este modo:

$$a = 5{,}62\ \text{m/s}^2$$

Sustituyendo el valor de la aceleración en la primera ecuación, obtenemos la tensión, T, y en consecuencia, T':

$$T = 62{,}7\ \text{N}$$

$$T' = 25{,}7\ \text{N}$$

26 Repite el problema anterior si el coeficiente de rozamiento cinético entre m_b y la mesa es de 0,2.

En este caso, la ecuación de movimiento para m_b será:

$$T - T' - F_{r\,\text{suelo}} - F_{r\,bc} = m_b a$$

Y la ecuación global será:

$$m_a g - \mu'(m_b + m_c)g - 2\,\mu m_c g = (m_a + m_b + m_c)a$$

por lo que:

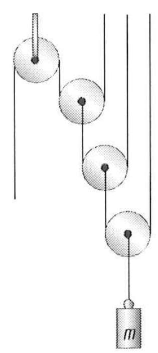
$$a = 4{,}94\ \text{m/s}^2$$

Resolviendo T y T', se obtiene:

$$T = 72{,}9\ \text{N}$$

$$T' = 23{,}6\ \text{N}$$

27 ¿Qué masa, *m*, conseguirías equilibrar con la tuya propia (dato personal) usando el sistema de poleas múltiples de la figura (llamado también polipasto)?



La tensión de la cuerda de la polea inferior es igual a $mg/2$. A su vez, la tensión en la cuerda de la polea inmediatamente superior es la mitad de la anterior, $mg/4$. Finalmente, la tensión en la cuerda que sujeta la última polea móvil será $mg/8$. Esta tensión coincide con la que soporta la cuerda de la polea fija.

Si tu masa es m', en el equilibrio se cumplirá que:

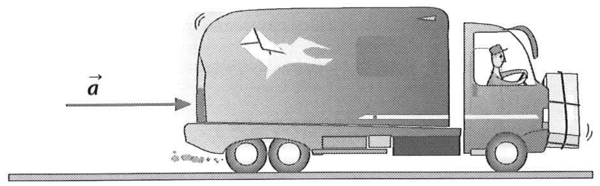
$$m'g = T$$

donde T es la tensión en la cuerda de la polea fija, que, como hemos visto, vale $mg/8$. Por tanto:

$$m'g = mg/8 \Rightarrow m = 8m'$$

Es decir, podrás equilibrar una masa ocho veces mayor.

D28 El coeficiente de rozamiento entre la caja y el camión de la figura es de 0,7. La masa de la caja es de 3 kg. En esas condiciones, ¿cuál debe ser la aceleración del conjunto para que la caja no caiga?



La fuerza que oprime la caja contra el camión es la propia fuerza motriz del camión. Por tanto, para que la caja no caiga, debe cumplirse:

$$\mu ma \ge mg \Rightarrow a \ge \frac{g}{\mu} = 14\ \text{m/s}^2$$

29 PAU Una persona de 65 kg de masa monta en un ascensor de 100 kg de masa para iniciar el descenso. El ascensor arranca con una aceleración de 2 m/s². Realizando previamente los diagramas de fuerzas pertinentes, determina, para ese momento:

a) **La tensión del cable que sujeta el ascensor.**

b) **La fuerza ejercida sobre el suelo del ascensor.**

a) Si m es la masa del ascensor y m' la de la persona, mientras desciende con aceleración constante, se cumplirá que:

$$(m + m')g - T = (m + m')a \Rightarrow T = 1\,287\ \text{N}$$

b) Concentrándonos en la persona y el suelo del ascensor, tendremos que:

$$mg - N = ma \Rightarrow N = 507\ \text{N}$$

donde N es la reacción normal del suelo, que coincide con la fuerza que ejerce la persona sobre el mismo.

D30 PAU Un cuerpo de 3 kg está suspendido de un hilo inextensible y sin masa de 1 m de longitud, cuyo extremo opuesto se halla unido a un punto fijo del techo. El cuerpo describe una circunferencia de 50 cm de radio en un plano horizontal.

a) **Calcula la tensión del hilo y el módulo de la velocidad.**

b) **Si en un cierto instante se rompe el hilo, halla el módulo de la velocidad en el momento en que el cuerpo llega al suelo, ten en cuenta que el techo está a una altura de 3 m.**

a) Con los datos de la longitud del hilo y del radio de la circunferencia podemos determinar el ángulo que forma el hilo con la vertical:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{0{,}5}{1} = 0{,}5 \Rightarrow \theta = 30°$$

Haciendo la descomposición de la tensión en sus componentes, se observa que:

$$T\cos 30° = mg \Rightarrow T = 34\ \text{N}$$

Como, por otra parte, $T\,\text{sen}\,30° = mv^2/r$, podemos concluir que $v = 1{,}68$ m/s.

b) La velocidad horizontal con la que sale el cuerpo es:

$$v_x = 1{,}68\ \text{m/s}$$

La altura a la que oscila la bola es:

$$h = 3 - L\cos 30° = 2{,}13\ \text{m (sobre el suelo)}$$

Así pues, cuando llegue al suelo, habrá adquirido una componente vertical, v_y, de valor:

$$v_y = \sqrt{2gh} = 6{,}46\ \text{m/s}$$

Por tanto, la velocidad total será:

$$v = 6{,}68\ \text{m/s}$$

Sistemas no inerciales: fuerzas de inercia

31 En la legendaria película de Stanley Kubrick *2001, una odisea en el espacio,* la nave tenía forma de rueda y giraba constantemente. ¿Cuál crees que era el motivo?

Al girar con la velocidad angular adecuada, los tripulantes sentirían una fuerza centrífuga que haría el papel de fuerza gravitacional, que los mantendría pegados al suelo.

El cuerpo humano no distingue la causa de la aceleración, sino su valor. Por ello, la habitabilidad en la nave sería confortable.

32 Si la longitud circular de la nave anterior era de 500 m, ¿a qué velocidad debería girar para ajustarse al motivo que has deducido en la cuestión anterior?

La aceleración centrífuga debería valer 9,8 m/s², por lo que la nave tendría que girar con la velocidad que genera dicha aceleración:

$$\frac{v^2}{r} = 9{,}8\ \text{m/s}^2$$

Si la longitud de la nave es de 500 m, su radio será de 79,6 m.

Sustituyendo en la expresión anterior, resulta:

$$v = 28\ \text{m/s}$$

D33 Teniendo en cuenta que el período de rotación terrestre es de 23 h 56 min y que el radio terrestre tiene un valor medio de 6 370 km, calcula el peso «efectivo» (considerando efectos centrífugos) de una persona de 70 kg en:

a) **El ecuador.**

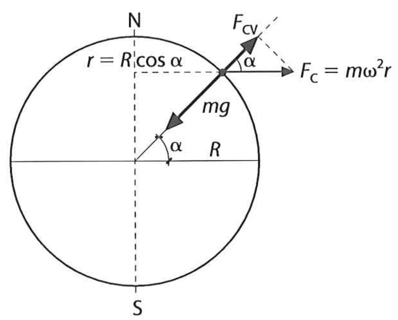
b) **Una latitud de 40° N.**

c) **El polo.**

a) En la actividad 22 de las desarrollo la unidad, calculábamos ya la fuerza centrífuga terrestre en la superficie del ecuador:

$$F_c = 0{,}034 \cdot m;\ P = (g - 0{,}034)\ m = 683{,}62\ \text{N}$$

b) A una altitud de 40°, el peso efectivo es la resultante de la fuerza de atracción gravitatoria y la componente, según la vertical del lugar, de la fuerza centrífuga, como se aprecia en el dibujo:



Por tanto, el peso efectivo P_e es:

$$P_e = mg - F_{cv} = m\,(g - \omega^2 r\cos\alpha)$$

De modo que:

$$P_e = m\,(g - \omega^2 R\cos^2\alpha) = 684{,}5\ \text{N}$$

c) Puesto que en el polo no hay F_c, el peso efectivo es:

$$mg = 686\ \text{N}$$

Evaluación (página 298)

Señala la respuesta correcta en cada uno de los ejercicios:

1. Los coeficientes de rozamiento:

a) Dependen de la fuerza normal que actúe entre los cuerpos.

b) Cinéticos son siempre mayores que los estáticos.

▶ *c)* Estáticos son siempre mayores que los cinéticos.

2. La gravedad a que está sometido un astronauta en órbita a 500 km de altura sobre la superficie terrestre:

a) Es nula.

