Unidad 9 – Propiedades globales de las funciones

PÁGINA 199

cuestiones iniciales

1. Dibuja la gráfica de las funciones con las características siguientes:

a) Dom $f = (-6, 6)$, Im $f = [0, 4]$, simétrica respecto del eje OY, máximos en los puntos $(3, 4)$ y $(-3, 4)$ y mínimo en el punto $(0, 0)$.

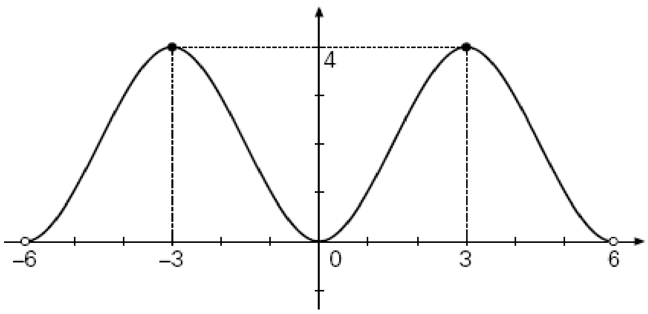
b) Dom $f = (-\infty, 0)$, Im $f = (-\infty, 0)$ y estrictamente decreciente en todo su dominio.

2. Estudia el dominio de las funciones $f(x) = 4 - x^2$, $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$.

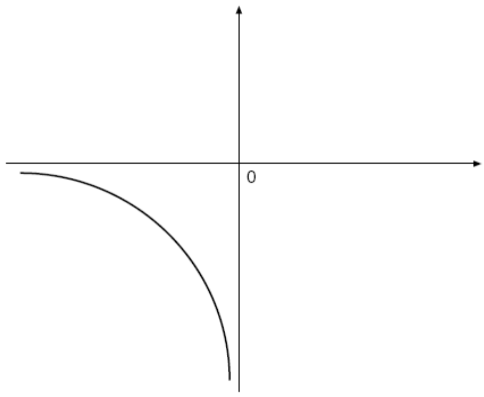
SOLUCIONES

1. Las soluciones pueden quedar así:

a)



b)



2. Los dominios quedan:

$$\text{Dom}\, f = \mathbb{R} \qquad \text{Dom}\, g = \mathbb{R} - \{3, -3\}$$

PÁGINA 213

ACTIVIDADES

- Aplica esta estrategia de ensayo y error en la resolución de los siguientes problemas:

1. **Fichas de colores.** Tenemos 16 fichas, de las cuales 4 son rojas, 4 verdes, 4 azules y 4 amarillas. De cada uno de los colores tenemos una ficha cuadrada, una circular, una triangular y otra pentagonal. Coloca estas fichas en una cuadrícula o tablero de 4×4, de manera que, en cada fila, columna o diagonal, haya una ficha de cada color y de cada forma.

2. ***Amanitas muscarias.*** Juan fue con su padre a ver una exposición micológica. Les llamó la atención el colorido de la *Amanita muscaria*. Al día siguiente, su amigo le preguntó por el número total de ejemplares que habían visto de esta variedad en la exposición, a lo que Juan respondió: «Había 8/9 de las Amanita muscaria más 8/9 de *Amanita muscaria*.» ¿Cuántos ejemplares de *amanita* había en la exposición?

3. **Latas de zumo.** Hay un cierto número de latas de zumo en la nevera. Invitas a dos amigos a tu casa a merendar. El primero se bebe la mitad de las latas que hay en la nevera más media lata; el segundo, la mitad de las que quedan más media lata; y tú te bebes la mitad de las que quedan más media lata. Después de esto, no queda ninguna lata de zumo. ¿Cuántas latas había inicialmente?

4. **Múltiplo de doce.** Si multiplicamos el cuadrado de un número natural por el número natural anterior a ese cuadrado, ¿el resultado es múltiplo de 12?

SOLUCIONES

1. Designamos los colores por: rojo (*R*), verde (*V*), azul (*Z*) y amarillo (*A*); y las tres formas por: cuadrada (*C*), circular (*O*), triangular (*T*) y pentagonal (*P*).

