

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Ecuaciones exponenciales

Resuelve las siguientes exponenciales

Ejercicio 1 $3^{\frac{x}{6}} = 9^{\frac{6}{7}}$

$$3^{\frac{x}{6}} = 9^{\frac{6}{7}} \rightarrow 3^{\frac{x}{6}} = (3^2)^{\frac{6}{7}} = 3^{\frac{12}{7}} \rightarrow \frac{x}{6} = \frac{12}{7}$$
$$x = \frac{22}{7}$$

Ejercicio 2 $\sqrt{4^{2x-2}} = 16$

Como $\sqrt{A^k} = A^{\frac{k}{2}}$ entonces; $\boxed{\sqrt{4^{2x-2}}} = 4^{\frac{2x-2}{2}} = 4^{x-1} = (2^2)^{x-1} = \boxed{2^{2x-2}}$

Por lo tanto la ecuación $\sqrt{4^{2x-2}} = 16$ queda así:

$$\boxed{2^{2x-2}} = 16 = \boxed{2^4} \rightarrow 2x - 2 = 4$$

$$x = 3$$

Ejercicio 3 $3^{x^2-5x} = \frac{1}{729}$

$$\boxed{3^{x^2-5x}} = \frac{1}{729} = \frac{1}{3^6} = \boxed{3^{-6}} \rightarrow x^2 - 5x = -6 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Ejercicio 4 $3^{9x^4-10x^2+1} = 1$

$$\boxed{3^{9x^4-10x^2+1}} = 1 = \boxed{3^0} \rightarrow 9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$$

Resolviendo la ecuación bicuadrada tendremos:

$$x^2 = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{18} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{18} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \frac{1}{9} \end{array} \right.$$

Con lo que:

$$\left| \begin{array}{c} x^2 = 1 \\ x = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \end{array} \right| \qquad \left| \begin{array}{c} x^2 = \frac{1}{9} \\ x = \begin{cases} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{cases} \end{array} \right|$$

Ejercicio 5 $\frac{110}{11^x} + 1 = 11^x$

Multiplicando la ecuación por 11^x tendremos:

$$110 + 11^x = (11^x)^2$$

Transponiendo términos, obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado:

$$(11^x)^2 - 11^x - 110 = 0$$

Resolviéndola

$$11^x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 440}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{441}}{2} = \frac{1 \pm 21}{2} = \begin{cases} 11 \\ -10 \end{cases}$$

obtenemos las siguientes ecuaciones exponenciales elementales.

$$\left| \begin{array}{c} 11^x = 11 = 11^1 \\ x = 1 \end{array} \right| \qquad \left| \begin{array}{c} 11^x = -10 \\ \text{Imposible; ya que } 11^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right|$$

Ejercicio 6 $2 \cdot 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 64$

$$2 \cdot 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 64 \rightarrow 2 \cdot 2^x + 2^x \cdot 2 + 2^x \cdot 2^2 = 64$$

Sacando factor común 2^x a la izquierda de la ecuación:

$$2^x(2 + 2 + 4) = 64 \rightarrow 2^x \cdot 8 = 64 \rightarrow \boxed{2^x} = \frac{64}{8} = 8 = \boxed{2^3}$$

$$x = 3$$

Ejercicio 7 $2^x = \frac{1}{2^{x-1}} - 1$

Como $\frac{1}{2^{x-1}} = \frac{1}{\frac{2^x}{2}} = \frac{2}{2^x}$

La ecuación inicial queda así:

$$2^x = \frac{2}{2^x} - 1$$

Si multiplicamos la ecuación por 2^x

$$(2^x)^2 = 2 - 2^x$$

transponiendo términos, obtenemos la ecuación de segundo grado siguiente:

$$(2^x)^2 + 2^x - 2 = 0$$

Resolviéndola :

$$2^x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$$

obtenemos las siguientes ecuaciones exponenciales elementales.

$$\left| \begin{array}{l} 2^x = 1 = 2^0 \\ x = 0 \end{array} \right| \qquad \left| \begin{array}{l} 2^x = -4 \\ \text{Imposible; ya que } 2^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right|$$

Ejercicio 8 $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} - 31 = 0$

$$5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} - 31 = 0 \rightarrow 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 31$$

$$5^x + 5^x \cdot 5 + 5^x \cdot 5^2 = 31$$

Sacando factor común 5^x

$$5^x(1 + 5 + 25) = 31 \rightarrow 5^x \cdot 31 = 31 \rightarrow \boxed{5^x} = \frac{31}{31} = 1 = \boxed{5^0}$$

$$x = 0$$

Ejercicio 9 $2^x - 3 \cdot 2^{2x-1} + 5 \cdot 2^{x-2} + 78 = 0$

$$2^x - 3 \cdot 2^{2x-1} + 5 \cdot 2^{x-2} + 78 = 0 \rightarrow 2^x - 3 \cdot \frac{2^{2x}}{2} + 5 \cdot \frac{2^x}{2^2} + 78 = 0$$

Si multiplicamos por 4

$$4 \cdot 2^x - 6 \cdot 2^{2x} + 5 \cdot 2^x + 312 = 0 \rightarrow -6 \cdot 2^{2x} + 9 \cdot 2^x + 312 = 0$$