▶ *b)* Tiene el valor de 8,4 m/s^2.

c) Tiene un valor de 0,98 m/s^2.

3. En situación de ingravidez:

a) Costaría lo mismo empujar a un elefante que a una pelotita, pues ninguno pesaría.

b) El concepto de inercia carece de sentido.

▶ *c)* Costaría muchísimo mover un elefante.

4. La fuerza de rozamiento de un cuerpo sobre una superficie horizontal:

▶ *a)* Es proporcional al peso del cuerpo.

▶ *b)* Es proporcional a la fuerza que oprime el cuerpo contra el suelo.

c) Solo depende de la masa del cuerpo.

5. Las fuerzas restauradoras que operan sobre un cuerpo sometido a deformación:

a) Son constantes.

b) Son inversamente proporcionales a la deformación producida.

▶ *c)* Son directamente proporcionales y opuestas a la deformación.

6. La fuerza responsable de la coexistencia de protones en el núcleo es:

a) La gravitatoria.

▶ *b)* La fuerte.

c) La electromagnética.

7. Cuando un ascensor arranca acelerando hacia arriba:

a) Nuestro peso aumenta.

▶ *b)* Aumenta la fuerza que ejercemos contra el suelo.

c) Disminuye la fuerza que ejercemos contra el suelo.

8. El coeficiente de rozamiento estático de un cuerpo puede medirse:

▶ *a)* Calculando la tangente del ángulo sobre el que empieza a resbalar el cuerpo.

b) Calculando el seno del ángulo sobre el que empieza a resbalar el cuerpo.

c) Midiendo la distancia que recorre hasta que se para después de lanzarlo con cierta velocidad.

9. Una misma fuerza:

a) Produce mayor alargamiento en muelles de mayor constante elástica.

▶ *b)* Produce mayor alargamiento en muelles de menor constante elástica.

c) Produce el mismo alargamiento independientemente de la constante elástica.

10. La Tierra:

a) Atrae, en su superficie, a todos los cuerpos con la misma fuerza.

▶ *b)* Atrae, en su superficie, con más fuerza a los cuerpos de mayor masa.

▶ *c)* Es atraída por una pluma con la misma fuerza con que ella atrae a la pluma.

12 Trabajo y energía mecánica

E S Q U E M A D E L A U N I D A D

Cuestiones previas (página 299)

1. **¿Por qué decimos que un cuerpo en movimiento posee energía? ¿Qué entiendes por energía?**

   Los conceptos de trabajo y energía mecánica se han estudiado en 4.° de la ESO. Cabe esperar, pues, que conozcan la relación entre ambos. La pregunta pretende incidir en la dificultad de definir conceptos de manejo frecuente en física; en este caso, la energía. Podemos dar una definición aproximada, que consiste en afirmar que es «la capacidad de realizar un trabajo y (o) de transferir calor». Decimos que un cuerpo en movimiento posee energía porque es capaz de realizar un trabajo (por ejemplo, mover otro objeto que inicialmente estaba en reposo, o clavar una estaca en el suelo...).

2. **¿Cuándo decimos que se realiza un trabajo?**

   Es frecuente que en este nivel confundan trabajo con esfuerzo. Debe quedar claro en esta unidad cuál es la acepción física de trabajo: «desplazamiento bajo la acción de una fuerza que actúa total o parcialmente en la dirección de dicho desplazamiento».

3. **Cuando un cuerpo se eleva, suele afirmarse que aumenta su energía potencial. ¿Por qué?**

   Porque si cae, se desplazará a lo largo de más metros bajo la acción de su propio peso, es decir, realizará más trabajo, lo que exige una mayor energía potencial previa.

4. **¿Qué entiendes por el término «potencia»?**

   RESPUESTA LIBRE.

5. **Un péndulo que oscila deja de hacerlo al cabo de un tiempo. ¿Qué ha sucedido con su energía? ¿En qué ha podido transformarse?**

   Por ejemplo, en calor, provocado por el rozamiento de la lenteja del péndulo con el aire.

Actividades (páginas 301/316)

1 **Aplicando la expresión $v^2 - v_0^2 = 2as$ al caso de la caída libre de los objetos, obtenemos esta otra expresión:**

$$v^2 = 2gy$$

Demuestra que a partir del producto del peso (mg) por la altura (y) se obtiene la cantidad mv^2.

$$y = \frac{v^2}{2g}$$

Sustituyendo:

$$mgy = mg\frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2}mv^2$$

Con lo que, en la expresión, queda clara la relación entre el producto de la fuerza actuante por la altura y la cantidad mv^2, que dio en llamarse *vis viva*.

2 **Sobre un cuerpo de 2 kg de masa, que se mueve inicialmente con una velocidad de 10 m/s, actúa una fuerza constante de 8 N opuesta al desplazamiento, que logra finalmente que el cuerpo se detenga. Calcula el trabajo realizado por dicha fuerza.**

El trabajo es negativo, pues la fuerza actuante se ejerce en sentido contrario al desplazamiento. Con los datos de que disponemos podemos calcular la aceleración y el desplazamiento.

$$F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{8\ \text{N}}{2\ \text{kg}} = 4\ \text{m/s}^2$$

Por otra parte,

$$v^2 = 0 = v_0^2 - 2as \Rightarrow s = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{(10\ \text{m/s})^2}{2 \cdot 4\ \text{m/s}^2} = 12{,}5\ \text{m}$$

Finalmente:

$$W = Fs = 8\ \text{N} \cdot 12{,}5\ \text{m} = -100\ \text{J}$$

(el signo negativo indica que, como se señalaba al principio, el trabajo se opone al desplazamiento).

3 **PAU** **Suponiendo un átomo de hidrógeno según el modelo de Bohr, en el que el electrón describe órbitas circulares alrededor del núcleo, ¿qué fuerza es la responsable del movimiento circular del electrón? ¿Qué trabajo realiza dicha fuerza sobre el electrón?**

La fuerza responsable del movimiento circular del electrón no es otra que la centrípeta. Ahora bien, esta fuerza es perpendicular al desplazamiento y, por lo tanto, no realiza ningún trabajo.

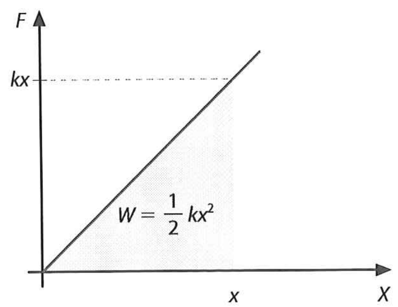
4 **Si se deja caer libremente una bola de petanca de acero de 2 kg desde una altura de 3 m, ¿hay alguna fuerza que realice trabajo? Si es así, calcúlalo.**

La fuerza que realiza trabajo es la de la gravedad, el peso.

Por lo tanto,

$$W = Ph = mgh = 2\ \text{kg} \cdot 3\ \text{m} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 = 58{,}8\ \text{J}$$

5 **Determina gráficamente una expresión para el trabajo realizado cuando estiramos un muelle de constante recuperadora k desde su posición de equilibrio ($x = 0$) hasta una posición x. Resuélvela para el caso en que $k = 200$ N/m y $x = 5$ m.**



El área encerrada bajo la gráfica es la de un triángulo. Por tanto:

$$\text{Área} = 1/2\ \text{altura} \cdot \text{base} = 1/2\ Fx = 1/2\ kx \cdot x = 1/2\ kx^2$$

Es decir, el trabajo vale $1/2\ kx^2$.