   Por ensayo y error las colocamos en un tablero 4 x 4, cumpliendo las condiciones que marca el enunciado.

   Una solución es:

RC	*VO*	*ZT*	*AP*
ZP	*AT*	*RO*	*VC*
AO	*ZC*	*VP*	*RT*
VT	*RP*	*AC*	*ZO*

   Podemos encontrar hasta 72 soluciones distintas.

2. El número total de amanitas ha de ser múltiplo de 9 menos 1, es decir, 8 amanitas. Haciendo el problema mediante ecuaciones:

$$\frac{8}{9}x + \frac{8}{9} = x \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 8 \text{ amanitas}}$$

3. El enunciado del problema nos muestra que el número de latas de zumo debe ser un número impar. Por ensayo y error dirigido obtenemos:

Hay 7 latas de zumo.

El 1.^{er} amigo se bebe $\frac{7}{2}+0,5=4$ latas. Quedan 3 latas.

El 2.^{o} amigo se bebe $\frac{3}{2}+0,5=2$ latas. Queda 1 lata.

El dueño de la casa se bebe $\frac{1}{2}+0,5=1$ lata.

Luego, efectivamente, había inicialmente 7 latas de zumo.

Este problema se puede resolver también por medio de ecuaciones.

4. Sea n un número real.

Veamos si $n^2\cdot\left(n^2-1\right)=\dot{12}$

$n^2\cdot\left(n^2-1\right)=n\cdot n\left(n-1\right)\cdot\left(n+1\right)$

$n\left(n-1\right)\cdot\left(n+1\right)=\dot{3}$, pues es producto de tres números consecutivos.

Si $n=\dot{3} \;\Rightarrow\; n-1=\dot{2}$ y $n+1=\dot{2}$, luego $\left(n-1\right)\cdot n\cdot\left(n+1\right)=\dot{3}\cdot\dot{2}\cdot\dot{2}=\dot{12}$,

Si $n-1=\dot{3} \;\Rightarrow\; n=\dot{2}$, por lo que $n\left(n-1\right)\cdot n\cdot\left(n+1\right)=\dot{2}\cdot\dot{3}\cdot\dot{2}=\dot{12}$,

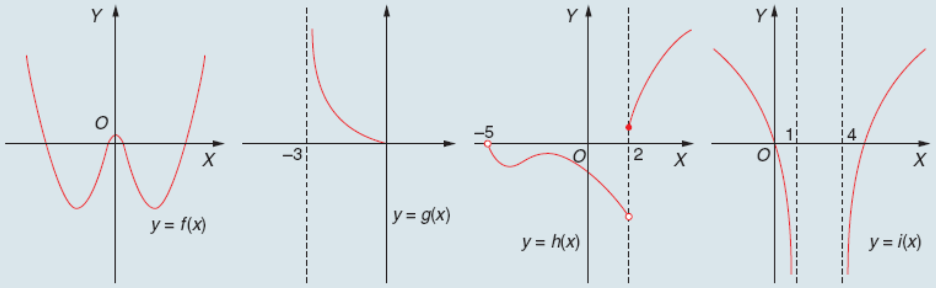
Si $n+1=\dot{3} \;\Rightarrow\; n=\dot{2}$, por lo que $n\left(n-1\right)\cdot n\cdot\left(n+1\right)=\dot{2}\cdot\dot{2}\cdot\dot{3}=\dot{12}$,

En cualquier caso, efectivamente, $n^2\cdot\left(n^2-1\right)=\dot{12}$.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Estudia el dominio de las siguientes funciones:

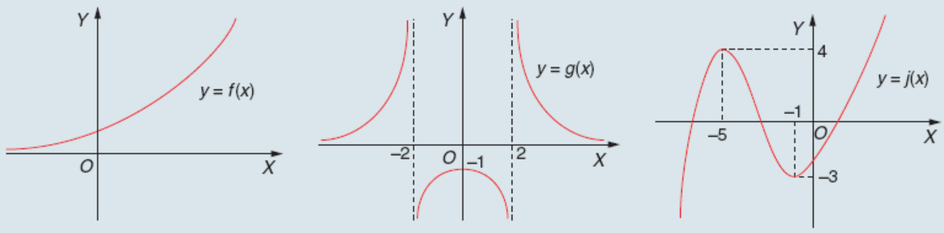


$j(x) = x^4 - 2x^2$ $\qquad k(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-5x+6}$ $\qquad l(x) = \dfrac{-1}{1-x}$ $\qquad m(x) = \sqrt[6]{x+2}$