Como $2^{2x} = (2^x)^2$; entonces:

$$-6 \cdot 2^{2x} + 9 \cdot 2^x + 312 = 0 \rightarrow -6 \cdot (2^x)^2 + 9 \cdot 2^x + 312 = 0$$

Tenemos una ecuación de segundo grado cuya incógnita a determinar es 2^x . Resolviéndola:

$$2^x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 7488}}{-12} = \frac{-9 \pm \sqrt{7569}}{-12} = \frac{-9 \pm 87}{-12} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{78}{12} \\ 8 \end{array} \right.$$

obtenemos las siguientes ecuaciones exponenciales elementales.

$$\left| \begin{array}{l} 2^x = 8 = 2^3 \\ x = 3 \end{array} \right| \qquad \left| \begin{array}{l} 2^x = -\frac{78}{12} \\ \text{Imposible; ya que } 2^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right|$$

Ejercicio 10 $4^x - 3 \cdot 2^x - 40 = 0$

Como $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$ entonces:

$$4^x - 3 \cdot 2^x - 40 = 0 \rightarrow (2^x)^2 - 3 \cdot 2^x - 40 = 0$$

Tenemos una ecuación de segundo grado cuya incógnita a determinar es 2^x . Resolviéndola:

$$2^x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 160}}{2} = \frac{3 \pm 13}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 8 \\ -5 \end{array} \right.$$

obtenemos las siguientes ecuaciones exponenciales elementales.

$$\left| \begin{array}{l} 2^x = 8 = 2^3 \\ x = 3 \end{array} \right| \qquad \left| \begin{array}{l} 2^x = -5 \\ \text{Imposible; ya que } 2^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right|$$

Ejercicio 11 $2^{3x-1} + 2^{6x-4} - 8 = 0$

$$2^{3x-1} + 2^{6x-4} - 8 = 0 \rightarrow \frac{2^{3x}}{2} + \frac{2^{6x}}{2^4} - 8 = 0$$

Multiplicando la ecuación por 16

$$8 \cdot 2^{3x} + 2^{6x} - 128 = 0$$

Como $2^{6x} = (2^{3x})^2$ entonces; obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado (incógnita 2^{3x}):

$$(2^{3x})^2 + 8 \cdot 2^{3x} - 128 = 0$$

Resolviéndola

$$2^{3x} = \frac{-8 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{-8 \pm 24}{2} = \begin{cases} 8 \\ -16 \end{cases}$$

obtenemos las siguientes ecuaciones exponenciales elementales.

$$\left| \begin{array}{l} 2^{3x} = 8 = 2^3 \\ x = 1 \end{array} \right| \qquad \left| \begin{array}{l} 2^{3x} = -16 \\ \text{Imposible; ya que } 2^{3x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right|$$

Ejercicio 13 $27^x + 9^{3x} - 12 = 0$

$$\text{Como } \left[\begin{array}{l} 27^x = (3^3)^x = 3^{3x} \\ y \\ 9^{3x} = (3^2)^{3x} = (3^{3x})^2 \end{array} \right] \text{ entonces:}$$

$$27^x + 9^{3x} - 12 = 0 \rightarrow 3^{3x} + (3^{3x})^2 - 12 = 0 \rightarrow (3^{3x})^2 + 3^{3x} - 12 = 0$$

Tenemos una ecuación de segundo grado cuya incógnita a determinar es 3^{3x} . Resolviéndola:

$$3^{3x} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$$

obtenemos las siguientes ecuaciones exponenciales elementales.

$$\left| \begin{array}{l} 3^{3x} = 3 = 3^1 \\ x = \frac{1}{3} \end{array} \right| \qquad \left| \begin{array}{l} 3^{3x} = -4 \\ \text{Imposible; ya que } 3^{3x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right|$$

Ejercicio 14 $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^{4x} + 4^{2x} + 12 = 0$

$$\text{Como } \left[\begin{array}{l} 4^x = (2^2)^x = (2^{2x}) \\ y \\ 2^{4x} = (2^{2x})^2 \\ 4^{2x} = (2^2)^{2x} = (2^{2x})^2 \end{array} \right] \text{ entonces:}$$

$$2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^{4x} + 4^{2x} + 12 = 0 \rightarrow 2 \cdot (2^{2x}) - 5 \cdot (2^{2x})^2 + (2^{2x})^2 + 12 = 0$$

reduciendo términos y ordenándolos:

$$-4 \cdot (2^{2x})^2 + 2 \cdot (2^{2x}) + 12 = 0$$

Si dividimos por -2

$$2 \cdot (2^{2x})^2 - 1 \cdot (2^{2x}) - 6 = 0$$

obtenemos una ecuación de segundo grado en 2^x . Resolviéndola:

$$(2^{2x}) = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$$

obtenemos las siguientes ecuaciones exponenciales elementales.

$$\left| \begin{array}{l} 2^{2x} = 2 = 2^1 \\ x = \frac{1}{2} \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} 2^{2x} = -\frac{3}{2} \\ \text{Imposible; ya que } 2^{2x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right|$$