Si $k = 200$ N/m y $x = 5$ m se obtiene:

$$W = 2\,500\ \text{J}$$

6 **¿Qué trabajo realiza un telesquí (figura 12.12) cuando te remonta con velocidad constante a lo largo de 2 km de una pista de un 20 % de pendiente, si suponemos que no hay rozamiento? (Considera m = 60 kg). ¿Qué fuerza ejerce sobre ti el remonte en esas condiciones si se encuentra inclinado 40° con respecto a la pista?**

Al ascender con velocidad constante, el trabajo realizado por el conjunto de fuerzas que operan sobre el esquiador sería cero. Sin embargo, en la cuestión se pregunta por el trabajo realizado por el telesquí. Si no hay rozamiento, la componente de la fuerza ascendente paralela a la pista es igual en módulo a mg sen α. Dado que esta es la componente de la fuerza ejercida por el telesquí que realiza el trabajo, su valor será:

$$W = mg\ \text{sen}\ \alpha \cdot d$$

El valor del ángulo se deduce a partir del porcentaje de la pendiente, teniendo en cuenta que:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{20}{100} = 0{,}2 \Rightarrow \alpha = 11{,}31°$$

Sustituyendo, resulta:

$$W = 230\,633\ \text{J}$$

En cuanto a la fuerza, F, que ejerce el telesquí sobre el esquiador, podemos calcularla teniendo en cuenta que el módulo de su componente en la dirección de la pista vale mg sen α, por lo que:

$$F \cos 40° = mg\ \text{sen}\ \alpha$$

Por lo tanto:

$$F = 150{,}45\ \text{N}$$

7 **PAU** **Un cuerpo de 3 kg se desliza por un plano inclinado 45° con respecto a la horizontal desde una altura de 5 m. El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano es de 0,32. Determina:**

a) **El trabajo realizado sobre el cuerpo por cada una de las fuerzas que actúan, hasta que llega al final del plano.**

b) **El trabajo total realizado sobre el cuerpo en todo el trayecto.**

a) El trabajo realizado por la componente P_t del peso es:

$$W_1 = mg\ \text{sen}\ \alpha \cdot d \cos 0° = 147\ \text{J}$$

donde:

$$d = \frac{h}{\text{sen}\ 45°}$$

El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento es:

$$W_{roz} = \mu mg \cos \alpha \cdot d \cos 180° = -47{,}04\ \text{J}$$

b) Por tanto, el trabajo total realizado sobre el cuerpo a lo largo de todo el trayecto es:

$$W = W_1 + W_{roz} = 99{,}96\ \text{J}$$

8 **Cierto automóvil que circula a 129 km/h está sometido a una fuerza de fricción con la carretera de 211 N y a una fricción con el aire de 830 N. ¿Qué potencia debe desarrollar en esas condiciones para mantener constante esa velocidad? Expresa el resultado en kilovatios (kW) y en CV.**

La fuerza que debe ejercer el motor ha de ser igual, en módulo, a la suma de las fuerzas de fricción. Es decir:

$$F = 1\,041\ \text{N}$$

Dado que la velocidad constante, expresada en m/s, es de 35,83 m/s, la potencia desarrollada por el motor para mantener constante dicha velocidad es:

$$P = Fv = 1\,041\ \text{N} \cdot 35{,}83\ \text{m/s} = 37\,300\ \text{W}$$

$$P = 37{,}3\ \text{kW}$$

Como 1 CV = 735 W, este valor equivale a:

$$P = 50{,}75\ \text{CV}$$

9 **¿Qué factores crees necesario «optimizar» para conseguir una mayor velocidad a una determinada potencia?**

Fundamentalmente se trata de buscar los factores que permitirían reducir el valor de la fuerza motriz necesaria para alcanzar dicha velocidad. Como hemos visto en el ejemplo anterior, esto pasa por tratar de reducir al máximo la fricción con el aire (evidentemente, no es aconsejable reducir la fricción con el suelo), así como la fricción interna de los mecanismos móviles del motor. Por ello, el diseño de líneas más aerodinámicas, la investigación de lubricantes y la optimización de motores son los aspectos más importantes en la industria automovilística.

10 **Se necesita realizar un trabajo de 10 MJ (megajulios). Compara los tiempos de ejecución que emplearían motores de 50 CV, de 80 CV y de 40 kW. ¿Cuál es el más recomendable?**

En primer lugar, pasemos las unidades de las potencias al SI:

Como 1 CV = 735 W, entonces:

50 CV = 36 750 W = 36,75 kW y 80 CV = 58 800 W = 58,8 kW

Por otro lado, como $t = \dfrac{W}{P}$

$$t_1 = \frac{10^7\ \text{J}}{36{,}75 \cdot 10^3\ \text{W}} = 272\ \text{s}$$

$$t_2 = \frac{10^7\ \text{J}}{58{,}8 \cdot 10^3\ \text{W}} = 170\ \text{s}$$

$$t_3 = \frac{10^7\ \text{J}}{40 \cdot 10^3\ \text{W}} = 250\ \text{s}$$

Parece obvio que el menor tiempo lo lleva a cabo el segundo motor, cosa por otra parte lógica, teniendo en cuenta que una vez hemos unificado las unidades, es el de mayor potencia.

11 **En centros de investigación sobre láseres se han conseguido pulsos de láser de 10 femtosegundos y 100 mJ (milijulios). ¿Cuál es la potencia de ese pulso? Exprésala en teravatios. (Datos: 1 fs = 10^{-15} s ; 1 tW = 10^{12} W).**

$$P = \frac{W}{t} \Rightarrow \frac{100 \cdot 10^{-3}\ \text{J}}{10 \cdot 10^{-15}\ \text{s}} = 10^{13}\ \text{W} = 10\ \text{tW}$$

10 teravatios es del orden de la generada por todas las centrales eléctricas de la Tierra.

12 **Sobre un cuerpo de 5 kg de masa que se mueve con un velocidad de 2 m/s se realiza un trabajo de 50 J. ¿Cuál será su velocidad final?**

Aplicando el teorema de las fuerzas vivas:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + W$$

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot v_f^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2^2 + 50$$

Despejamos la velocidad

$$v_f = 4{,}89\ \text{m/s}$$

13 **Deduce, haciendo uso exclusivamente del teorema de las fuerzas vivas, una expresión para la máxima altura que alcanza un objeto lanzado verticalmente con una velocidad inicial v_0.**

Se trata de resolver la conocida expresión de altura máxima, pero aplicando el teorema de las fuerzas vivas, es decir:

$$W = E_{c\ \text{final}} - E_{c\ \text{inicial}}$$

La única fuerza que actúa sobre el cuerpo durante el ascenso es su propio peso (mg), mientras que el desplazamiento hasta alcanzar la máxima altura es $h_{máx} - h_{suelo}$, que coincide con $h_{máx}$ si consideramos como cero la altura del suelo. Por tanto, el trabajo realizado por la fuerza gravitacional durante el ascenso es:

$$W = mgh \cos 180° = -mgh_{máx}$$

Como en el punto de máxima altura la velocidad es cero, también lo es su energía cinética, por lo que:

$$-mgh_{máx} = 0 - 1/2\ mv_0^2$$

Despejando, obtenemos la conocida expresión:

$$h_{máx} = \frac{v_0^2}{2g}$$

14 **PAU** **La fuerza de fricción entre las ruedas de un coche de 1 300 kg y el suelo es de 220 N. Si el coche se mueve por una pista horizontal a una velocidad de 110 km/h y se deja en punto muerto, ¿qué distancia recorrerá hasta que se**

detenga por completo? Resuelve el problema por métodos energéticos y dinámicos y comprueba la identidad de los resultados.

La fricción realiza el trabajo necesario para detenerlo, por lo que:

$$W_{roz} = F_{roz} d \cos 180° = -F_{roz} d$$

Como:

$$W_{roz} = \Delta E_c$$

Entonces:

$$-F_{roz}\, d = 0 - 1/2\, mv_0^2$$

Por lo que:

$$d = \frac{mv_0^2}{2F_{roz}} = 2\,758{,}5 \text{ m}$$

Resolviendo el problema por métodos dinámicos, la aceleración de frenado originada por la fuerza de rozamiento vale:

$$a = \frac{F_{roz}}{m} = 0{,}169 \text{ m/s}^2$$

De este modo:

$$v^2 = 0 = v_0^2 - 2ad$$

Por lo que:

$$d = \frac{v_0^2}{2\,a} = 2\,758{,}5 \text{ m}$$

15 PAU **Sobre un cuerpo de 750 g que se movía con una velocidad de 2,5 m/s actúa una fuerza de 15 N en la misma dirección y sentido de la velocidad durante 10 s. Determina:**

a) **El trabajo realizado por la fuerza.**

b) **La energía cinética final del cuerpo.**

c) **La velocidad final que alcanza (por medios energéticos y dinámicos).**

Debemos calcular en primer lugar el desplazamiento que efectúa dicho cuerpo durante los 10 s, para lo que necesitaremos determinar la aceleración del movimiento:

$$a = \frac{F}{m} = 20 \text{ m/s}^2$$

Por tanto:

$$s = v_0 t + 1/2 at^2 = 1\,025 \text{ m}$$

a) El trabajo realizado por la fuerza es:

$$W = F\, s \cos 0° = 15 \text{ N} \cdot 1\,025 \text{ m} \cdot 1 = 15\,375 \text{ J}$$

b) Aplicando el teorema de las fuerzas vivas:

$$E_c \text{ (final)} = W + E_c \text{ (inicial)} = 15\,377{,}3 \text{ J}$$

c) La velocidad final a partir de su energía cinética será:

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = 202{,}5 \text{ m/s}$$

Por métodos dinámicos:

$$v = v_0 + at = 202{,}5 \text{ m/s}$$

16 **En una de sus infructuosas persecuciones tras el Correcaminos, el Coyote, de 45 kg, está a punto de caer por un precipicio de 50 m de altura. Determina cuánto variará la energía potencial del Coyote y con qué velocidad aterrizará el pobre animal.**

Su variación de energía potencial es:

$$E_{pf} - E_{p0} = 0 - mgh = -22\,050 \text{ J}$$

Como el trabajo realizado por la fuerza gravitacional es igual a la variación negativa de energía potencial, e igual a la variación de energía cinética, tendremos:

$$\Delta E_c = -\Delta E_p$$

Por lo que:

$$1/2\, mv_f^2 = -(-mgh) = mgh$$

Por tanto:

$$v_f = \sqrt{2gh} = 31{,}3 \text{ m/s}$$

17 PAU **Se deja caer un objeto de 2 kg desde 100 m de altura. Calcula:**

a) **Su energía potencial inicial.**

b) **Su energía potencial cuando se encuentre a 50 m del suelo.**

c) **Su velocidad y su energía cinética a 50 m de altura.**

d) **La suma de ambas energías a esa altura.**

¿Qué conclusión obtienes?

a) Su energía potencial inicial viene dada por:

$$E_{p0} = mgh_0 = 1\,960 \text{ J}$$

b) A 50 m del suelo, su energía potencial es:

$$E'_p = mgh' = 980 \text{ J}$$

c) Dado que el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria equivale al aumento de energía cinética (siendo cero la inicial al ser una caída libre), entonces:

$$F\,\Delta y = E_{cf}$$
$$-mg\,(h - h_0) = E_{cf}$$

Sustituyendo los valores, obtenemos $E_{cf} = 980$ J.

Por otra parte, si despejamos la velocidad de la igualdad anterior, el resultado será:

$$v = \sqrt{2g\,(h_0 - h)} = 31{,}3 \text{ m/s}$$

d) Como se comprueba, la suma de ambas energías a esa altura equivale a la energía inicial, lo cual quiere decir que el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria mantiene constante la energía mecánica.

18 **Sobre un muelle vertical de constante $k = 200$ N/m se coloca una masa de 500 g. Posteriormente se cambia la masa por otra de 2 kg. Determina la energía potencial elástica que se almacena en el muelle en cada caso.**

En primer lugar, vamos a calcular cuánto se deforma el muelle en ambos casos:

$$x = \frac{F}{k} = \frac{mg}{k}$$

- Para la masa de 0,5 kg: $x = \dfrac{0{,}5 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2}{200 \text{ N/m}} = 0{,}0245$ m

$$E_{p\,\text{elástica}} = 1/2\, kx^2 = \frac{1}{2} \cdot 200 \text{ N/m} \cdot (0{,}024\,5 \text{ m})^2 = 0{,}06 \text{ J}$$

- Para la masa de 2 kg: $x = \dfrac{2 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2}{200 \text{ N/m}} = 0{,}098$ m

$$E_{p\,\text{elástica}} = 1/2\, kx^2 = \frac{1}{2} \cdot 200 \text{ N/m} \cdot (0{,}098 \text{ m})^2 = 0{,}96 \text{ J}$$

19 **Un cuerpo de 0,5 kg de masa se deja caer desde una altura de 1 m sobre un pequeño resorte vertical sujeto al suelo y cuya constante elástica es $k = 2\,000$ N/m. Calcula la deformación máxima del resorte.**

Toda la energía potencial gravitatoria se transforma finalmente en energía potencial elástica almacenada en el muelle:

$$mgh = 1/2\, kx^2$$

de donde se obtiene que $x = 0{,}07$ m $= 7$ cm.

20 PAU **Comprueba que el trabajo realizado por la fuerza gravitacional en una trayectoria cíclica o de ida y vuelta es nulo en el caso del lanzamiento vertical de un cuerpo de masa m hasta una altura h.**

La fuerza que actúa en ascenso es $-mg\vec{j}$, mientras que el desplazamiento es $(h - 0)\vec{j}$, por lo que el trabajo realizado durante el ascenso es:

$$W_{ascenso} = -mg\,(h - 0) = -mgh$$

En el descenso, la fuerza que actúa es $-mg\vec{j}$, mientras que el desplazamiento es $(0 - h)\vec{j}$, de modo que el trabajo realizado por la fuerza gravitacional durante el descenso es:

$$W_{descenso} = -mg\,(0 - h) = mgh$$

Por tanto, el trabajo total realizado por la fuerza gravitatoria en el trayecto de ida y vuelta es cero, lo que demuestra que se trata de una fuerza conservativa.

21 **Demuestra que el trabajo total realizado por la fuerza elástica de un muelle durante una oscilación completa de ida y vuelta entre las posiciones extremas A y B es nulo.**

Si tenemos en cuenta el carácter conservativo de la fuerza elástica, el trabajo realizado por ella entre la posición inicial A y la final B es igual a la variación negativa de energía potencial, por lo que:

$$W_{AB} = E_{PA} - E_{PB} = 1/2\, k\,(x_A^2 - x_B^2)$$

Mientras que en el trayecto de vuelta que completa la oscilación observaremos que:

$$W_{BA} = E_{PB} - E_{PA} = 1/2\, k\,(x_B^2 - x_A^2)$$

Al sumar ambos trabajos para calcular el trabajo total, se comprueba que este es cero, como corresponde al caso de una fuerza conservativa, que es la que nos ocupa.

22 PAU **Un péndulo cuyo hilo mide 2 m, que sujeta una bola de masa m, es desplazado 60° con respecto a la vertical. Si en esa posición se suelta:**

a) **¿Cuál será su velocidad al pasar por el punto más bajo?**

b) **¿Qué energía cinética tendrá cuando el hilo forme 15° con la vertical?**

a) La altura inicial del péndulo será:

$$h = l - l \cos 60° = 1 \text{ m}$$

Por conservación de la energía mecánica, tendremos:

$$(E_p + E_c)_{inicial} = (E_p + E_c)_{final}$$

Por lo que:

$$mgh = 1/2\, mv_f^2 \Rightarrow v_f = 4{,}4 \text{ m/s}$$

b) Cuando el hilo forme 15° con la vertical, aún conserva parte de la energía potencial, pues está a cierta altura, h':

$$h' = l - l \cos 15° = 0{,}068 \text{ m}$$

Aplicando la conservación de la energía mecánica, tenemos:

$$mgh = mgh' + E_c \Rightarrow E_c = mg(h - h') = 9{,}13m \text{ J}$$

La velocidad es:

$$v = 4{,}27 \text{ m/s}$$

23 PAU **Explica con detalle todas las transformaciones de energía que se producen en un salto con pértiga. En este caso, ¿debemos hablar de cuerpo o de sistema?**

Podemos decir, a *grosso modo*, que la energía cinética conseguida por el saltador en la carrera se transforma en energía potencial elástica de la pértiga en su máximo estado de curvatura. Esta energía potencial elástica, cuando el saltador está en su máxima altura, se transforma en potencial gravitatoria que posteriormente se va convirtiendo en energía cinética durante el descenso. Por último, toda la energía mecánica se emplea en el trabajo de deformación de las colchonetas cuando el saltador aterriza.

En el análisis expuesto, no hemos considerado las pérdidas debidas a la fricción.

24 **Un cuerpo comienza a ascender por un plano inclinado 30° con una velocidad inicial de 4 m/s. Si el coeficiente de rozamiento con el plano es de 0,2, calcula hasta qué altura asciende.**

La variación en la energía mecánica del sistema es igual al trabajo realizado por la fuerza no conservativa de rozamiento. Como dicha fuerza se opone al desplazamiento, su trabajo será negativo e igual a:

$$W_{roz} = -\mu mg \cos 30° \cdot d$$

Como, a su vez, $d = \dfrac{h}{\text{sen } 30°}$, el trabajo realizado por el rozamiento puede expresarse como:

$$W_{roz} = \frac{-\mu mgh \cos 30°}{\text{sen } 30°}$$

Por tanto:

$$W_{roz} = \Delta E_{mec}$$

De este modo:

$$\frac{-\mu mgh \cos 30°}{\text{sen } 30°} = mgh - 1/2\, mv_0^2$$

Resolviendo, obtenemos $h = 0{,}6$ m.