$n(x) = \ln(x+6)$ $\qquad o(x) = 2^{x-1}$ $\qquad p(x) = \text{sen}\,(x^2+5)$ $\qquad q(x) = \text{tg}\,(x-1)$

$r(x) = \ln(x^2-4x+3)$ $\qquad s(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x+1}$ $\qquad t(x) = \sqrt[4]{x^3-2x^2-x+2}$ $\qquad u(x) = \log_2\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)$

2. Analiza y estudia, en cada una de las siguientes funciones, el dominio, el recorrido o conjunto imagen, la monotonía y los extremos relativos:



3. Dibuja las gráficas correspondientes a la funciones con las características que se citan a continuación:
   a) Dom $f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$; Im $f = (-\infty, 2]$; máximos relativos en los puntos $(-3, 2)$ y $(3, 2)$.
   b) Dom $g = \mathbb{R}$; Im $g = (-3, 2)$; mínimo relativo en el punto $(-2, -1)$ y máximo relativo en el punto $(0, 1)$.
   c) Dom $h = (-\infty, 0)$; Im $h = (1, +\infty)$ y estrictamente creciente en todo su dominio.
   d) Dom $i = \mathbb{R} - \{0\}$; Im $i = \mathbb{R}$; estrictamente creciente en $(-\infty, 0)$ y estrictamente decreciente en $(0, +\infty)$.

4. Demuestra, usando las definiciones de extremos relativos, que la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ tiene un máximo relativo en el punto $(1, 4)$ y un mínimo relativo en el punto $(3, 0)$.

5. Prueba que las siguientes funciones están acotadas por los valores que se indican. Estudia también la existencia de extremos absolutos:

   a) $f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$ acotada por 0 y 2 $\qquad$ b) $g(x) = 3\,\text{sen}\,(2x) + 1$ acotada por -2 y 4

1. Los dominios quedan:

$\text{Dom } f=\mathbb{R}$

$\text{Dom } g=(-3,0]$

$\text{Dom } h=(-5,+\infty)$

$\text{Dom } i=(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$

$\text{Dom } j=\mathbb{R}$

$\text{Dom } k=\mathbb{R}-\{2,3\}$

$\text{Dom } l=\mathbb{R}-\{1\}$

$\text{Dom } m=[-2,+\infty)$

$\text{Dom } n=(-6,+\infty)$

$\text{Dom } o=\mathbb{R}$

$\text{Dom } p=\mathbb{R}$

$\text{Dom } q=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq 1+\frac{\pi}{2}+K\pi;K\in\mathbb{Z}\right\}$

$\text{Dom } r=(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

$\text{Dom } s=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

$\text{Dom } t=[-1,1]\cup[2,+\infty)$

$\text{Dom } u=(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$

2. Las funciones se caracterizan por:

$y=f(x)$

$\text{Dom } f=\mathbb{R};\ \text{Im } f=(0,+\infty)$

Estrictamente creciente en todo su dominio.
No tiene extremos relativos.