Ejercicio 15 $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = \frac{5^{x+3}}{2} - \frac{315}{2}$

$$5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = \frac{5^{x+3}}{2} - \frac{315}{2} \rightarrow 5^x + 5^x \cdot 5 + 5^x \cdot 5^2 = \frac{5^x \cdot 5^3}{2} - \frac{315}{2}$$

Transponemos el término $\frac{5^x \cdot 5^3}{2}$ a la izquierda de la ecuación

$$5^x + 5^x \cdot 5 + 5^x \cdot 5^2 - \frac{5^x \cdot 5^3}{2} = -\frac{315}{2} \text{ y sacamos factor común } 5^x.$$

$$5^x \left(1 + 5 + 5^2 - \frac{5^3}{2} \right) = -\frac{315}{2}$$

Operando

$$5^x \left(31 - \frac{125}{2} \right) = -\frac{315}{2} \rightarrow 5^x \left(-\frac{63}{2} \right) = -\frac{315}{2} \rightarrow 5^x = \frac{315}{63} = 5$$

$$x = 1$$

Ejercicio 16 $3^{2-x} + 2 \cdot 3^{3-x} = 7$

$$3^{2-x} + 2 \cdot 3^{3-x} = 7 \rightarrow \frac{3^2}{3^x} + 2 \cdot \frac{3^3}{3^x} = 7 \rightarrow \frac{9}{3^x} + \frac{54}{3^x} = 7$$

$$\frac{63}{3^x} = 7 \rightarrow 3^x = 9 = 3^2 \rightarrow x = 2$$

Ejercicio 17 $2^{x+2} + 4^{x+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 23$

$$\text{Como } \left[\begin{array}{l} 2^{x+2} = 2^x \cdot 2^2 = 4 \cdot (2^x) \\ 4^{x+1} = (2^2)^{x+1} = 2^{2x+2} = 2^{2x} \cdot 2^2 = 4 \cdot (2^x)^2 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = (2^{-1})^{x-1} = 2^{-x+1} = \frac{2}{2^x} \end{array} \right] \text{ entonces:}$$

$$2^{x+2} + 4^{x+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 23 \rightarrow 4 \cdot (2^x) + 4 \cdot (2^x)^2 - \frac{2}{2^x} = 23$$

Si multiplicamos por 2^x
 $4 \cdot (2^x)^2 + 4 \cdot (2^x)^3 - 2 = 23 \cdot 2^x$. Transponiendo términos y ordenando obtenemos la siguiente ecuación de tercer grado (en 2^x)

$$4 \cdot (2^x)^3 + 4 \cdot (2^x)^2 - 23 \cdot 2^x - 2 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 4 & 4 & -23 & -2 \\ \hline & 4 & 12 & 1 & 0 \end{array}$$

$$(2^x - 2) [4 \cdot (2^x)^2 + 12 \cdot 2^x + 1] = 0$$

Como un producto de dos factores es cero cuando al menos alguno de ellos es cero.

$$(2^x - 2) [4 \cdot (2^x)^2 + 12 \cdot 2^x + 1] = 0 \rightarrow \begin{cases} 2^x - 2 = 0 \rightarrow 2^x = 2 \rightarrow x = 1 \\ 4 \cdot (2^x)^2 + 12 \cdot (2^x) + 1 = 0 \rightarrow 2^x = \begin{cases} -6 + 4\sqrt{2} \approx -0.34 \\ -6 - 4\sqrt{2} \approx -11.66 \end{cases} \end{cases}$$

Las ecuaciones exponenciales elementales $2^x = \begin{cases} -6 + 4\sqrt{2} \approx -0.34 \\ -6 - 4\sqrt{2} \approx -11.66 \end{cases}$
 no tienen solución ;ya que $2^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ejercicio 19 $a^{x+2} \cdot a^{x-1} = a^{x^2+1}$ siendo $a > 0$

$$a^{x+2} \cdot a^{x-1} = a^{x^2+1} \rightarrow a^{2x+1} = a^{x^2+1} \rightarrow 2x+1 = x^2+1 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 20 $\frac{\sqrt{x}a^2}{\sqrt[3x]{a^4}} = \sqrt[3]{a^{x^2-3}}$ siendo $a > 0$

$$\frac{\sqrt{x}a^2}{\sqrt[3x]{a^4}} = \sqrt[3]{a^{x^2-3}} \rightarrow \frac{a^{\frac{2}{x}}}{a^{\frac{4}{3x}}} = a^{\frac{x^2-3}{3}} \rightarrow a^{\frac{2}{x} - \frac{4}{3x}} = a^{\frac{x^2-3}{3}}$$

$$\frac{2}{x} - \frac{4}{3x} = \frac{x^2-3}{3}$$

Multiplicando por $3x$

$$6 - 4 = x^3 - 3x$$

Transponiendo términos y ordenando

$$x^3 - 3x - 2 = 0$$

Para resolver esta ecuación, utilizaremos la regla de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$x^3 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \\ x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases} \end{cases}$$