25 **Un cuerpo es lanzado con una velocidad inicial v_0 desde la base de un plano inclinado de 45°. Si el coeficiente de rozamiento es μ, demuestra que la altura hasta la que asciende viene dada por la expresión:**

$$h = \frac{v_0^2}{2g\,(1 + \mu)}$$

Si despejamos la altura h en la igualdad que aparece en la actividad anterior, se obtiene:

$$h = \frac{v_0^2}{2g\,(1 + \mu \cos \alpha/\text{sen } \alpha)}$$

La expresión, llevada al caso que nos plantea la actividad ($\alpha = 45°$), conduce a:

$$h = \frac{v_0^2}{2g\,(1 + \mu)}$$

26 **Si dos núcleos de masas m_1 y m_2 se unen para formar un nuevo núcleo de masa m_3, menor que la suma de m_1 y m_2, ¿será estable o inestable el nuevo núcleo? Razona tu respuesta.**

Será estable, ya que en el proceso de formación se ha liberado una cantidad de energía igual a $\Delta m\, c^2$. Es decir, la diferencia de masa se ha transformado en la energía liberada.

27 **¿Cuál es la masa equivalente a 1 J de energía?**

Aplicando la ecuación de Einstein:

$$\Delta E = \Delta m\, c^2$$

Luego:

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{1 \text{ J}}{(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2} = 1{,}11 \cdot 10^{-17} \text{ kg}$$

Cuestiones y problemas (páginas 320/321)

Concepto de trabajo

1 **¿Qué diferencia hay entre la concepción ordinaria del trabajo cotidiano y el concepto físico de trabajo?**

El trabajo en el lenguaje ordinario se asocia más al esfuerzo que a la concepción física, donde se exige, además, que haya un desplazamiento en la dirección de la fuerza o de alguna de sus componentes.

2 **Si sobre un cuerpo actúa una fuerza de 10 N y se desplaza 10 m, entonces el trabajo realizado por esa fuerza vale 100 J. ¿Es esto cierto o consideras que falta información para resolver este problema?**

No es cierto. Faltaría saber la dirección en la que actúa la fuerza en relación con la dirección del desplazamiento.

3 **¿Realiza un trabajo cualquier fuerza que actúa sobre un cuerpo en movimiento?**

No. Solo aquellas fuerzas que tienen componente en la dirección del desplazamiento.

4 **¿Cómo podemos calcular el trabajo en una gráfica fuerza-desplazamiento?**

Calculando el área encerrada bajo la gráfica.

5 **¿Qué trabajo mecánico se realiza al sostener un cuerpo de 10 kg durante 15 min?**

No se realiza trabajo alguno al sostener un cuerpo. Es necesario desplazarlo para que exista trabajo.

6 **¿Cuánto vale el trabajo realizado por la fuerza centrípeta sobre un cuerpo en movimiento circular uniforme?**

Vale cero, pues la fuerza es perpendicular al desplazamiento, con lo que $W = Fs \cos 90° = 0$.

7 **Hemos de levantar un cuerpo hasta cierta altura y, para ello, disponemos de varios planos inclinados de diferente longitud (y, por tanto, inclinación). ¿Con cuál de ellos realizaremos la operación con menor esfuerzo? ¿Con cuál será menor el trabajo realizado?**

Si se quiere elevar un cuerpo por un plano inclinado, como mínimo debemos realizar una fuerza igual a mg sen α, por lo que el esfuerzo será menor cuanto menor sea el ángulo de inclinación.

Sin embargo, el trabajo que realicemos será igual en todos los casos, pues la altura a la que se eleva el cuerpo es la misma. Es decir, en un caso se realiza menos esfuerzo, pero se recorre más distancia, mientras que en otro se realiza más esfuerzo, pero se recorre menos distancia.

Concepto de potencia

8 **Un coche de 1 700 kg es capaz de pasar de 0 a 100 km/h en 11 s. ¿Qué potencia media necesita? Expresa el resultado en CV.**

El trabajo que realiza el motor es igual a la variación de la energía cinética del coche:

$$W = 1/2\, mv^2 - 0 = 655\,864{,}2 \text{ J}$$

Por tanto, su potencia media resulta ser:

$$P = \frac{W}{t} = 59\,624 \text{ W} = 81{,}12 \text{ CV}$$

9 **Cierta compañía eléctrica factura a razón de 0,09 € el kW h. ¿Cuánto costará mantener encendida una bombilla de 100 W durante 24 h? ¿En qué porcentaje reduciremos el coste si la sustituimos por una bombilla equivalente de 25 W de bajo consumo?**

Como el kW h es unidad de trabajo o energía, calcularemos cuál es la energía consumida por cada bombilla:

$$W_1 = P_1 t = 0{,}1 \text{ kW} \cdot 24 \text{ h} = 2{,}4 \text{ kW h}$$

Así pues, el coste será de 0,216 €.

$$W_2 = P_2 t = 0{,}025 \text{ kW} \cdot 24 \text{ h} = 0{,}6 \text{ kW h}$$

Con lo que el coste será de 0,054 €.

De este modo, reducimos el coste en un 75 %.

10 **Un piano de 300 kg es elevado en un montacargas de masa 1 000 kg a una velocidad constante de 0,2 m/s. ¿Cuál es la potencia desarrollada por el motor del montacargas?**

La fuerza que ejerce el montacargas en la elevación a velocidad constante ha de ser igual al peso del piano más el del propio montacargas. Por tanto:

$$F = (m' + m)\, g = (300 \text{ kg} + 1\,000 \text{ kg})\; 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 12\,740 \text{ N}$$

Así pues, la potencia será:

$$P = Fv = 2\,548 \text{ W}$$

11 **Denominamos potencia metabólica a la rapidez con que nuestro cuerpo consume la energía química interna, bien sea desarrollando un trabajo o liberándose en forma de calor. Esta potencia metabólica varía en función de la actividad que estemos realizando. Algunos de sus valores aproximados son:**

- **Potencia metabólica al dormir = 75 W**
- **Potencia metabólica al andar = 230 W**
- **Potencia metabólica al correr = 1 000 W**
- **Potencia metabólica al pedalear = 500 W**

Suponiendo que el valor nutricional de los cereales es de 1 600 kJ por cada 100 g, ¿cuántos gramos de cereales debemos consumir si deseamos ejercitar cada una de las actividades citadas durante 4 h?

Calcularemos el consumo de energía propio de cada actividad a partir de la expresión:

$$W = \Delta E = Pt$$

De este modo, tendremos que al dormir:

$$\text{gasto energético} = 75 \text{ W} \cdot 14\,400 \text{ s} = 1\,080 \text{ kJ}$$

Así pues, necesitaremos consumir una cantidad de cereales igual a:

$$\frac{1\,080 \text{ kJ} \cdot 100 \text{ g}}{1\,600 \text{ kJ}} = 67{,}5 \text{ g}$$

Operando de igual manera en los siguientes casos, se obtiene:

- Consumo de energía al andar 4 h = 3 312 kJ, que equivalen a 207 g de cereales.
- Consumo de energía al correr 4 h = 14 400 kJ, que equivalen a 900 g de cereales.
- Consumo de energía en bicicleta 4 h = 7 200 kJ, que equivalen a 450 g de cereales.

Relación trabajo-energía mecánica

12 **Cuando una fuerza realiza un trabajo sobre un cuerpo, la energía cinética de este siempre aumenta. ¿Verdadero o falso?**

Falso. Si la fuerza actúa en sentido contrario al desplazamiento, la energía cinética disminuye.

13 **¿Puede aplicarse en cualquier circunstancia la expresión *mgh* para la energía potencial gravitatoria de un cuerpo?**

No. Dicha expresión solo es válida en las proximidades de la superficie terrestre.

D 14 **PAU** **¿Puede un sistema de varias partículas tener una energía cinética igual a cero y un momento lineal distinto de cero? ¿Y puede tener un momento lineal igual a cero y una energía cinética distinta de cero? Justifica tu respuesta.**

No. Si el sistema tiene momento lineal, significa que hay movimiento. Como la energía cinética es una magnitud escalar, no puede ser cero si hay movimiento.

