1 Hallar b, c y d en la función $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ para que tenga un punto de inflexión de abcisa $x = 3$, pase por el punto $P(1, 0)$ y alcance un mínimo en $x = 1$.

– Para resolver esto debemos obtener tantas ecuaciones como parámetros haya.
$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ tres parámetros desconocidos necesito 3 ecuaciones.

– Punto de inflexión en $x = 3$, la derivada 2ª se anula para $x = 3$, por ser un punto de inflexión.
$f''(x) = 6x + 2b \Rightarrow 0 = 6 \cdot 3 + 2b \Rightarrow 2b = -18 \Rightarrow b = -9$

– Pasa por el punto P (1, 0), coordenadas de un punto de la función, para $x = 1$ $f(1) = 0$.
$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow 0 = 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d \Rightarrow b + c + d = -1$

– Mínimo en $x = 1$, la derivada 1ª se anula para $x = 1$, por tratarse de un mínimo.
$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c \Rightarrow 0 = 3 \cdot 1 + 2b \cdot 1 + c \Rightarrow 2b + c = -3$

– Resolvemos el sistema formado por las 3 ecuaciones

$$\begin{cases} b = -9 \\ 2b + c = -3 \Rightarrow 2 \cdot (-9) + c = -3 \Rightarrow c = 15 \\ b + c + d = -1 \Rightarrow -9 + 15 + d = -1 \Rightarrow d = -7 \end{cases} \quad \text{Función} \Rightarrow f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 7$$

2 Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^3 - 6x^2 + 16x - 11$ en su punto de inflexión.

– Punto de inflexión
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 16x - 11 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 16 \Rightarrow f''(x) = 6x - 12 \Rightarrow 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$

– Ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^3 - 6x^2 + 16x - 11$ en $x = 2$.

Hallamos $f(2) = 2^3 - 6 \cdot \left(2^2\right) + 16 \cdot 2 - 11 \Rightarrow f(2) = 5$

Hallamos la pendiente de la recta tangente sustituyendo $x = 2$ el la derivada 1ª.
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 16 \Rightarrow f'(2) = 3 \cdot \left(2^2\right) - 12 \cdot 2 + 16 \Rightarrow f'(2) = 4 \Rightarrow m = f'(2) = 4$

Ecuación de la recta tangente: $y - 5 = 4(x - 2) \Rightarrow y = 4x - 3$

3 Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm cada uno, y los laterales 1cm cada uno.
Halla las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.

– Intentamos dibujar la situación ver figura.
Llamamos x e y cm a las dimensiones de la hoja de papel.
Con los datos que nos dan las dimensiones el texto impreso son x - 4 e y -2 cm.

– Planteamos dos 2 ecuaciones:

a) Condición que se tiene que dar: 18 cm^2 de texto impreso, es decir, $(x-4)(y-2)=18$

b) Función a minimizar : área de la hoja de papel, es decir, $S(x) = x \cdot y$

– Resolvemos el sistema de ecuaciones $\Rightarrow \begin{cases} (x-4)(y-2)=18 & [1] \\ S(x) = x \cdot y & [2] \end{cases}$

Despejamos una de las incógnitas de la ecuación donde nos han dado el dato, [1].

$$(x-4)(y-2)=18 \Rightarrow y - 2 = \frac{18}{x-4} \Rightarrow y = \frac{18}{x-4}+2 \quad \Rightarrow y = \frac{2x+10}{x-4}$$

Sustituimos la incógnita despejada en la otra ecuación, función a minimizar [2].

$$S(x) = x \cdot y \Rightarrow \quad S(x) = x \cdot \left(\frac{2x+10}{x-4}\right) \quad \Rightarrow \quad S(x) = \frac{2x^2+10x}{x-4}$$

Derivamos, igualamos la derivada a cero, resolvemos y obtenemos el valor de x.

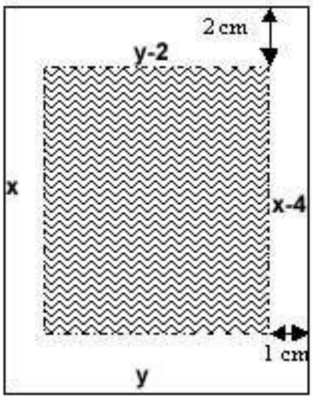
$$S' = \frac{2x^2-16x-40}{(x-4)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{2x^2-16x-40}{(x-4)^2} = 0 \Rightarrow 2x^2-16x-40=0 \Rightarrow x^2-8x-20=0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 10 \\ x_2 = -2 \end{matrix}$$

Hallamos el valor de y para x = 10 cm. $y = \frac{2x+10}{x-4} \quad \Rightarrow y = \frac{2 \cdot 10 + 10}{10-4} = 5$ cm

Dimensiones de la hoja de papel: x = 10 cm, y = 5 cm.