Ejercicio 21 $\sqrt{a^{\frac{6}{x}}}\sqrt[4]{a^{x^2}} = \sqrt[3]{a^{-x}}\sqrt[6]{a^{11x+3}}$ siendo $a > 0$

$$\sqrt{a^{\frac{6}{x}}}\sqrt[4]{a^{x^2}} = \sqrt[3]{a^{-x}}\sqrt[6]{a^{11x+3}} \rightarrow a^{\frac{6}{2x}}a^{\frac{x^2}{4}} = a^{\frac{-x}{3}}a^{\frac{11x+3}{6}} \rightarrow a^{\frac{6}{2x} + \frac{x^2}{4}} =$$

$$\frac{6}{2x} + \frac{x^2}{4} = \frac{-x}{3} + \frac{11x+3}{6}$$

Multiplicando por $12x$

$$36 + 3x^3 = -4x^2 + 22x^2 + 6x$$

Reduciendo, transponiendo y ordenando términos

$$3x^3 - 18x^2 - 6x + 36 = 0$$

dividiendo por 3

$$x^3 - 6x^2 - 2x + 12 = 0$$

Para resolver esta ecuación, utilizaremos la regla de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & -2 & +12 \\ 6 & & 6 & 0 & -122 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$x^3 - 6x^2 - 2x + 12 = 0 \Leftrightarrow (x-6)(x^2-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x-6=0 \rightarrow x=6 \\ x^2-2=0 \rightarrow x=\begin{cases} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

Ejercicio 22 $\frac{\sqrt[4]{a^{x^2-1}}}{a^3} = \sqrt[3]{a^{x+4}}$ siendo $a > 0$

$$\frac{\sqrt[4]{a^{x^2-1}}}{a^3} = \sqrt[3]{a^{x+4}} \rightarrow \frac{a^{\frac{x^2-1}{4}}}{a^3} = a^{\frac{x+4}{3}} \rightarrow a^{\frac{x^2-1}{4}-3} = a^{\frac{x+4}{3}}$$

$$\frac{x^2-1}{4} - 3 = \frac{x+4}{3}$$

Multiplicando por 12

$$3x^2 - 3 - 36 = 4x + 16$$

Transponiendo términos y ordenando

$$3x^2 - 4x - 55 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 5 \\ -\frac{11}{3} \end{cases}$$

Ejercicio 23 $a^{x^2-x+1} = \frac{1}{a^{\sqrt{2}-3}}$ siendo $a > 0$

$$a^{x^2-x+1} = \frac{1}{a^{\sqrt{2}-3}} \rightarrow a^{x^2-x+1} = a^{-\sqrt{2}+3}$$

$$x^2 - x + 1 = -\sqrt{2} + 3 \rightarrow x^2 - x + (-2 + \sqrt{2}) = 0$$

$$\begin{aligned} & \text{Resolviéndola} \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-2 + \sqrt{2})}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9 - 4\sqrt{2}}}{2} = \frac{1 \pm (2\sqrt{2} - 1)}{2} = \\ x &= \begin{cases} \sqrt{2} \\ 1 - \sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Ejercicio 24 $a^{3x+5} - a^{2x} = 0$ siendo $a > 0$

$$a^{3x+5} - a^{2x} = 0 \rightarrow a^{3x+5} = a^{2x}$$

Como $a > 0$;podemos dividir la ecuación por a^{2x} . Con lo que obtenemos la ecuación:

$$\frac{a^{3x+5}}{a^{2x}} = \frac{a^{2x}}{a^{2x}} \rightarrow a^{x+5} = 1 = a^0$$

De donde

$$x + 5 = 0 \rightarrow x = -5$$

Ejercicio 25 $2^{3x-1} \cdot 3^{3x+6} = 27^{x+2} \cdot 16$

$$2^{3x-1} \cdot 3^{3x+6} = 27^{x+2} \cdot 16 \rightarrow 2^{3x-1} \cdot 3^{3x+6} = 3^{3x+6} \cdot 16$$

Dividiendo por 3^{3x+6}

$$2^{3x-1} = 16 = 2^4 \rightarrow 3x - 1 = 4 \rightarrow x = \frac{5}{3}$$

Ejercicio 26 $\frac{8^x + 16}{2} = 8^{x-1} + \frac{19}{2}$

$$\frac{8^x + 16}{2} = 8^{x-1} + \frac{19}{2} \rightarrow \frac{8^x + 16}{2} = \frac{8^x}{8} + \frac{19}{2}$$

Multiplicando por 8

$$4 \cdot 8^x + 64 = 8^x + 76$$

Aislado 8^x

$$3 \cdot 8^x = 12 \rightarrow 8^x = 4 \rightarrow (2^3)^x = 2^2 \rightarrow 2^{3x} = 2^2 \rightarrow 3x = 2$$

$$x = \frac{2}{3}$$

Ejercicio 27 $4^{2x+1} - 3 \cdot 4^x - 10 = 0$

Como $4^{2x+1} = 4 \cdot (4^x)^2$ entonces:

$$4^{2x+1} - 3 \cdot 4^x - 10 = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot (4^x)^2 - 3 \cdot 4^x - 10 = 0$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado

$$4^x = \frac{3 \pm \sqrt{169}}{8} = \frac{3 \pm 13}{8} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{5}{4} \end{cases}$$

obtenemos las siguientes ecuaciones exponenciales elementales.