Por el contrario, sí puede tener un momento lineal cero y energía cinética distinta de cero. Sería el caso de dos partículas moviéndose en sentidos opuestos con el mismo valor de momento lineal. La energía cinética del sistema sería la suma de las dos energías cinéticas.

15 **Dos cuerpos de distinta masa tienen el mismo momento lineal. ¿Poseen la misma energía cinética?**

No. El de menor masa tendrá mayor energía cinética, debido a que la energía cinética la podemos expresar como:

$$E_c = \frac{p^2}{2m}$$

Por lo que, a igualdad de p, tiene mayor energía cinética el de menor masa.

16 **¿Qué opinas de la siguiente afirmación: «La energía mecánica de un sistema no puede aumentar»?**

Es falsa. Cualquier trabajo que realice una fuerza que actúe en la dirección y sentido del desplazamiento provocará un aumento de la energía mecánica del sistema. Baste como ejemplo el lanzamiento de un cohete.

17 **¿Es posible ejercer una fuerza y al mismo tiempo no transferir energía?**

Sí, si la fuerza es perpendicular al desplazamiento, pues en ese caso el trabajo es cero y no se transfiere energía.

18 **Dos cuerpos de masas desiguales tienen la misma energía cinética y se mueven en igual dirección. Si se aplica la misma fuerza a ambos para frenarlos, ¿cómo serán en comparación las distancias que recorrerán hasta detenerse?**

La distancia que recorrerán será la misma, pues el trabajo que realiza la fuerza de frenado es $-Fd$ y equivale a la variación de energía cinética, por lo que:

$$-Fd = 0 - E_{c\ \text{inicial}} \Rightarrow d = \frac{E_c}{F}$$

Puesto que tanto la energía cinética como la fuerza valen lo mismo en ambos casos, la distancia que recorrerán hasta pararse será la misma.

19 **PAU** **Un cuerpo de 1 kg se mueve con velocidad constante hacia arriba por una pendiente de 30° y 1 m de longitud, gracias a una fuerza aplicada paralelamente al plano. El coeficiente de rozamiento es 0,3. Responde:**

a) **¿Qué trabajo se realiza para aumentar la energía potencial gravitatoria?**

b) **¿Qué trabajo se realiza contra la fuerza de rozamiento?**

c) **¿Con qué energía cinética llegará el cuerpo al suelo si se deja deslizar desde la parte más alta del plano?**

a) La altura a la que asciende finalmente es:

$$h = l \text{ sen } 30° = 0{,}5 \text{ m}$$

El trabajo que se realiza para aumentar la energía potencial gravitatoria es:

$$W = mgh = 4{,}9 \text{ J}$$

b) El trabajo que se realiza contra la fuerza de rozamiento es:

$$W' = \mu mg \cos 30° \cdot d = 2{,}54 \text{ J}$$

c) La variación de energía mecánica es igual al trabajo realizado por el rozamiento, por lo que:

$$mgh - E_{cf} = W_{roz}$$

De este modo:

$$E_{cf} = 2{,}36 \text{ J}$$

20 **¿A qué altura debe elevarse un cuerpo para incrementar su energía potencial en una cantidad igual a la energía que tendría si se moviese a 40 km/h?**

Su energía potencial debería ser igual a la energía cinética que tendría a esa velocidad:

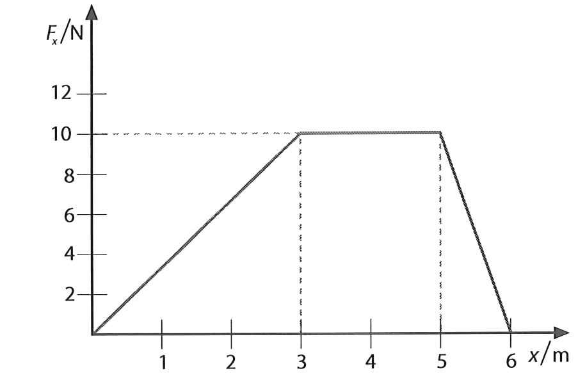
$$mgh = 1/2\, mv^2$$

Por tanto:

$$h = \frac{v^2}{2g} = 6{,}3 \text{ m}$$

Hemos tenido en cuenta que 40 km/h equivalen a 11,1 m/s.

21 **PAU** **Una partícula de 3 kg se mueve con una velocidad de 5 m/s cuando $x = 0$. Esta partícula se encuentra sometida a una única fuerza que varía con x, como se indica en la figura.**



a) **¿Cuál es su energía cinética en $x = 0$?**

b) **¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza cuando la partícula se desplaza desde $x = 0$ hasta $x = 6$ m?**

c) **¿Cuál es la velocidad de la partícula en $x = 6$ m? ¿Y en $x = 3$ m?**

Aplicaremos en la resolución de este problema el criterio de que el área encerrada entre la gráfica y el eje X equivale al trabajo realizado.

a) La energía cinética en $x = 0$ se obtiene a partir de los datos ofrecidos:

$$E_c\,(x = 0) = 37{,}5 \text{ J}$$

b) Resolviendo gráficamente, se obtiene:

$$W_{0\to 6} = W_{0\to 3} + W_{3\to 5} + W_{5\to 6} = 15 + 20 + 5 = 40 \text{ J}$$

c) La velocidad cuando $x = 6$ m la obtenemos a partir del valor de su energía cinética en dicho punto:

$$W_{0\to 6} = 40 = E_{c6} - E_{c0} \Rightarrow E_{c6} = 77{,}5 \text{ J}$$

De este modo:

$$v_6 = 7{,}18 \text{ m/s}$$

Por su parte, la velocidad en $x = 3$ m se obtiene a partir de su energía cinética en ese punto:

$$W_{0\to 3} = 15 = E_{c3} - E_{c0} \Rightarrow E_{c3} = 52{,}5 \text{ J}$$

Por consiguiente:

$$v_3 = 5{,}9 \text{ m/s}$$

22 **Una fuerza constante de 15 N actúa durante 12 s sobre un cuerpo cuya masa es 2,5 kg. El cuerpo tiene una velocidad inicial de 1,5 m/s en la misma dirección y sentido de la fuerza. Calcula:**

a) **La energía cinética final.**

b) **La potencia desarrollada.**

a) Dicha fuerza, al actuar sobre el cuerpo de 2,5 kg, le comunica una aceleración $a = \dfrac{F}{m}$ de 6 m/s².

Por tanto, el desplazamiento efectuado en 12 s vale:

$$d = v_0 t + 1/2\, at^2 = 450 \text{ m}$$

Así pues, el trabajo realizado es:

$$W = Fd = 6\,750 \text{ J}$$

Como este trabajo equivale a la variación de energía cinética, obtenemos:

$$E_{cf} = 6\,750 \text{ J} + 1/2 \cdot 2{,}5 \text{ kg } (1{,}5 \text{ m/s})^2 = 6\,752{,}8 \text{ J}$$

b) Aplicando la definición de potencia, obtenemos:

$$P = 562{,}7 \text{ W}$$

Energía y fuerzas conservativas

23 ¿Qué son las fuerzas conservativas? ¿Y las fuerzas disipativas?

Fuerzas conservativas son aquellas bajo cuya exclusiva acción se conserva la energía mecánica del sistema. El trabajo realizado por ellas no depende de la trayectoria, sino solo de las posiciones final e inicial. Fuerzas disipativas son las fuerzas no conservativas.

24 PAU Si la fuerza de la gravedad es conservativa, ¿por qué nos resulta más fácil subir hasta la cima de una montaña por un camino sinuoso que hacerlo en línea recta?

Porque, en realidad, lo que nosotros percibimos es el esfuerzo más que el trabajo físico realizado. Ascendiendo por una pendiente suave realizamos menos esfuerzo, pues la componente del peso en la dirección de la pendiente es menor cuanto menor es el ángulo.

25 Un plano inclinado tiene 15 m de largo, y su base, 10 m. Un cuerpo de 800 g de masa resbala desde arriba con una velocidad inicial de 1,5 m/s. ¿Qué valor tienen su energía cinética y su velocidad al final del plano?