$y=g(x)$

$\text{Dom } g=\mathbb{R}-\{-2,2\};\ \text{Im } g=(-\infty,-1]\cup(0,+\infty)$

Estrictamente creciente en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$

Estrictamente decreciente en $(0,2)\cup(2,+\infty)$

Máximo relativo $(0,-1)$

$y=j(x)$

$\text{Dom } j=\mathbb{R};\ \text{Im } j=\mathbb{R}$

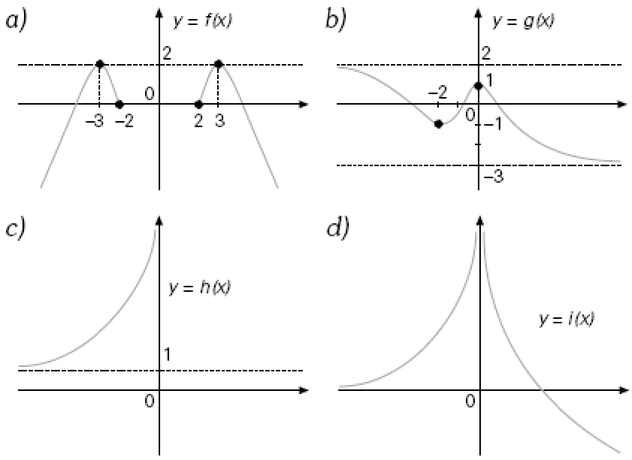
Estrictamente creciente en $(-\infty,-5)\cup(-1,+\infty)$

Estrictamente decreciente en $(-5,-1)$

Máximo relativo $(-5,4)$

Mínimo relativo $(-1,-3)$

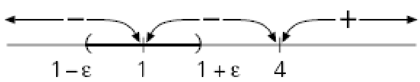
3. Las representaciones quedan:



4. Las demostraciones quedan del siguiente modo:

Para demostrar que existe un máximo relativo en el punto de abscisa 1 hay que probar que $\forall\, x \in E^{*}(1;\varepsilon) \Rightarrow f(x) < f(1)$, es decir, que $x^3 - 6x^2 + 9x < 4 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 4 < 0$.(Con $\varepsilon > 0$).

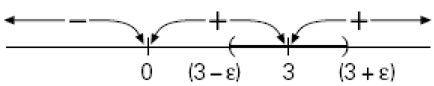
Para ello estudiamos el signo de la función: $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = (x-1)^2 (x-4)$



Luego se cumple que $\forall\, x \in E^{*}(1;\varepsilon) \Rightarrow f(x) < f(1)$

Para demostrar que existe un mínimo relativo en el punto de abscisa 3 hay que probar que $\forall\, x \in E^{*}(3;\varepsilon) \Rightarrow f(x) > f(3)$, es decir, que $x^3 - 6x^2 + 9x > 0$.

Para ello estudiamos el signo de la función: $h(x) = x^3 - 6x^2 + 9x = x(x-3)^2$



Luego se cumple que $\forall\, x \in E^{*}(3;\varepsilon) \Rightarrow f(x) > f(3)$

5. Las demostraciones quedan:

a) Hemos de probar que $\boxed{0 \leq \dfrac{2}{1+x^2} \leq 2}$

- $0 \leq \dfrac{2}{1+x^2}$, que se cumple $\forall\, x$.
- $\dfrac{2}{1+x^2} \leq 2 \;\Rightarrow\; 2 \leq 2+2x^2 \;\Rightarrow 0 \leq 2x^2$;esto es cierto para $\forall x$.
- No alcanza el extremo inferior o ínfimo, luego no tiene mínimo absoluto. Para el valor $x=0 \;\Rightarrow\; f(0)=2$, luego alcanza el extremo superior o supremo, es decir, tiene un máximo absoluto en $x=2$.

b) Hemos de probar que $\boxed{-2 \leq 3\,\text{sen}(2x)+1 \leq 4}$

- $-2 \leq 3\,\text{sen}(2x)+1 \leq 4 \;\Rightarrow\; -3 \leq 3\,\text{sen}(2x) \leq 3 \;\Rightarrow\; -1 \leq \text{sen}(2x) \leq 1$, esto es cierto $\forall\, x$.

$3\,\text{sen}(2x)+1=-2 \;\Rightarrow \text{sen}(2x)=-1 \;\Rightarrow\; 2x=\dfrac{3\pi}{2}+2\pi K \;\Rightarrow\; x=\dfrac{3\pi}{4}+\pi K.$

Tiene mínimo absoluto $=\dfrac{3\pi}{4}+K\pi \;\; (\forall\, K \in \mathbb{Z})$.