$$\left| \begin{array}{l} 2^{2x} = 4^x = 2^1 \\ x = \frac{1}{2} \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} 4^x = -\frac{5}{4} \\ \text{Imposible; ya que } 4^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right|$$

Ejercicio 28 Resuelve tú $4^x - 16^x = 4^{2x-1} - 3$

Ecuaciones logarítmicas

Resuelve las siguientes ecuaciones

Ejercicio 1 $\log(x - 2) = 2$

$$\log(x - 2) = 2 \rightarrow \log_{10}(x - 2) = 2$$

Aplicando la definición de logaritmo, tendremos:

$$x - 2 = 10^2 = 100 \rightarrow x = 102$$

Comprobación:

$$\log(102 - 2) = \log 100 = 2$$

Ejercicio 2 $2 \log x - \log 4 = 0$

$$2 \log x - \log 4 = 0 \rightarrow \log x^2 = \log 4$$

$$x^2 = 4 \rightarrow x = \begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases}$$

Comprobación:

a) $x = 2$ si que es solución ya que:

$$2 \log 2 - \log 4 = \log 2^2 - \log 4 = \log 4 - \log 4 = 0$$

b) $x = -2$ no es solución ya que $\log(-2)$ no se puede calcular en

$\mathbb{R}$

Ejercicio 3 $\log \sqrt[5]{x} - \log x^2 = 9$

$$\log \sqrt[5]{x} - \log x^2 = 9 \rightarrow \frac{1}{5} \log x - 2 \log x = 9 \rightarrow \left(\frac{1}{5} - 2\right) \log x = 9$$

la ecuación inicial es equivalente a:

$$-\frac{9}{5} \log x = 9 \rightarrow \log x = -5$$

como $\log x = \log_{10} x$, entonces:

$$\log_{10} x = -5$$

Aplicando la definición de logaritmo, tendremos:

$$x = 10^{-5} = \frac{1}{10^5}$$

Comprobación:

$x = \frac{1}{10^5}$ si que es solución ya que:

$$\log \sqrt[5]{10^{-5}} - \log (10^{-5})^2 = \log 10^{-1} - \log 10^{-10} = \log \left(\frac{10^{-1}}{10^{-10}}\right) =$$

$$\log 10^9 = 9$$

Ejercicio 4 $\log_3 \sqrt{x} + \log_3 9x - 5 = \log_3 \left(\frac{x}{3}\right)$

$\log_3 \sqrt{x} + \log_3 9x - 5 = \log_3 \left(\frac{x}{3}\right) \rightarrow \log_3 \sqrt{x} + \log_3 9x - \log_3 \left(\frac{x}{3}\right) = 5$
 Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\frac{1}{2} \log_3 x + \log_3 9 + \log_3 x - \log_3 x + \log_3 3 = 5$$

Como $\begin{bmatrix} \log_3 9 = 2 \\ y \\ \log_3 3 = 1 \end{bmatrix}$ la ecuación quedará así:

$$\frac{1}{2} \log_3 x + 2 + \log_3 x - \log_3 x + 3 = 5$$

Reduciendo términos y aislando $\log_3 x$:

$$\frac{1}{2} \log_3 x = 2 \rightarrow \log_3 x = 4$$

Aplicando la definición de logaritmo

$$x = 3^4 = 81$$

Comprobación:

$x = 3^4 = 81$ si que es solución; ya que:

$$\begin{aligned} \text{Término izquierda ec} \\ \log_3 \sqrt{3^4} + \log_3 (3^3 \cdot 3^4) - 5 \\ \log_3 3^2 + \log_3 3^6 - 5 \\ 2 + 6 - 5 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Término derecha ec.} \\ \log_3 \left(\frac{3^4}{3}\right) \\ \log_3 3^3 \\ 3 \end{aligned}$$

Ejercicio 5 $2^x = 3$

$$2^x = 3$$

Por la definición de logaritmo; sabemos que la solución es $\log_2 3$

Ahora bien, la solución también la podemos obtener tomando logaritmos decimales:

$$\log 2^x = \log 3 \rightarrow x \log 2 = \log 3$$

Aislado x

$$x = \frac{\log 3}{\log 2} = \log_2 3 \approx 1.585$$

Ejercicio 6 $x^{1.56} = 8$

$$x^{1.56} = 8$$

tomando logaritmos decimales:

$$\log x^{1.56} = \log 8 \rightarrow 1.56 \log x = \log 8$$

Aislado $\log x$

$$\log_{10} x = \frac{\log_{10} 8}{1.56}$$

Aplicando la definición de logaritmo decimal:

$$\log_{10} x = \frac{\log_{10} 8}{1.56} \rightarrow x = 10^{\frac{\log_{10} 8}{1.56}} \approx 3.792$$

Ejercicio 7 $\log(2x - 4) - \log(x + 2) = 1$,

$$\log(2x - 4) - \log(x + 2) = 1 \rightarrow \log\left(\frac{2x - 4}{x + 2}\right) = 1 = \log 10$$

De donde:: obtenemos la ecuación:

$$\frac{2x - 4}{x + 2} = 10$$

Multiplicando por $x + 2$ (Lo podemos hacer ya que $x \neq -2$)

$$2x - 4 = 10x + 20 \rightarrow x = -3$$

Comprobación

$x = -3$ no es solución de la ecuación; ya que al sustituir en la ecuación inicial obtenemos el logaritmo decimal de un número negativo (no es un número real)

Ejercicio 8 $3 \log x = \log 25 + \log x$

Aislado $\log x$

$$2 \log x = \log 25 \rightarrow \log x = \frac{1}{2} \log 25 = \log\left(25^{\frac{1}{2}}\right) = \log 5$$

De donde deducimos que

$$x = 5$$

Comprueba tú que $x = 5$ si es solución de la ecuación.