Como la longitud del plano es 15 m y su base mide 10 m, por el teorema de Pitágoras se deduce que su altura es 11,18 m. La energía mecánica se conserva a lo largo del recorrido, así:

$$E_{c0} + E_{p0} = E_{cf} + E_{pf}$$

$$1/2\, mv_0^2 + mgh = 1/2\, mv_f^2$$

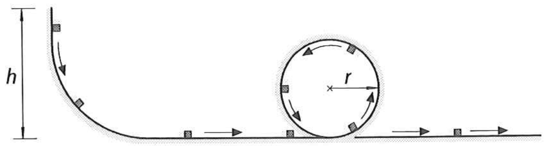
Con los datos del problema se obtiene:

$$E_{cf} = 88{,}55 \text{ J}$$

De este modo, despejando la velocidad final de la expresión de la energía cinética, se obtiene:

$$v_f = 14{,}8 \text{ m/s}$$

D26 PAU ¿Desde qué altura mínima, comparada con el radio, *r*, debemos dejar resbalar un cuerpo en la pista de la figura para que complete el rizo, si suponemos que no hay fricción?



La energía potencial inicial debe transformarse en potencial y cinética en el punto más alto del rizo, cuya altura con respecto al suelo es 2*r*.Por tanto:

$$mgh = 2mgr + 1/2\, mv^2$$

Ahora bien, la condición mínima para que el cuerpo complete el rizo es que (desde el punto de vista del cuerpo) el peso se iguale en valor a la fuerza centrífuga. Por tanto, en ese punto se cumplirá que:

$$mg = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v^2 = gr$$

Por tanto, la igualdad inicial quedaría:

$$mgh = 2mgr + 1/2\, mgr$$

En consecuencia:

$$h = 5/2\, r$$

27 Demuestra que si el *skater* de la imagen (página 321 del *Libro del alumno*) logra pasar por el punto más alto del rizo de radio *r* con la mínima velocidad necesaria para no desplomarse, entonces su velocidad en el punto más bajo es $v = \sqrt{5\,gr}$

Por una parte, hemos de tener en cuenta que la altura del patinador en el punto más alto es 2*r*.

Por otro lado, si en ese punto más alto no se cae, parece lógico pensar que la fuerza centrífuga es igual al peso, eso es:

$$\frac{mv_{sup}^2}{r} = mg \Rightarrow v_{sup}^2 = rg$$

Como la energía en el punto más alto y más bajo debe ser la misma, entonces:

$$mgh + 1/2\, mv_{sup}^2 = \frac{1}{2} mv_{inf}^2$$

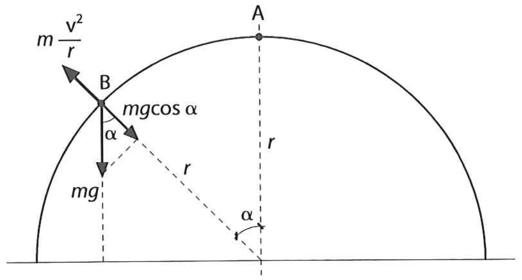
Puesto que $h = 2r$:

$$g2r + 1/2\, rg = 1/2\, v_{inf}^2$$

Operando obtenemos sin dificultad la expresión buscada:

$$v_{inf} = \sqrt{5\,gr}$$

28 Un cuerpo que estaba inicialmente en reposo en lo alto de una cúpula semiesférica de radio *r*, empieza a deslizarse por ella. Demuestra que el cuerpo se despegará de la superficie cuando el ángulo α sea tal que su coseno sea cos α = 2/3. (Se considera nulo el rozamiento).



En el punto en que se despega de la superficie (B), se cumplirá que la F_c se iguala a la componente «radial» del peso:

$$mv^2/r = mg \cos \alpha$$

Por lo que :

$$mv^2 = mgr \cos \alpha$$

A su vez, por conservación de la energía, se cumple que:

$$E_m(A) = E_m(B)$$

$$mgr = mgr \cos \alpha + 1/2\, mgr \cos \alpha$$

$$gr = 3/2\, gr \cos \alpha$$

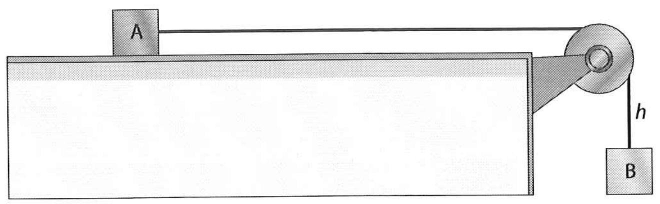
De este modo, la condición de «despegue» se satisface cuando:

$$\cos \alpha = 2/3$$

29 El sistema de la figura es liberado desde el reposo. Determina una expresión para la velocidad de los objetos A y B cuando B ha descendido una altura *h*. Resuelve el problema por:

***a)* Procedimientos energéticos.**

***b)* Procedimientos dinámicos.**



Comprueba el resultado. (Se considera nulo el rozamiento, así como la masa de la cuerda y polea).

a) Lógicamente, la velocidad de ambos cuerpos es la misma, pero no así sus energías cinéticas puesto que tienen masas distintas.

Sabemos que, la suma de energías potencial y cinética de ambos cuerpos debe permanecer constante. Además, el cuerpo A no variará su energía potencia gravitatoria al desplazarse sobre una superficie horizontal.

Antes de comenzar el movimiento, la única energía que consideraremos es la potencial del cuerpo B; una vez se haya desplazado una altura *h*, además los dos cuerpos estarán animados de sendas energías cinéticas.

$$m_B gh = 1/2\, m_A v^2 + 1/2\, m_B\, v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2m_B gh}{m_A + m_B}}$$

b) El cuerpo A se desplaza animado por una única fuerza, que es la tensión, luego

$$T = m_A a$$

El cuerpo B sufre, a favor del desplazamiento, su peso, y en contra la tensión. Como es obvio, la tensión y la aceleración son las mismas para ambos cuerpos.

$$m_B g - T = m_B a$$

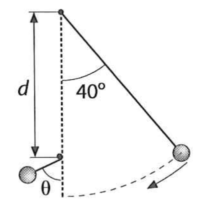
De sumar ambas ecuaciones obtenemos que

$$a = \frac{m_B g}{m_A + m_B}$$

Finalmente, de la ecuación que relaciona las velocidades inicial (0), final (*v*) y el espacio recorrido (*h*), obtenemos también:

$$v = \sqrt{\frac{2m_B gh}{m_A + m_B}}$$

30 PAU Un péndulo de 1 m de longitud se desplaza 40° respecto de la vertical y desde ese punto se suelta. Si en un punto de la vertical se interpone un clavo a cierta distancia *d* bajo el punto de sujeción, determina el ángulo de separación θ del hilo respecto de la vertical cuando llega al otro extremo, si:



***a)* d = 20 cm**

***b)* d = 50 cm**

***c)* d = 76,6 cm**

***d)* d = 80 cm**

Como se recordará de los experimentos de Galileo sobre péndulos que se comentan en el *Libro del alumno*, el principio de conservación de la energía lleva a que la lenteja del péndulo, de la misma manera que en todos los casos llega abajo con la misma energía cinética como potencial tenía antes de caer, cuando vuelve a ascender lo hará hasta la misma altura de la que partió, precisamente por invertir esa energía cinética en potencial. Por lo tanto, una vez calculada esa altura (tomamos el punto más bajo como altura 0) mediante procedimientos trigonométricos, lo que queda es un ejercicio de resolución de triángulos con el que el alumnado de este nivel se encuentra perfectamente familiarizado.

$$h = 1 - 1 \cdot \cos 40° = 0{,}234 \text{ m}$$

Por lo tanto, puesto que *h* es constante:

a) $0{,}8 - 0{,}8 \cos \theta = 0{,}234 \Rightarrow \theta = 45°$

b) $0{,}5 - 0{,}5 \cos \theta = 0{,}234 \Rightarrow \theta = 57{,}8°$

c) $0{,}234 - 0{,}234 \cos \theta = 0{,}234 \Rightarrow \theta = 90°$

e) $0{,}20 - 0{,}20 \cos \theta = 0{,}234 \Rightarrow \theta = 99{,}8°$

Energía y fuerzas disipativas

31 PAU ¿Crees que el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento solo depende de la posición inicial y final y no de la trayectoria que se haya seguido? ¿Es, pues, el rozamiento una fuerza conservativa?

No. El rozamiento es una fuerza disipativa, y su trabajo depende de la trayectoria seguida.