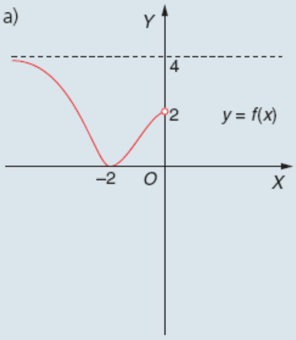
$3\,\text{sen}(2x)+1=4 \;\Rightarrow \text{sen}(2x)=1 \;\Rightarrow\; 2x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi K \;\Rightarrow\; x=\dfrac{\pi}{4}+\pi K.$

Tiene máximo absoluto $=\dfrac{\pi}{4}+K\pi \;\; (\forall\, K \in \mathbb{Z})$.

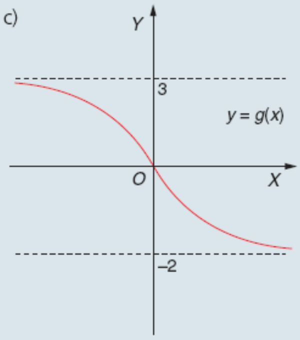
PÁGINA 217

■ 6. Estudia la acotación, la simetría y la posible existencia de supremo, ínfimo y extremos absolutos en cada una de las siguientes funciones:

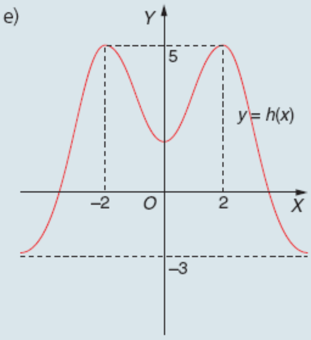
a)



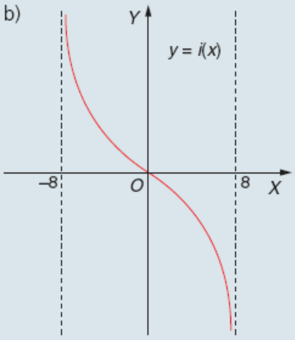
c)



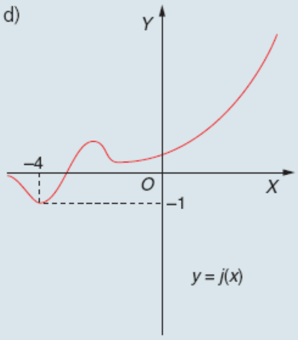
e)



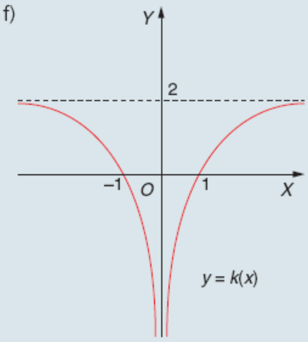
b)



d)



f)

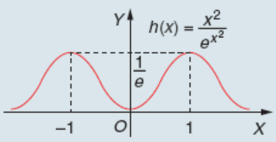


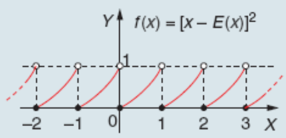
■ 7. Estudia la simetría de las siguientes funciones:

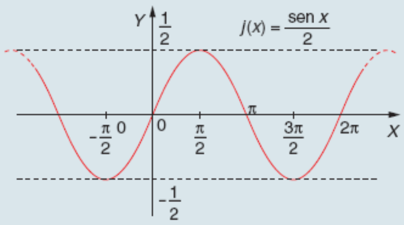
$f(x) = x^6 - x^4$ $\quad$ $g(x) = x - 1$ $\quad$ $h(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad$ $i(x) = \cos(2x)$

$j(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 4}$ $\quad$ $k(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$ $\quad$ $l(x) = |x|$ $\quad$ $m(x) = x \cdot e^{x^2}$

■ 8. Estudia la simetría de cada una de las siguientes funciones así como su periodicidad, hallando el periodo en las que ello sea posible:







■ 9. Dibuja las gráficas correspondientes a las funciones que verifican las siguientes condiciones:

a) Dom $f = \mathbb{R}$; Im $f = [0, +\infty)$; simetría respecto del eje de ordenadas, máximo relativo en el punto $(0, 2)$, y mínimos relativos en $(\sqrt{2}, 0)$ y en $(-\sqrt{2}, 0)$.

b) Dom $f = \mathbb{R}$; simetría respecto del origen de coordenadas; acotada por -1 y 1, alcanzando la función ambos valores; mínimo relativo en $(-2, -1)$, y máximo relativo en $(2, 1)$.

