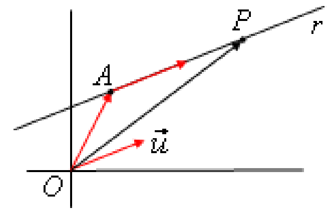
LA RECTA EN EL PLANO

Recta en el plano

Una recta r viene determinada por un punto A y un vector director $\vec{u}$; y P un punto de la recta:



Ecuación vectorial: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{u}$

Si $A = (a_1, a_2)$, $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y las coordenadas del punto genérico P son $P(x, y)$, la ecuación anterior puede escribirse:

$$(x, y) = (a_1, a_2) + \lambda(u_1, u_2)$$

Ecuaciones paramétricas. Igualando las respectivas componentes resulta: $\begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 \end{cases}$.

Ecuación continua. Despejando λ en cada una de las ecuaciones paramétricas e igualamos las dos expresiones obtenidas, resulta: $\dfrac{x - a_1}{u_1} = \dfrac{y - a_2}{u_2}$.

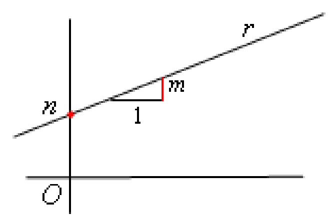
Ejemplo:

Las ecuaciones de la recta que pasa por $A(1, 4)$ y tiene por vector director el $\vec{u} = (2, -3)$ son:

Vectorial: $(x, y) = (1, 4) + \lambda(2, -3)$. Paramétricas: $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 4 - 3\lambda \end{cases}$ Continua: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-4}{-3}$

Ecuación punto-pendiente. Se deduce de la ecuación continua: $y - a_2 = \dfrac{u_2}{u_1}(x - a_1)$

Si llamamos $m = \dfrac{u_2}{u_1}$, la ecuación queda $y - a_2 = m(x - a_1)$.



El cociente $m = \dfrac{u_2}{u_1}$ es la pendiente de la recta: es la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con la dirección positiva del eje OX. La pendiente m indica lo que aumenta (o disminuye) la variable y por cada aumento unitario de la variable x.

Ecuación explícita. Despejando y en la ecuación punto-pendiente se obtiene $y = mx + n$.

Al número n se le llama ordenada en el origen.

Ejemplo

La recta $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-4}{-3}$ puede escribirse también así: $y - 4 = \dfrac{-3}{2}(x-1)$ → Punto pendiente

Despejando: $y - 4 = \dfrac{-3}{2}(x-1) \Rightarrow y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{11}{2}$ → Explícita.

Ecuación general. También se llama ecuación implícita o cartesiana.

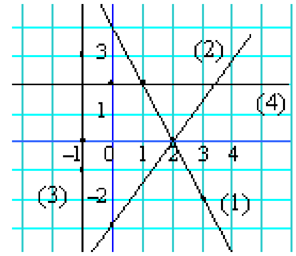
Se deduce de la continua. Es $Ax + By + C = 0$. A, B y C son números; x e y son variables, que indican las coordenadas de los puntos de esa recta, siendo x la abscisa e y la ordenada.

- Un punto pertenece a una recta cuando cumple su ecuación.
- Para representar una recta basta con conocer dos de sus puntos.

Ejemplo:

La recta $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-4}{-3}$ puede escribirse también así: $-3(x-1) = 2(y-4) \Leftrightarrow 3x + 2y - 5 = 0$.

Ejemplo:
Son ecuaciones de una recta: $2x+y-4=0$ (1); $-3x+2y+6=0$ (2); $x=-1$ (3); $y=2$ (4)

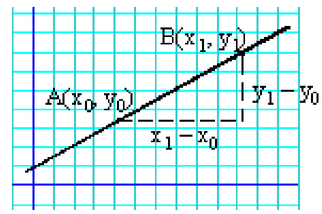


El punto (3, −2) pertenece a la recta (1), pues 2 · 3 + (−2) − 4 = 0. Ese punto (3, −2) no es de ninguna otra recta. Los puntos (0, −3) y (2, 0) son de la recta (2). El punto (1, 2) pertenece a las rectas (1) y (4).
Los puntos (−1, 0), (−1, 3), (−1, −1), siempre $x = -1$, son de la recta (3).
Los puntos (−2, 2), (0, 2), (1, 2), siempre $y = 2$, son de la recta (4).

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

La ecuación de la recta que pasa por $A = (x_0, y_0)$ y $B = (x_1, y_1)$ es

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0} \Leftrightarrow y-y_0=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$



La misma expresión se obtiene partiendo de la ecuación $y=mx+n$ e imponiendo que los puntos A y B la cumplan.

Ejemplo: La ecuación de la recta que pasa por $A = (-2, 1)$ y $B = (3, 4)$ será:

$$\frac{x-(-2)}{3-(-2)}=\frac{y-1}{4-1} \Leftrightarrow \frac{x+2}{5}=\frac{y-1}{3} \Leftrightarrow 3x-5y+11=0 \Leftrightarrow y=\frac{3}{5}x+\frac{11}{5}$$

Posición relativa de dos rectas

En el plano, dos rectas pueden ser secante, paralelas o coincidentes. Su posición se determina estudiando el sistema asociado a ellas. Así, la posición de las rectas $r: Ax+By+C=0$ y $s: A'x+B'y+C'=0$, viene determinada por la solución de $\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ A'x+B'y+C'=0 \end{cases}$.

Ángulo formado por dos rectas. Perpendicularidad

El ángulo que forman dos rectas r y s coincide con el que forman sus respectivos vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$. Por tanto: $\cos(r, s)=\cos(\vec{v}_r, \vec{v}_s)=\dfrac{\vec{v}_r\cdot\vec{v}_s}{|\vec{v}_r|\cdot|\vec{v}_s|}$

Rectas paralelas y perpendiculares

- Dos rectas son paralelas cuando tienen la misma pendiente. Así, $y=mx+n$ e $y=mx+n'$ son paralelas. También son paralelas las rectas $r: Ax+By+C=0$ y $s: Ax+By+C'=0$.
- Dos rectas son perpendiculares cuando el producto de sus pendientes vale −1. Por tanto, las rectas $y=mx+n$ e $y=-\dfrac{1}{m}x+n'$ serán perpendiculares.

Ejemplos:

a) $y=2x-1$ e $y=2x+2$ son paralelas. b) $y=2x-1$ e $y=-\dfrac{1}{2}x+1$ son perpendiculares.

Distancia de un punto a una recta

La distancia del punto $P = (x_0, y_0)$ a la recta $r: Ax+By+C=0$ es $d(P,r)=\left|\dfrac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$.

Ejemplo: Para $P(1, -3)$ y $r: 2x+5y+3=0$, $d(P,r)=\dfrac{|2\cdot 1+5\cdot(-3)+3|}{\sqrt{2^2+5^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{29}}$.