32 Si un coche se mueve con velocidad *v*, y el coeficiente de rozamiento estático entre las ruedas y el suelo es μ_e, deduce, a partir de consideraciones energéticas, una expresión para la distancia mínima a la que el vehículo puede detenerse.

El coche se detendrá cuando el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento estática entre ruedas y suelo anule la energía cinética que tenía inicialmente. Por tanto, $W_{roz} = \Delta E_c$.

Es decir:

$$-\mu mgd = 0 - 1/2\, mv_0^2$$

de donde se obtiene:

$$d = \frac{v_0^2}{2\mu g}$$

Como puede observarse, dicha distancia no depende de la masa del vehículo (cosa que suele sorprender a los alumnos y alumnas). De hecho, conviene informarles de que la forma de determinar la velocidad a la que iba un vehículo accidentado es midiendo la longitud de la huella dejada por las ruedas durante la frenada.

33 ¿Es cierto que, a igualdad de velocidad, un coche pesado recorre más distancia en la frenada que otro más ligero?

Como puede comprobarse a partir de la expresión deducida en la cuestión anterior, la proposición es falsa. A igualdad de velocidad, la distancia de frenada es la misma.

34 Demuestra que la altura a la que es capaz de ascender un cuerpo lanzado con velocidad v_0 desde la base de un plano inclinado α grados, y en el que μ es el coeficiente de rozamiento, viene dada por la expresión

$$h' = \frac{h}{1 + \mu \operatorname{cotg} \alpha}$$

donde *h* es la altura a la que llegaría el cuerpo en ausencia de rozamiento.

Si no existe rozamiento, el cuerpo ascenderá hasta que toda la energía cinética se haya transformado íntegramente en energía potencial:

$$\frac{1}{2} mv_0^2 = mgh$$

Por lo que:

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

Si existe rozamiento, el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento será igual a la disminución de energía mecánica del sistema cuando haya llegado al punto de máximo ascenso. Entonces, el cuerpo habrá recorrido una distancia *d* a lo largo del plano, que se relaciona con la altura según:

$$d = \frac{h'}{\text{sen}\,\alpha}$$

Por tanto:

$$\frac{-\mu mg \cos \alpha \cdot h'}{\text{sen}\,\alpha} = mgh' - \frac{1}{2} mv_0^2$$

De donde obtenemos que:

$$h' = \frac{v_0^2}{2g\,(1 + \mu \cos \alpha/\text{sen}\,\alpha)} = \frac{h}{1 + \mu \operatorname{cotg} \alpha}$$

35 **Un coche se mueve con una velocidad de 30 m/s. El coeficiente de rozamiento estático entre las ruedas y el suelo vale 0,5. ¿Cuál será la distancia mínima a la que el coche podrá detenerse?**

Usando la expresión deducida en la cuestión 32, obtenemos:

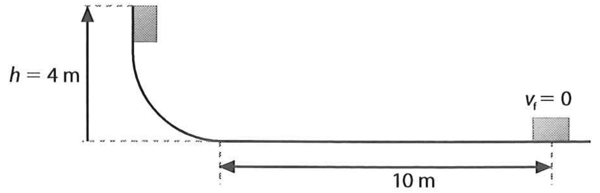
$$d = \frac{v_0^2}{2\mu g} = 91{,}8 \text{ m}$$

D36 **PAU** **Un bloque de 3 kg situado a 4 m de altura se deja resbalar por una rampa curva y lisa sin rozamiento. Cuando llega al suelo, recorre 10 m sobre una superficie horizontal rugosa hasta que se para. Calcula:**

a) **La velocidad con qué llega el bloque a la superficie horizontal.**

b) **El trabajo qué realiza la fuerza de rozamiento.**

c) **El coeficiente de rozamiento con la superficie horizontal.**



a) La energía potencial inicial se transforma íntegramente en cinética al llegar a la base del plano:

$$mgh = 1/2\, mv^2 \Rightarrow v = 8{,}85 \text{ m/s}$$

b) El trabajo realizado por el rozamiento a lo largo de los 10 m equivale a la pérdida de toda la energía mecánica que tenía, por lo que:

$$W_{roz} = -117{,}6 \text{ J}$$

c) Como $W_{roz} = 0 - 1/2\, mv^2$, se obtiene:

$$-\mu mgd = -\,1/2\, mv^2 \Rightarrow \mu = \frac{v^2}{2gd} = 0{,}4$$

37 **¿Cuánto se comprimiría un muelle de constante de fuerza $k = 500$ N/m si lo situamos a 4 m del final de la rampa del ejercicio anterior? (El rozamiento también actúa durante la compresión.)**

Debemos calcular en primer lugar cuál es la energía cinética del cuerpo después de recorrer 4 m, cuando entra en contacto con el muelle. Dado que el W_{roz} equivale a la variación de energía cinética a lo largo de los 4 m, tendremos:

$$E_{cf} - E_{c0} = W_{roz}$$

Por lo que:

$$E_{cf} = -0{,}4 \cdot 3 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 4 \text{ m} + 117{,}6 \text{ J} = 70{,}56 \text{ J}$$

Al entrar en contacto con el muelle, parte de la energía cinética se transforma en potencial elástica y otra parte se disipa en trabajo de rozamiento, por lo que:

$$\Delta E = W'_{roz}$$

Es decir:

$$1/2\, kx^2 - E_{cf} = -\mu mgx$$

A partir de los valores ofrecidos o calculados en el problema, obtenemos una ecuación de segundo grado en x de la forma:

$$250x^2 + 11{,}76x - 70{,}56 = 0$$

cuya solución es:

$$x = 0{,}5 \text{ m} = 50 \text{ cm}$$

Evaluación (página 322)

Señala en cada caso la respuesta que consideres correcta:

1. **El trabajo que realizamos cuando sostenemos un cuerpo de 20 kg a 1,5 m de altura sobre el suelo es:**

a) 183 J
▶ *b)* 0 J
c) 294 J

2. **Una fuerza constante de 20 N actúa sobre un cuerpo de 5 kg formando 60° con la dirección del desplazamiento. Si el cuerpo estaba en reposo y no hay fricción, el trabajo realizado por dicha fuerza al cabo de 10 s es:**

▶ *a)* 1 000 J
b) 250 J
c) 345,6 J

3. **Con los datos de la pregunta anterior, la velocidad del cuerpo al cabo de los 10 s será:**

a) 15 m/s
b) 40 m/s
▶ *c)* 20 m/s

4. **Teniendo en cuenta la relación entre fuerza, trabajo y energía:**

a) **Si sobre un cuerpo en movimiento actúa una fuerza, entonces siempre se realiza un trabajo.**
b) **El trabajo realizado por cualquier fuerza equivale a la variación negativa de la energía potencial.**
▶ *c)* **El trabajo realizado por cualquier fuerza equivale a la variación de la energía cinética.**

5. **Un kilovatio por hora equivale a:**

a) 735 000 J
▶ *b)* $3{,}6 \cdot 10^6$ J
c) 3 600 J

6. **Teniendo en cuenta la relación entre fuerza conservativa y energía:**

a) **Si solo actúan fuerzas conservativas, la energía cinética de una partícula no cambia.**
▶ *b)* **El trabajo realizado por una fuerza conservativa reduce la energía potencial asociada a dicha fuerza.**
c) **El trabajo realizado por fuerzas no conservativas equivale a la variación de la energía total del sistema.**

7. **Contra un muelle de constante de fuerza $k = 400$ N/m, lanzamos un cuerpo de 1 kg sobre una superficie horizontal con una velocidad de 3 m/s. La compresión del muelle será de:**

▶ *a)* 15 cm
b) 25 cm
c) 40 cm

8. **Un cuerpo de 4 kg resbala por un plano que tiene una inclinación de 60° y 5 m de longitud. Si al final del plano su energía mecánica ha disminuido en 10 J, el valor del coeficiente de rozamiento es:**

a) 0,25
b) 0,04
▶ *c)* 0,10

9. **El trabajo realizado por la fuerza elástica en una oscilación completa de un muelle desde la posición inicial A hasta B y de nuevo a A, siendo x la distancia entre A y B y k la constante del muelle, vale:**

a) $2\,kx^2$
b) $4\,kx^2$
▶ *c)* cero

10. **¿Cuál de las siguientes relaciones entre unidades equivale a 1 N?**

a) J s^{-1}
b) kg m s^{-1}
c) $\text{J m}^{-1}\,\text{s}^{-2}$
▶ *d)* W s m^{-1}
e) W m s^{-1}