

Límites y continuidad

1. Comprueba dando valores que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x}{x^2 + 1} = 1,2$

2. Halla, por sustitución (si se puede), los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x)$ b) $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{2x+3}{x^2-4}$ c) $\lim_{x \rightarrow 7} \sqrt{2x-5}$ d) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{2x-5}$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{2x+3}{x^2+x-1}}$ f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+x-1}}$ g) $\lim_{x \rightarrow 2} (e^{2x-3})$ h) $\lim_{x \rightarrow 0} (2^x + 3)$

i) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin x$ j) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos x$ k) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan x$

(Sol. a) -2 ; b) $-9/32$; c) 3 ; d) No existe; e) $\sqrt{5}$; $1/\sqrt{5}$; g) e ; h) 4 ; i) 1 ; j) 0 ; k) ∞ .

3. Halla el límite de:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 3x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, cuando $x \rightarrow 0$; b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -1 \\ 3x/(x-2) & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$, cuando $x \rightarrow -1$

Sol. a) 0 ; b) No existe.

4. Dada la función $f(x) = \frac{(x-3)(x+2)x}{(x-3)(x-2)(x+1)}$, halla su límite cuando x tiende a 3 , 0 , -2 , 2 y -1 .

(Sol. $15/4$; 0 ; 0 ; ∞ ; ∞ .)

5. Halla: a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x^2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x^2}{2x^2}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{x^2-4}$ d) $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{x+1}{2x-1}$

(Sol. a) ∞ ; b) $-3/2$; c) $-1/4$; d) ∞ .)

6. Halla: a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 8x + 7}$ b) $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 8x + 7}$ c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-3}{x^2-4}$ d) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x-3}{(x-4)^2}$

(Sol. 0 ; b) $\pm\infty$; c) $\pm\infty$; d) ∞)

7. Halla:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x}{x-1}$ b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x-5}$ c) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 10x + 25}$ d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$

(Sol. a) ∞ ; b) 10 ; c) ∞ ; d) 6 .)

8. Calcula: a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-\sqrt{x}}{2x-4}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{2-\sqrt{2x}}$

d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3}-x}{3-x}$ e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-\sqrt{4x-3}}{x^2-9}$ f) $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{\frac{x^2-25}{x^2-5x}}$

(Sol. a) $1/4$; b) ∞ ; c) -4 ; d) $2/3$; e) $1/18$; f) $\sqrt{2}$.)

9. Halla: a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x-5)$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (-3x+7)$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (6x^2 - 10x + 17)$

d) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x}$ e) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-14}{x^2}$ f) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x-5}$

(Sol: a) ∞ ; b) $-\infty$; c) ∞ ; d) 0 ; e) 0 ; f) 0 .)

10. Halla: a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x^2-4x+1}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+3x}{5x^2-4x+1}$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+3x}{5x^2-4x+1}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-2x}{2x+7}$ e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2+8x}{x-4}$ f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2+8x}{x-4}$

(Sol. a) 0 ; b) $2/5$; c) $2/5$; d) $+\infty$; e) $-\infty$; f) $+\infty$.)

11. Halla: a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{x^2-4x+1}}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-4}{\sqrt{2x^3-4x}}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{\sqrt{x^3+2x}}$
 (Sol. a) 2; b) 0; c) ∞ .)

Cálculo de asíntotas

12. Determina las asíntotas de las funciones:

a) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ b) $f(x) = \frac{2x+1}{x}$ c) $f(x) = \frac{2x-3}{x^2+2}$

a) $x = 1$; $y = 1$. b) $x = 0$; $y = 2$. c) $y = 0$.)

13. Calcula las asíntotas de las funciones: a) $f(x) = \frac{3x^2-2x-4}{x-1}$ b) $f(x) = \frac{x^2+2x}{x+1}$

(Sol. a) $x = 1$; $y = 3x + 1$. b) $x = -1$; $y = x + 1$.)

14. Comprueba que las siguientes funciones tienen una asíntota horizontal hacia $-\infty$: Hállala en cada caso: a) $f(x) = 1 + 2^x$ b) $f(x) = 2 - 2^x$ (Sol. a) $y = 1$; $y = 2$.)

Continuidad de funciones y aplicaciones

15. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ b) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ c) $f(x) = \sqrt{x^2+3}$

Sol. a) \mathbf{R} ; b) $\mathbf{R} - \{-1, 1\}$; c) \mathbf{R} ..

16. ¿Para qué valores de k la función $f(x) = \frac{x-1}{x^2+kx}$ tiene dos discontinuidades? Hállalas cuando $k = -1$? (Sol. $k = 0$ y 1 . En $x = 1$ es evitable.)

17. ¿Para qué valores de k la función $f(x) = \frac{x+k}{x^2-2x-3}$ tiene una discontinuidad evitable? (Sol. $k = 1$ y 2 .)

18. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3-ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, ¿para qué valores de a la función $f(x)$ es continua en $x = 1$? Comprueba gráficamente que tu resultado es correcto. (Sol. 1.)

19. (PAU) Calcula la constante k para que la siguiente función sea continua en todos los puntos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x < 5 \\ 4x+k & \text{si } x \geq 5 \end{cases} \quad (\text{Sol. 4.})$$

20. (PAU) Calcula la constante k para que la siguiente función sea continua en todos los puntos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 3 \\ x+k & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \quad (\text{Sol. 6.})$$

21. (PAU) Dada la función $y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$, se pide:

a) Estudia razonadamente su continuidad.

b) Estudia razonadamente sus asíntotas.

(Sol. a) $\mathbf{R} - \{-1\}$; b) $x = -1$; $y = x - 2$.)

22. Estudia la continuidad de las funciones: a) $f(x) = |x| - x$ b) $f(x) = \frac{x}{|x|}$

Haz su representación gráfica.

(Sol. a) Continua; b) Discontinua en $x = 0$.)