Ejercicio 9 $2 \log(x + 1) - \log 2 = \log(x^2 - 1)$

$$2 \log(x + 1) - \log 2 = \log(x^2 - 1) \rightarrow \log(x + 1)^2 - \log 2 = \log(x^2 - 1)$$

$$\log\left[\frac{(x + 1)^2}{2}\right] = \log(x^2 - 1)$$

Por lo que:

$$\frac{(x + 1)^2}{2} = (x^2 - 1)$$

¹ Si $x = -2$ al sustituir en la ecuación inicial no podríamos calcular $\log(x + 2)$

Multiplicando la ecuación por 2

$$(x+1)^2 = 2(x^2-1)$$

Desarrollando los cuadrados y transponiendo términos, obtenemos la ec. de segundo grado

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

Comprobación:

a) $x = 3$ si que es solución ya que:

Término izquierda ec

$$2 \log 4 - \log 2$$

$$\log 4^2 - \log 2$$

$$\log \left(\frac{4^2}{2} \right) = \log 8$$

Término derecha ec.

$$\log 8$$

b) $x = -1$ no es solución ($\log 0$ no se puede calcular)

Ejercicio 10 $\log(x^3 - 8) = 3 \log(x - 2)$

$$\log(x^3 - 8) = 3 \log(x - 2) \rightarrow \log(x^3 - 8) = \log(x - 2)^3$$

De donde, podemos afirmar que:

$$x^3 - 8 = (x - 2)^3$$

como $(x - 2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ entonces

$$x^3 - 8 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

$$0 = -6x^2 + 12x$$

$$0 = x^2 - 2x$$

Resolviendo la ecuación $0 = x^2 - 2x$ obtenemos como posibles soluciones.

$$x = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$$

Nota: Comprueba tú que ninguna posible solución lo es

Ejercicio 11 $\frac{\log(x^2+11)}{2} = \log x + \log 6 - \log 5$

$$\frac{\log(x^2+11)}{2} = \log x + \log 6 - \log 5 \rightarrow \frac{\log(x^2+11)}{2} = \log \left(\frac{6x}{5} \right)$$

Multiplicando por 2:

$$\log(x^2 + 11) = 2 \log \left(\frac{6x}{5} \right) = \log \left(\frac{6x}{5} \right)^2$$

De donde

$$x^2 + 11 = \frac{36x^2}{25}$$

Multiplicando por 25

$$25x^2 + 275 = 36x^2 \rightarrow 11x^2 = 275 \rightarrow x^2 = 25$$

Con lo que las posibles soluciones son

$$x = \begin{cases} 5 \\ -5 \end{cases}$$

Nota: La única que vale es el 5 (Compruébalo tú)

Ejercicio 12 $\frac{\log_{10}(x^2-4)}{2} = 1 - \log_{10} 5$

Multiplicando por 2

$$\log(x^2 - 4) = 2 - 2 \log 5$$

como $\begin{bmatrix} 2 = \log 100 \\ y \\ 2 \log 5 = \log 5^2 = \log 25 \end{bmatrix}$ la ecuación nos quedará así:

$$\log(x^2 - 4) = \log 100 - \log 25 = \log 4$$

De donde:

$$x^2 - 4 = 4 \rightarrow x^2 = 8 \rightarrow x = \begin{cases} \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{8} = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

Los dos valores obtenidos son solución de la ecuación inicial.

Ejercicio 13 $\log \sqrt{3x+10} - \log \sqrt{x+2} = 1 - \log 5$

$$\log(3x+10)^{\frac{1}{2}} - \log(x+2)^{\frac{1}{2}} = \log 10 - \log 5$$

$$\frac{1}{2} \log(3x+10) - \frac{1}{2} \log(x+2) = \log\left(\frac{10}{5}\right) = \log 2$$

Si multiplicamos por 2

$$\log(3x+10) - \log(x+2) = 2 \log 2$$

$$\log\left(\frac{3x+10}{x+2}\right) = \log 4^2 = \log 4 \rightarrow \frac{3x+10}{x+2} = 4$$

Multiplicando por $x+2$ (Lo podemos hacer; ya que $x \neq -2$)

$$3x+10 = 4(x+2)$$

Transponiendo términos y aislando la incógnita:

$$x = 2$$

Comprobación:

²Si $x = -2$ al sustituir en la ecuación inicial no podríamos calcular $\log(x+2)$