6. El estudio de cada función nos ofrece la siguiente información:

   a) Esta función $y = f(x)$ está acotada por $x = 0$ y $x = 4$.
      El supremo es $x = 4$ y el ínfimo es $x = 0$.
      Esta función tiene un mínimo absoluto en $x = 0$.
      No tiene simetría.

   b) Esta función $y = g(x)$ está acotada por $x = 3$ y $x = -2$.
      El supremo es $x = 3$ y el ínfimo es $x = -2$.
      Esta función no tiene extremos absolutos.
      No tiene simetría.

   c) Esta función $y = h(x)$ está acotada por $x = -3$ y $x = 5$.
      El supremo es $x = 5$ y el ínfimo es $x = -3$.
      Esta función tiene un máximo absoluto en $x = 5$.
      Es simétrica respecto al eje de ordenadas.

   d) Esta función $y = i(x)$ no está acotada.
      Es simétrica respecto al origen de coordenadas.

   e) Esta función $y = j(x)$ está acotada inferiormente por $x = -1$.
      El ínfimo es $x = -1$ y no tiene supremo.
      Esta función tiene un mínimo absoluto en $x = -1$.
      No tiene simetría.

   f) Esta función $y = k(x)$ está acotada superiormente por $x = 2$.
      El supremo es $x = 2$ y no tiene ínfimo.
      Esta función no tiene extremos absolutos.
      Es simétrica respecto al eje de ordenadas.

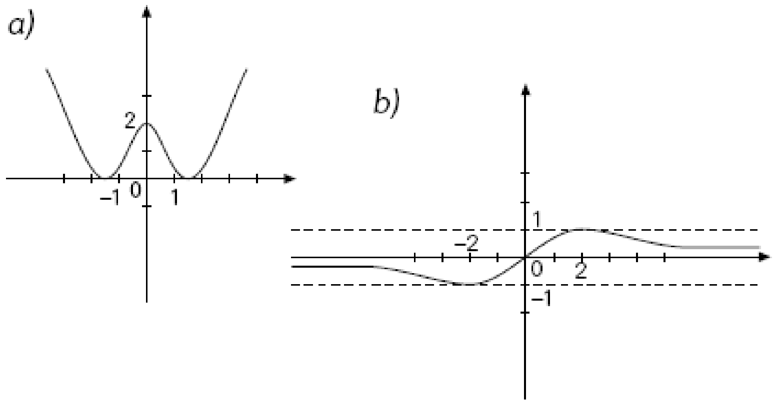
7. Las funciones se dividen en tres grupos:

   - Las funciones *f*; *i*; *k*; *l*; son simétricas respecto al eje de ordenadas.
   - Las funciones *h*; *j*; *m*; *q*; son simétricas respecto al origen de coordenadas.
   - Las demás funciones no tienen simetrías.

8. Las funciones quedan:

a) Simétrica respecto al eje de ordenadas y no periódica.
b) No tiene simetría y es periódica de período $T = 1$.
c) Simétrica respecto al origen de coordenadas y periódica de período $T = 2\pi$.

9. Las gráficas quedan:



ACTIVIDADES FINALES

10. Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{x}{2-x}$, $g(x) = x^2 + 2$, determina las siguientes funciones con sus respectivos dominios:

a) $f + g$ b) $f \cdot g$ c) $\dfrac{f}{g}$ d) $g \circ f$ e) $g \circ g$

11. Calcula la función inversa de cada una de las siguientes y comprueba, en cada caso, que la función dada compuesta con su inversa, da la función identidad:

$f(x) = x^3 - 2$ $g(x) = 1 - 3x$ $h(x) = 2^{x+2}$

12. Dadas las funciones $f(x) = 1 + 3x^2$, $g(x) = \sqrt{2x-4}$, $h(x) = \dfrac{3}{x^2+1}$, calcula:

a) $f \circ g$ c) $f \circ h$ e) $(g \circ f)(-1)$

b) $h \circ g$ d) $(f \circ f)(1)$ f) $(h \circ h)(0)$

13. Siendo $f(x) = 5 - x$, $g(x) = 3x - a$, calcula el valor de a para que la composición de ambas sea conmutativa, es decir, $f \circ g = g \circ f$.