– Hacemos la derivada segunda para comprobar que el valor obtenido x = 10 es un mínimo.

$$S'' = \frac{(4x-16)(x-4)^2 - 2(x-4)(2x^2-16x-40)}{(x-4)^4} \Rightarrow S''(10) > 0 \text{ Es un mínimo.}$$



+

4 Los barriles que se utilizan para almacenar petroleo tienen forma cilíndrica y una capacidad de 160 litros. Hallar las dimensiones del cilindro para que la chapa empleada en su construcción sea mínima.

Cilindro $\Rightarrow$ Sean **r** el radio de la base y **h** la altura del cilindro

Volumen = $\overbrace{\pi \cdot r^2}^{\text{área base}} \cdot h$ $\quad \mathbf{V = \pi \cdot r^2 \cdot h}$ $\quad$ Área total = $\overbrace{2 \cdot \pi \cdot r^2}^{\text{área (base + tapa)}} + \overbrace{2 \cdot \pi \cdot r \cdot h}^{\text{área lateral}}$ $\quad \mathbf{S(r) = 2\pi \cdot r \cdot (r + h)}$

- Planteamos las dos ecuaciones, despejamos h de la ecuación [1] , sustituimos el valor en [2].

$$\begin{cases} \pi \cdot r^2 \cdot h = 160 & [1] \\ S(r) = 2\pi \cdot r \cdot (r + h) & [2] \end{cases} \quad h = \frac{160}{\pi \cdot r^2} \; [3] \quad S(r) = 2\pi \cdot r \cdot \left(r + \frac{160}{\pi \cdot r^2}\right) \quad S(r) = 2\pi \cdot r \cdot \left(\frac{\pi \cdot r^3 + 160}{\pi \cdot r^2}\right)$$

$$S(r) = \frac{2\left(\pi \cdot r^3 + 160\right)}{r} \quad \Rightarrow S(r) = \frac{2\pi \cdot r^3 + 320}{r}$$

*** En todos los pasos debemos simplificar al máximo para facilitar los cálculos.

– Hacemos la derivada primera, resolvemos para obtener el valor de r, sustituimos r en [3] para calcular h. Las unidades de r y h son en dm, recuerda la equivalencia 1 L = 1 dm^3.

$$S´(r) = \frac{\left(6 \cdot \pi \cdot r^2\right) \cdot r - \left(2\pi \cdot r^3 + 320\right) \cdot 1}{r^2} \quad \Rightarrow \quad S´(r) = \frac{4\pi \cdot r^3 - 320}{r^2} \quad \Rightarrow \quad S´(r) = 0$$

$$S´(r) = \frac{4\pi \cdot r^3 - 320}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\pi \cdot r^3 - 320 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^3 = \frac{320}{4\pi} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{80}{\pi}} \text{ dm}$$

$$h = \frac{160}{\pi \cdot r^2} \quad \Rightarrow h = \frac{160}{\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{80}{\pi}}\right)^2} = \frac{160}{\pi \cdot 4 \cdot \sqrt[3]{\frac{100}{\pi^2}}} = \frac{40}{\sqrt[3]{\frac{100 \cdot \pi^3}{\pi^2}}} = \frac{40}{\sqrt[3]{100 \cdot \pi}} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{40}{\sqrt[3]{100 \cdot \pi}} \text{ dm}$$

– Hacemos la derivada segunda para comprobar que el valor obtenido de r es un mínimo.

$$S´´(r) = \frac{4\pi \cdot r^3 + 640}{r^3} \quad \Rightarrow \quad S´´\left(\sqrt[3]{\frac{80}{\pi}}\right) = \frac{4\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{80}{\pi}}\right)^3 + 640}{\left(\sqrt[3]{\frac{80}{\pi}}\right)^3} = 12 \cdot \pi \Rightarrow S´´\left(\sqrt[3]{\frac{80}{\pi}}\right) > 0 \text{ mínimo}$$