Miembro izquierda ec	Miembro derecha ec
$\log \sqrt{3(2) + 10} - \log \sqrt{(2) + 2}$	$1 - \log 5$
$\log 4 - \log 2 = \log \left(\frac{4}{2}\right) = \log 2$	$\log 10 - \log 5 = \log \left(\frac{10}{5}\right) = \log 2$

Ejercicio 14 $\frac{\log(16 - x^2)}{\log(3x - 4)} = 2$

$$\frac{\log(16 - x^2)}{\log(3x - 4)} = 2 \rightarrow \log(16 - x^2) = 2 \log(3x - 4)$$

$$\log(16 - x^2) = \log(3x - 4)^2$$

Obteniendo la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} 16 - x^2 &= (3x - 4)^2 \\ 16 - x^2 &= 9x^2 - 24x + 16 \\ 0 &= 10x^2 - 24x \\ 0 &= 5x^2 - 12x \end{aligned}$$

Factorizando la ecuación

$$x(5x - 12) = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ \frac{12}{5} \end{cases}$$

Nota 1: $x = 0$ no es solución

Nota 2: $x = \frac{12}{5}$ si es solución (compruébalo)

Ejercicio 15 $\frac{\log 2 + \log(11 - x^2)}{\log(5 - x)} = 2$

$$\frac{\log 2 + \log(11 - x^2)}{\log(5 - x)} = 2 \rightarrow \log 2 + \log(11 - x^2) = 2 \log(5 - x)$$

$$\begin{aligned} \log 2 + \log(11 - x^2) &= \log(5 - x)^2 \\ \log [2(11 - x^2)] &= \log(25 - 10x + x^2) \end{aligned}$$

Lo que da lugar a la ecuación:

$$22 - 2x^2 = 25 - 10x + x^2$$

Transponiendo y ordenando términos, obtenemos la ecuación:

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

Cuyas soluciones son:

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} = \begin{cases} 3 \\ \frac{1}{3} \end{cases}$$

Nota: comprueba que los dos valores son solución de la ecuación.

Ejercicio 16 $\log(x+1) - \log\sqrt{x-1} = \log(x-2)$

$$\log(x+1) - \log\sqrt{x-1} = \log(x-2)$$

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}\right) &= \log(x-2) \\ \frac{x+1}{\sqrt{x-1}} &= x-2\end{aligned}$$

Si elevamos al cuadrado:

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x-1} = x^2 - 4x + 4$$

Multiplicando por $x-1$ (Lo podemos hacer ya que $x-1 \neq 0$.) :

$$\begin{aligned}x^2 + 2x + 1 &= (x^2 - 4x + 4)(x-1) \\ x^2 + 2x + 1 &= x^3 - 5x^2 + 8x - 4\end{aligned}$$

Transponiendo y reduciendo términos semejantes, obtenemos la ecuación de tercer grado:

$$0 = x^3 - 6x^2 + 6x - 5$$

Para resolverla, factorizamos dicho polinomio utilizando la regla de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} 5 & 1 & -6 & 6 & -5 \\ & & 5 & -5 & 5 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

Con lo que resolver la ecuación anterior es equivalente a resolver

$$(x-5)(x^2-x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x-5=0 \rightarrow x=5 \\ x^2-x+1=0 \text{ no tiene solución real} \end{cases}$$

Ejercicio 17 $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \ln 2 = \ln(x+3)$

$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \ln 2 = \ln(x+3) \rightarrow \ln\left[\frac{2(x+1)}{x}\right] = \ln(x+3)$$

Por lo que:

$$\frac{2(x+1)}{x} = x+3$$

Multiplicando por x (Lo podemos hacer ya que $x \neq 0$.)

$$\begin{aligned}2x+2 &= x^2+3x \\ x^2+x-2 &= 0\end{aligned}$$

³Si $x=1$ al sustituir en la ecuación inicial no podríamos calcular $\log(\sqrt{x-1})$

⁴Si $x=0$ al sustituir en la ecuación inicial no podríamos calcular $\frac{x+1}{x}$

Cuyas soluciones son

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

Nota: Las dos soluciones obtenidas son válidas (Compruébalo)

Ejercicio 18 $\log(x^2 + 2x - 39) - \log(3x - 1) = 1$

$$\log(x^2 + 2x - 39) - \log(3x - 1) = 1 \rightarrow \log \left[\frac{x^2 + 2x - 39}{3x - 1} \right] = \log 10$$

De donde

$$\frac{x^2 + 2x - 39}{3x - 1} = 10$$

Multiplicando por $3x - 1$ (Lo podemos hacer ya que $3x - 1 \neq 0$)

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 39 &= 30x - 10 \\ x^2 - 28x - 29 &= 0 \end{aligned}$$

Cuyas soluciones son

$$x = \frac{28 \pm \sqrt{784 + 116}}{2} = \frac{28 \pm \sqrt{900}}{2} \begin{cases} 29 \\ -1 \end{cases}$$

De las dos posibles soluciones, $x = -1$ no es solución (Compruébalo)

Ejercicio 19 $\log(x - 1) = \log \sqrt{x + 1} + \log \sqrt{x - 4}$

$$\log(x - 1) = \log \sqrt{x + 1} + \log \sqrt{x - 4} \rightarrow \log(x - 1) = \log [\sqrt{x + 1} \sqrt{x - 4}]$$

De donde:

$$\begin{aligned} x - 1 &= \sqrt{x + 1} \sqrt{x - 4} \\ x - 1 &= \sqrt{x^2 - 3x - 4} \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 &= x^2 - 3x - 4 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

Nota: $x = -5$ no es solución

Ejercicio 20 $\log(x + 1) = \log \sqrt{x - 1} + \log \sqrt{x + 4}$

⁵ Si $x = \frac{1}{3}$ al sustituir en la ecuación inicial no podríamos calcular $\log(3x - 1)$

$$\log(x+1) = \log \sqrt{x-1} + \log \sqrt{x+4} \rightarrow \log(x+1) = \log [\sqrt{x-1}\sqrt{x+4}]$$

De donde:

$$\begin{aligned} x+1 &= \sqrt{x-1}\sqrt{x+4} \\ x+1 &= \sqrt{x^2+3x-4} \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado

$$\begin{aligned} x^2+2x+1 &= x^2+3x-4 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Nota: $x = 5$ si es solución

Ejercicio 21 $\log(x+1) = \log \sqrt{x-1} + \log \sqrt{x-4}$

$$\log(x+1) = \log \sqrt{x-1} + \log \sqrt{x-4} \rightarrow \log(x+1) = \log [\sqrt{x-1}\sqrt{x-4}]$$

De donde:

$$\begin{aligned} x+1 &= \sqrt{x-1}\sqrt{x-4} \\ x+1 &= \sqrt{x^2-5x+4} \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado

$$\begin{aligned} x^2+2x+1 &= x^2-5x+4 \\ x &= \frac{3}{7} \end{aligned}$$

Nota: $x = \frac{3}{7}$ no es solución.

Ejercicio 22 $\log(1-x) = \log \sqrt{1+x} + \log \sqrt{4-x}$

$$\log(1-x) = \log \sqrt{1+x} + \log \sqrt{4-x} \rightarrow \log(1-x) = \log [\sqrt{1+x}\sqrt{4-x}]$$

De donde:

$$\begin{aligned} 1-x &= \sqrt{1+x}\sqrt{4-x} \\ 1-x &= \sqrt{-x^2+3x+4} \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado

$$\begin{aligned} x^2-2x+1 &= -x^2+3x+4 \\ 2x^2-5x-3 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos:

$$x = \begin{cases} 3 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Nota: $x = 3$ no es solución y $x = -\frac{1}{2}$ si lo es

Ejercicio 23 $\log_7(x-2) - \log_7(x+2) = 1 - \log_7(2x-7)$

$\log_7(x-2) - \log_7(x+2) = 1 - \log_7(2x-7)$
como $1 = \log_7 7$; entonces la ecuación anterior queda:

$$\begin{aligned}\log_7(x-2) - \log_7(x+2) &= \log_7 7 - \log_7(2x-7) \\ \log_7\left(\frac{x-2}{x+2}\right) &= \log_7\left(\frac{7}{2x-7}\right)\end{aligned}$$

Al ser la función logarítmica una biyección de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$, tendremos.

$$\frac{x-2}{x+2} = \frac{7}{2x-7}$$

Multiplicando por $(x+2)(2x-7)$ (Lo podemos hacer ya que $x \neq -2$ y $x \neq \frac{7}{2}$). Si x fuese -2 no podría calcular $\log(x+2)$ y si fuese $x = \frac{7}{2}$ entonces no podría calcular $\log_7(2x-7)$

$$(x-2)(2x-7) = 7(x+2)$$

Operando y transponiendo términos, obtenemos la ecuación

$$\begin{aligned}2x^2 - 18x &= 0 \\ x^2 - 9x &= 0 \\ x(x-9) &= 0\end{aligned}$$

cuyas soluciones son :

$$x = \begin{cases} 0 \\ 9 \end{cases}$$

comprueba que el 0 no es solución y 9 si que lo es

Ejercicio 24 $\log(2x+1)^2 + \log(3x-4)^2 = 2$

$$\log(2x+1)^2 + \log(3x-4)^2 = 2 \rightarrow 2\log(2x+1) + 2\log(3x-4) = 2$$

Dividiendo entre 2

$$\log(2x+1) + \log(3x-4) = 1 \rightarrow \log_{10}[(2x+1)(3x-4)] = 1$$

Aplicando la definición de logaritmo:

$$(2x+1)(3x-4) = 10$$

Operando y transponiendo términos, obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado:

$$6x^2 - 5x - 14 = 0$$

Cuyas soluciones son:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 336}}{12} = \frac{5 \pm \sqrt{361}}{12} = \frac{5 \pm 19}{12} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{7}{6} \end{cases}$$

Realiza tú las comprobaciones (Los dos valores obtenidos verifican la ecuación).

Ejercicio 25 $-2 \ln x = 3$

$-2 \ln x = 3 \rightarrow \ln x = -\frac{3}{2}$
como $\ln x = \log_e x$; entonces

$$\log_e x = -\frac{3}{2}$$

Aplicando la definición de logaritmo:

$$x = e^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{e\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{e\sqrt{e}\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{e^2} \approx 0.22313$$