14. Sea la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$. Comprueba que $f \circ f \circ f = i$.

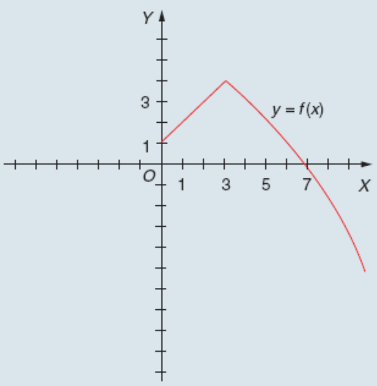
15. En un triángulo rectángulo la suma de sus catetos es de 20 metros. Halla la función $f(x)$ que hace el área de ese triángulo dependiente de la longitud de su cateto base. ¿Cuál es el dominio de esta función? Indica el significado que tiene este dominio en el contexto del problema. ¿Está acotada esta función? Estudia si tiene extremos absolutos e indica el sentido de los mismos.

16. Dadas las siguientes funciones halla, en cada caso, las dos funciones que, compuestas, nos dan la dada:

a) $(f \circ g)(x) = (x^3 + 2)^2$ b) $(h \circ l)(x) = 3^{2x}$ c) $(t \circ p)(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2}$

17. Sean $f(x) = \dfrac{x-2}{2}$, $g(x) = 2x - 4$. Calcula $(f \circ g)^{-1}(4)$.

18. El funicular de una estación turística funciona los sábados desde las 10 de la mañana hasta las cinco y media de la tarde ininterrumpidamente. Comienza la subida a las 10 de la mañana y, al cabo de 22 minutos, llega a la cima, donde durante 8 minutos se detiene y tarda en volver al punto de partida 10 minutos. El vehículo hace una parada de 5 minutos y vuelve a recorrer el mismo trayecto. Dibuja un gráfico que represente esta situación e indica el tipo de función que obtienes.



19. El siguiente dibujo muestra la gráfica de la función $y = f(x)$. Complétala de forma que verifique una de estas condiciones:

a) Que sea simétrica respecto del eje de coordenadas.

b) Que sea simétrica respecto al origen de coordenadas.

20. Usando la gráfica de la función $y = f(x)$ del dibujo adjunto, construye la gráfica de la función $y = |f(x)|$.

10. Los dominios quedan:

a) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\dfrac{x}{2-x}+x^2+2=\dfrac{-x^3+2x^2-x+4}{2-x}\ \Rightarrow$ Dominio $=\mathbb{R}-\{2\}$

b) $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\dfrac{x}{2-x}\cdot(x^2+2)=\dfrac{x^3+2x}{2-x}\ \Rightarrow$ Dom $f\cdot g=\mathbb{R}-\{2\}$

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x}{2-x}:(x^2+2)=\dfrac{x}{(2-x)\,(x^2+2)}\ \Rightarrow$ Dom $\dfrac{f}{g}=\mathbb{R}-\{2\}$

d) $(g\circ f)(x)=g\,[f(x)]=g\left[\dfrac{x}{2-x}\right]=\left(\dfrac{x}{2-x}\right)^2+2=\dfrac{3x^2-8x+8}{4-4x+x^2}\ \Rightarrow$ Dom $g\circ f=\mathbb{R}-\{2\}$

e) $(g\circ g)(x)=g\,[g(x)]=g\left[x^2+2\right]=(x^2+2)^2+2=x^4+4x^2+6\ \Rightarrow$ Dom $g\circ g=\mathbb{R}$

11. Queda en cada caso:

a) $f(x)=x^3-2\ \Rightarrow\ f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+2}$
y se comprueba que: $(f\circ f^{-1})(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=f\left[\sqrt[3]{x+2}\right]=x$

b) $g(x)=1-3x\ \Rightarrow\ g^{-1}(x)=\dfrac{1-x}{3}$
y se comprueba que: $(g\circ g^{-1})(x)=g\left[g^{-1}(x)\right]=g\left[\dfrac{1-x}{3}\right]=1-3\left(\dfrac{1-x}{3}\right)=x$

c) $h(x)=2^{x+2}\ \Rightarrow\ h^{-1}(x)=\log_2 x-2$
y se comprueba que: $(h\circ h^{-1})(x)=h\left[h^{-1}(x)\right]=h\,[\log_2 x-2]=2^{\log_2 x-2+2}=x$

12. Las soluciones son:

a) $f\circ g(x)=6x-11$

b) $h\circ g(x)=\dfrac{3}{2x-3}$

c) $f\circ h(x)=\dfrac{x^4+2x^2+28}{x^4+2x^2+1}$

d) $(f\circ f)(1)=13$

e) $(g\circ f)(-1)=2$

f) $(h\circ h)(0)=\dfrac{3}{10}$

13. La solución queda:

$$\left.\begin{array}{r}(f\circ g)(x)=f\,[g\,(x)]=f\,(3x-a)=5+a-3x\\ (g\circ f)(x)=g\,[f\,(x)]=g\,(5-x)=3\,(5-x)-a=15-a-3x\end{array}\right\}\Rightarrow\ a=5$$

14. Queda:

Veamos que $(f\circ f\circ f)(x)=i\,(x)=x\ \Rightarrow\ (f\circ f\circ f)(x)=f\circ f\,[f\,(x)]=f\left[f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)\right]=f\left(\dfrac{-1}{x-1}\right)=x$

15. Llamando x a la base, el cateto altura será $(20-x)$, por tanto el área viene dada por:

$$f\,(x)=-\frac{1}{2}x^2+10x$$

El dominio de esta función es $\mathbb{R}^+$, es decir, todos los valores reales positivos pueden tomar como valor el cateto base, excluido el cero.

Es una función acotada superiormente por 50 y este valor es su máximo absoluto, y acotada inferiormente por 0 que es su mínimo absoluto, aunque estos valores carecen de sentido como catetos del triángulo.

16. Por ejemplo, las funciones pueden ser:

a) $f(x)=x^2$ $\qquad g(x)=x^3+2$

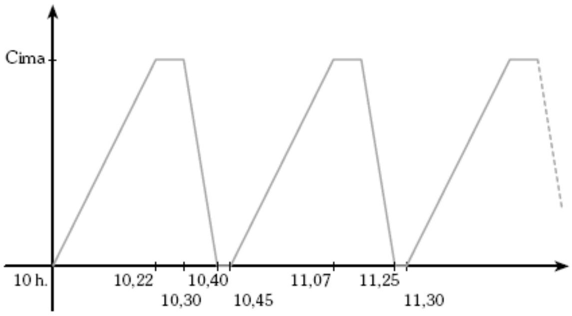
b) $h(x)=3^x$ $\qquad l(x)=2x$

c) $t(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$ $\qquad p(x)=x^2$

17. Queda:

$$(f\circ g)(x)=f\,[g\,(x)]=f\,[2x-4]=x-3$$
$$(f\circ g)^{-1}(x)=x+3$$
$$(f\circ g)^{-1}(4)=7$$

18. La representación quedaría del siguiente modo:

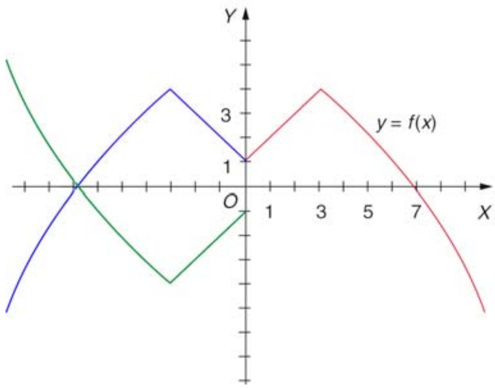


Es una función periódica de período 45 minutos.

19. La gráfica queda del siguiente modo:

a) Es la gráfica azul

b) Es la gráfica verde



20. La gráfica queda del siguiente modo: