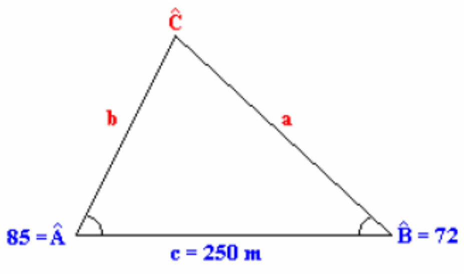
2. Dos observadores separados 250 m ven un globo estático situado entre ellos bajo ángulos de 72º y 85º. A que altura se encuentra el globo. A que distancia se encuentra cada observador del globo.

Solución.



Lo primero es calcular el ángulo que falta teniendo en cuenta que la suma de todos los ángulos vale 180º

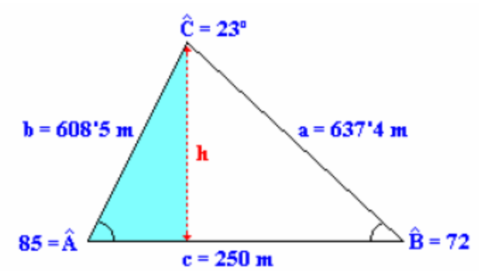
$$\hat{C} = 180 - \left(\hat{A} + \hat{B}\right) = 180 - (85 + 72) = 23º$$

Conocidos los tres ángulos y un lado los restantes se calculan mediante el teorema del seno.

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \quad : \quad a = c \cdot \frac{\operatorname{sen}\hat{A}}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 250 \cdot \frac{\operatorname{sen}85}{\operatorname{sen}23} = 637'4\text{m}$$

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \quad : \quad b = c \cdot \frac{\operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 250 \cdot \frac{\operatorname{sen}72}{\operatorname{sen}23} = 608'5\text{m}$$

Los observadores se encuentran a 637’4 m y a 608’5 m



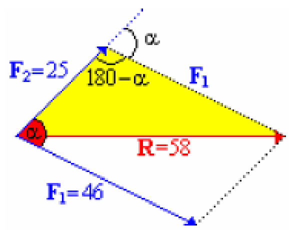
Aplicando la definición de seno al ángulo A se calcula la altura del globo

$$\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{h}{b}$$

$$h = b \cdot \operatorname{sen}\hat{A} = 608'5 \cdot \operatorname{sen}85 = 606'2\text{m}$$

3. Dos fuerzas de 46 N y 25 N dan una resultante de 58 N. Calcular el ángulo que forman entre sí, y los que forman cada una de ellas con la resultante.

Solución.



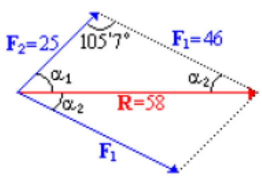
Del triángulo resaltado en la figura se conocen los tres lados, por tanto se pude aplicar el teorema del coseno para calcular cos $(180 - \alpha)$.

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(180 - \alpha)$$

$$\cos(180 - \alpha) = \frac{F_1^2 + F_2^2 - R^2}{2F_1F_2} = \frac{46^2 + 25^2 - 58^2}{2 \cdot 46 \cdot 25} = -0'27$$

$$180 - \alpha = \arccos -0'27 = 105'7º \quad \Rightarrow \quad \alpha = 180 - 105'7 = 74'3º$$

Para calcular los ángulos que forma cada una de las fuerzas con la resultante (α_1 , α_2) se recurre al triángulo formado por F_1, F_2 y R, del que se conocen las longitudes de los tres lados y un ángulo, como muestra la figura adjunta. Si aplicamos el teorema del coseno al lado F_1, se puede despejar el cos α_1.



$$F_1^2 = R^2 + F_2^2 - 2RF_2\cos\alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha_1 = \frac{R^2 + F_2^2 - F_1^2}{2RF_2}$$

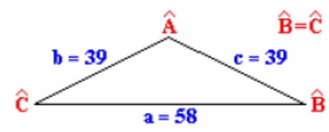
$$\cos\alpha_1 = \frac{58^2 + 25^2 - 46^2}{2 \cdot 58 \cdot 25} = 0'646 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 49'8º$$

Conocidos dos ángulos, el tercero se calcula como diferencia hasta 180º

$$\alpha_2 = 180 - (105'7 + 49'8) = 24'5º$$

4. La base de un triángulo isósceles mide 58 cm y los lados iguales 39 cm. Calcular los ángulos.

Solución.



Triángulo isósceles del que se conocen las longitudes de los lados. Aplicando el teorema del coseno se puede calcular $\cos\hat{A}$.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} \qquad \cos\hat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{39^2+39^2-58^2}{2\cdot 39\cdot 39} = -0'1059$$

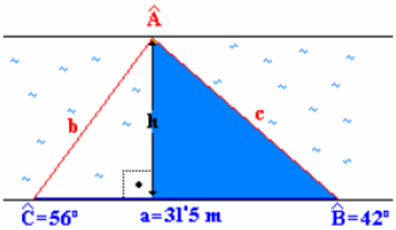
$$\hat{A} = \text{ar}\cos -0'1059 \cong 96^\circ$$

Conocido $\hat{A}$ se pueden calcular $\hat{B}$ y $\hat{C}$ teniendo en cuenta que $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$, y que el triángulo es isósceles y $\hat{B}=\hat{C}$.

$$\left.\begin{array}{r}\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ\\ \hat{B}=\hat{C}\end{array}\right\}: \hat{A}+2\hat{B}=180^\circ \Rightarrow \hat{C}=\hat{B}=\frac{180^\circ-\hat{A}}{2}=\frac{180^\circ-96^\circ}{2}=42^\circ$$

5. Un río tiene las dos orillas paralelas. Desde los puntos A y B de una orilla se observa un punto C de la orilla opuesta. Las visuales forman con la orilla unos ángulos de 42º y 56º respectivamente. Calcular la anchura del río sabiendo que la distancia entre los puntos A y B es de 31,5 m

Solución.



La anchura del río (h) se puede obtener aplicando la definición del $\text{sen}\,\hat{B}$ al triángulo rectángulo resaltado en la figura.

$$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{h}{c} \quad \Rightarrow \quad h = c\cdot\text{sen}\,\hat{B}$$

El lado c se calcula en el triángulo ABC, del que se conocen los ángulos $\hat{B}, \hat{C}$ y el lado a.

Conocidos dos ángulos, el tercero se calcula como diferencia hasta 180º

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180 \qquad \hat{A}=180-\left(\hat{B}+\hat{C}\right)=180^\circ-(42+56)=82^\circ$$

Conocidos los tres ángulos y el lado a, se calcula el lado c mediante el teorema del seno.

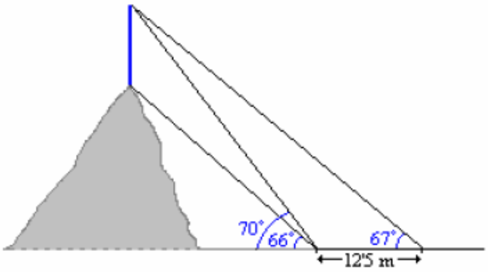
$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}}=\frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} \qquad c = a\cdot\frac{\text{sen}\,\hat{C}}{\text{sen}\,\hat{A}} = 31'5\cdot\frac{\text{sen}\,56}{\text{sen}\,82} = 26'4\text{ m}$$

Conocido c se calcula la anchura del río.

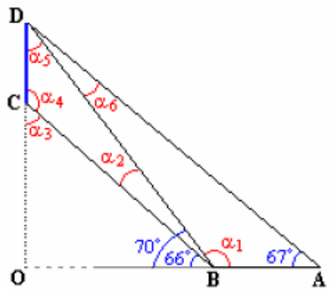
$$h = c\cdot\text{sen}\,\hat{B} = 26'4\cdot\text{sen}\,42 = 17'6\text{ m}$$

6. Calcular la altura de un repetidor de TV ubicado en la cima de una montaña sabiendo que desde un punto alejado del pie de la montaña la base y el vértice del repetidor se ven bajo unos ángulos de 66º y 70º respectivamente. Si nos alejamos de esa posición en línea recta 12,5 m el vértice ahora lo vemos bajo un ángulo de 67º.

Solución.



Con la información del enunciado se pueden obtener una serie de triángulos, rectángulos y oblicuángulos, en los que calcular todos los ángulos únicamente con la condición de que la suma de ángulos es igual a 180º.



- α_1. Es suplementario al ángulo de 70º.

$$\alpha_1 = 180 - 70 = 110º$$

- α_2. Como diferencia de ángulos

$$\alpha_2 = 70 - 66 = 4º$$

- α_3: Complementario al ángulo de 66º.

$$\alpha_3 = 90 - 66 = 24º$$

- α_4. Suplementario a α_3.

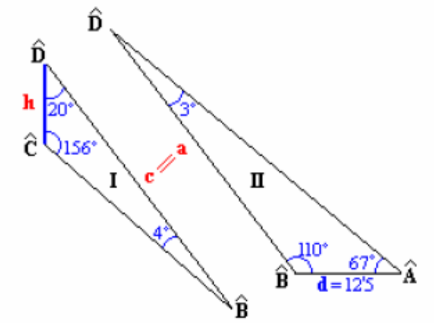
$$\alpha_4 = 180 - 24 = 156º$$

- α_5. En el triángulo BCD: $\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5 = 180º$

$$\alpha_5 = 180 - (4 + 156) = 20º$$

- α_6. En el triángulo ABD: $67 + \alpha_1 + \alpha_6 = 180º$

$$\alpha_6 = 180 - (67 + 110) = 3º$$



Una vez conocidos todos los ángulos, el problema se resuelve mediante dos triángulos oblicuángulos que comparten un lado como muestra la figura.

En el triángulo I se calcula a mediante el teorema del seno.

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{d}{\operatorname{sen}\hat{D}} \qquad a = d \cdot \frac{\operatorname{sen}\hat{A}}{\operatorname{sen}\hat{D}}$$

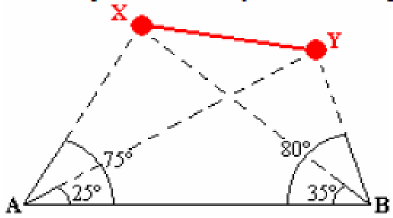
$$a = 12'5 \cdot \frac{\operatorname{sen} 67º}{\operatorname{sen} 3º} \approx 220$$

Teniendo en cuenta que a = c, en el triángulo II se calcula h con el teorema des seno.

$$\frac{h}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \qquad h = c \cdot \frac{\operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

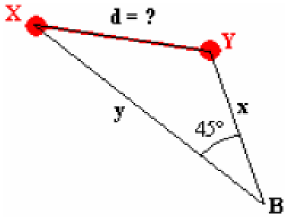
$$h = 220 \cdot \frac{\operatorname{sen} 4º}{\operatorname{sen} 156º} \approx 37'7 \text{ m}$$

7. Calcular la distancia entre dos puntos inaccesibles (X e Y) si desde dos puntos, A y B que distan 210 m, se observan los puntos X e Y bajo las visuales que muestra la figura.



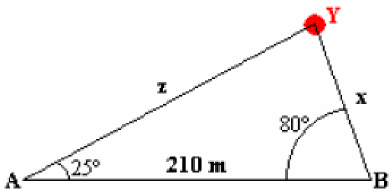
Solución.

Lo primero es seleccionar un triángulo donde este la longitud pedida, uno de ellos puede ser el BXY.



Para calcular **d**, necesitamos conocer **x** e **y**, que localizamos en otros triángulos donde tengamos más datos.

- **x** se pude calcular en el triángulo ABY aplicando el teorema del seno.

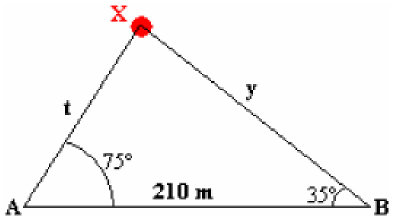


$$25°+80°+\hat{Y}=180° \qquad \hat{Y}=75°$$

$$\frac{x}{\text{sen } 25°}=\frac{210}{\text{sen } 75°} \qquad x=210\frac{\text{sen } 25°}{\text{sen } 75°}$$

$$x \approx 92 \text{ m}$$

- **y** se puede calcular en el triángulo ABX

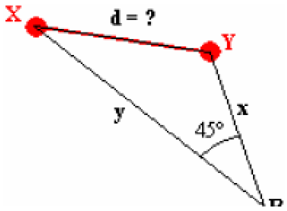


$$75°+35°+\hat{X}=180° \qquad \hat{X}=70°$$

$$\frac{y}{\text{sen } 75°}=\frac{210}{\text{sen } 70°} \qquad x=210\frac{\text{sen } 75°}{\text{sen } 70°}$$

$$x \approx 216 \text{ m}$$

Conocidos $\hat{B}$, **x** e **y** se calcula el valor de **d** mediante el teorema del coseno.

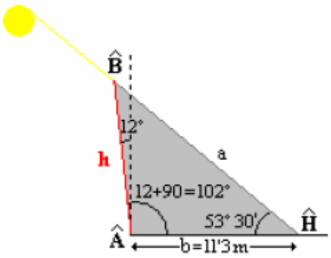


$$d^2=x^2+y^2-2x\cdot y\cdot\cos\hat{B}$$

$$d=\sqrt{92^2+216^2-2\cdot 92\cdot 216\cdot\cos 45°}\approx 164 \text{ m}$$

8. Un poste inclinado 12º de la vertical hacia la posición del Sol, proyecta una sombra de 11,32 m cuando la altura del Sol (ángulo al que se encuentra sobre el horizonte) es de 53º30'. Hallar la longitud del poste.

Solución.



Para resolver el problema es conveniente nombrar los ángulos y lados del triángulo. Triángulo oblicuángulo del que se conocen dos ángulos $(\hat{A}, \hat{H})$ y un lado (b).

La forma más rápida de calcular h es mediante el teorema del seno aplicado entre b y h.

$$\frac{h}{\text{sen}\,\hat{H}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} \qquad h = b \cdot \frac{\text{sen}\,\hat{H}}{\text{sen}\,\hat{B}}$$

El ángulo $\hat{B}$ se calcula como diferencia de los otros dos hasta 180º.

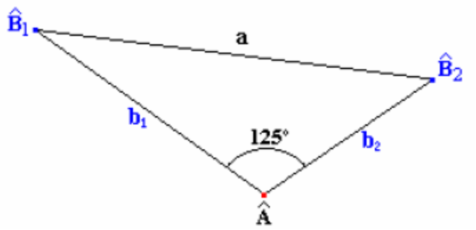
$$\hat{B} = 180 - (\hat{A} + \hat{H}) = 180 - (102 + 53'5º) = 24'5º$$

$$h = b \cdot \frac{\text{sen}\,\hat{H}}{\text{sen}\,\hat{B}} = 11'3 \cdot \frac{\text{sen}\,53'5º}{\text{sen}\,24'5} = 21'9\ \text{m}$$

**Nota:* 30' <> 0'5º

9. Dos barcos salen de un puerto con rumbos distintos, formando ángulo de 127º. El primero partió a las 10 h. con velocidad de 17 Km./h. El segundo lo hizo a las 11'30 con velocidad de 26 Km./h. Si el alcance de sus equipos de radio es de 150 Km, ¿podrán ponerse en contacto a las 3 de la tarde?

Solución.



Triángulo oblicuángulo del que se conocen dos lados en función del tiempo y el ángulo que forman, y se pide la longitud del lado que falta. La solución se obtiene mediante el teorema del coseno.

Las longitudes de los lados conocidos se expresan en función del tiempo que llevan navegando los barcos y de sus velocidades respectivas mediante la ecuación del M.R.U. $s = s_o + v \cdot t$.

$$\begin{cases} b_1 = v_1 \cdot t_1 \\ b_2 = v_2 \cdot t_2 \end{cases}$$

A las tres de la tarde (15'00), la distancia que separa a cada barco de puerto teniendo en cuenta la hora de partida de cada uno y sus respectivas velocidades es:

$$\begin{cases} b_1 = 17\,{}^{Km}\!/_{h} \cdot (15 - 10)h = 85\,Km \\ b_2 = 26\,{}^{Km}\!/_{h} \cdot (15 - 11'5)h = 91\,Km \end{cases}$$

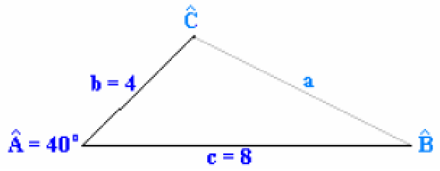
Conocido b_1, b_2, y el ángulo que forman ($\hat{A}$), con el teorema del seno se calcula el lado que falta (a).

$$a = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 - 2b_1b_2 \cos\hat{A}} = \sqrt{85^2 + 91^2 - 2 \cdot 85 \cdot 91 \cdot \cos 125º} = 156\,Km$$

Como la distancia entre los barcos es mayor que el alcance, no podrán ponerse en contacto.

10. En el triángulo ABC conocemos el ángulo $\hat{A} = 40°$, y los lados b = 4 cm y c = 8 cm. Dibújalo. Traza la altura, la mediana y la bisectriz que parten del vértice C y calcula sus medidas trigonométricamente.

Solución.



Triángulo oblicuángulo del que se conocen la longitud de dos de sus lados (b y c) y el ángulo que forman estos ($\hat{A}$).

Aplicando el teorema del coseno se calcula el lado que falta (a).

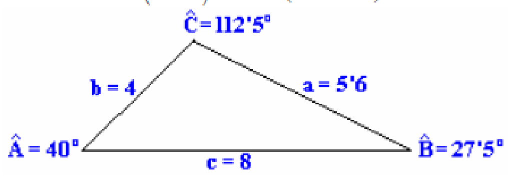
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} : \ a = \sqrt{4^2 + 8^2 - 2\cdot 4\cdot 8\cos 40°} = 5'6$$

Conocidos todos los lados, se calcula el coseno de uno de los ángulos desconocidos a partir del teorema del coseno.

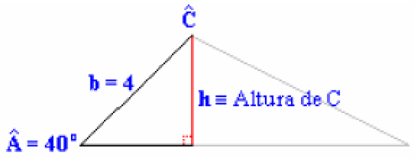
$$\cos\hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{5'6^2 + 8^2 - 4^2}{2\cdot 5'6\cdot 8} = 0'89 : \ \hat{B} = \arccos 0'89 = 27'5°$$

El último ángulo se obtiene como diferencia hasta 180°.

$$\hat{C} = 180 - (\hat{A} + \hat{B}) = 180 - (40 + 27'5) = 112'5°$$



Altura: Recta que pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto.

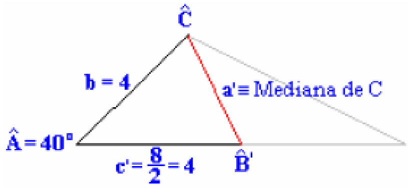


Se calcula por la definición de seno.

$$\text{sen}\,\hat{A} = \frac{h}{b}$$

$$h = b\cdot \text{sen}\,\hat{A} = 4\cdot \text{sen}\,40° = 2'5$$

Mediana: Recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

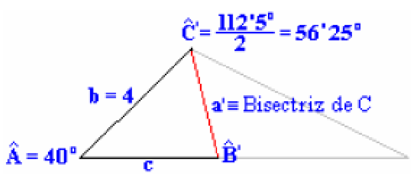


Se calcula por el teorema del coseno.

$$a' = \sqrt{b^2 + c'^2 - 2bc\cos\hat{A}}$$

$$a' = \sqrt{4^2 + 4^2 - 2\cdot 4\cdot 4\cos 40} = 2'7$$

Bisectriz: Recta que divide a un ángulo en dos partes iguales.



Por suma de ángulos se calcula $\hat{B}'$

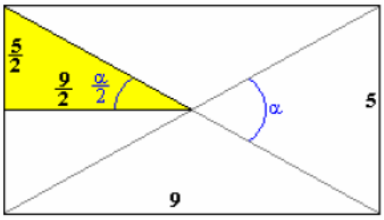
$$\hat{B}' = 180 - (\hat{A} + \hat{C}') = 180 - (40 + 56'25) = 83'75°$$

Mediante el teorema del seno se calcula la bisectriz de $\hat{C}$ (a´).

$$\frac{a'}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}'} \quad a' = b\frac{\text{sen}\,\hat{A}}{\text{sen}\,\hat{B}'} = 4\frac{\text{sen}\,40°}{\text{sen}\,83'75°} = 2'6$$

12. Una mesa de ping-pong es un rectángulo de 9x5 pies. Calcula el ángulo que forman al cortarse las diagonales de dicho rectángulo.

Solución.



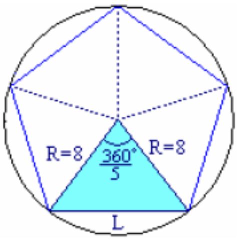
Observando la figura, el ángulo pedido se puede obtener por aplicación de la definición de tangente en el triángulo rectángulo coloreado.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto opuesto}}=\frac{5/2}{9/2}=\frac{5}{9}$$

$$\frac{\alpha}{2}=\operatorname{arctg}\frac{5}{9}=29^\circ\Rightarrow\alpha=2\cdot 29^\circ=58^\circ$$

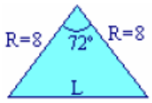
13. Calcular la longitud de los lados y el área de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 8 cm.

Solución.



El pentágono regular se puede descomponer en cinco triángulos isósceles idénticos, de los que se conocerían la longitud de los lados iguales (el radio de la circunferencia) y el ángulo desigual, tal como muestra la figura.

Aplicando el teorema del coseno al triángulo isósceles, se calcula la longitud del lado del pentágono.



$$L=\sqrt{R^2+R^2-2RR\cos\frac{360^\circ}{5}}$$

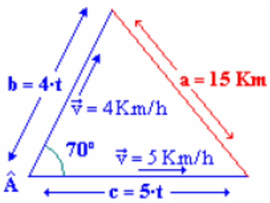
$$L=\sqrt{8^2+8^2-2\cdot 8\cdot 8\cos 72^\circ}=9'4\text{ cm}$$

El área del pentágono se calcula como 5 veces el área del triángulo.

$$A_P=5\cdot A_T=5\cdot\frac{1}{2}ab\,\text{sen}\,\hat{C}=\left\{\begin{matrix}a=b=R\\ \hat{C}=72^\circ\end{matrix}\right\}=5\cdot\frac{1}{2}R^2\ \text{sen}\,72^\circ==5\cdot\frac{1}{2}8^2\ \text{sen}\,72^\circ=152'2\text{ cm}^2$$

14. Dos exploradores que caminan por una estepa se separan a las 2 de la tarde. Deciden caminar siempre en línea recta. Sus trayectorias forman un ángulo de 70º, para ello cuentan con brújulas y mapas que les permiten mantener el rumbo. Sus velocidades de marcha son 4 y 5 Km./h respectivamente. Van también provistos de un "Walkie-talkie" que tiene un alcance de 15 Km, esto les permitir estar en conexión un buen rato. ¿Hasta qué hora?.

Solución.



La posición de los dos exploradores transcurrido un tiempo t, y el punto de partida forman un triángulo como el que muestra la figura, del que se puede expresar la longitud de los lados recorridos por estos en función de t, y por tanto en el punto de máximo alcance se debe de cumplir el teorema de coseno.

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$$

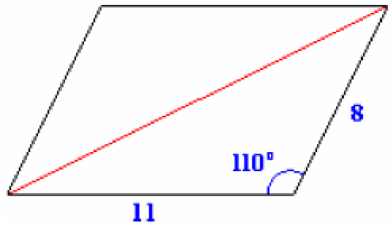
$$15^2=16t^2+25t^2-2\cdot 4t\cdot 5t\cdot\cos 70$$

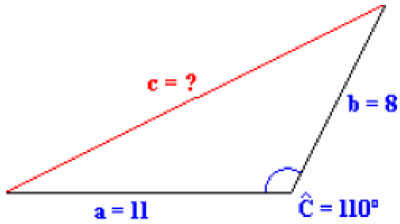
$$225=41t^2-40\cos 70\,t^2\qquad 225=(41-40\cos 70)t^2$$

$$t=\sqrt{\frac{225}{41-40\cos 70}}=2'87\text{ h}=2\text{ h }52'$$

15. En un paralelogramo conocemos la medida de los lados, 8 y 11 m. Los ángulos obtusos miden 110º cada uno. Calcula la medida de la diagonal mayor del paralelogramo y el área. **(1 punto)**

Solución.



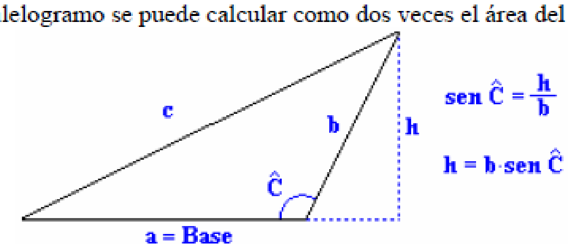


Dividiendo el paralelogramo en dos triángulos por la diagonal mayor se obtienen dos triángulos semejantes, del que se conoce dos lados y el ángulo que forman. El lado que falta (diagonal mayor, c) se obtiene por el teorema del coseno.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C} \qquad\qquad c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}}$$

$$c = 8\sqrt{11^2 + 8^2 - 2\cdot 11\cdot 8\cos 110^\circ} = 15'7$$

El área del paralelogramo se puede calcular como dos veces el área del triángulo.



$$\text{Área Triángulo} = \frac{1}{2}a\cdot b\cdot \text{sen}\,\hat{C} = \frac{1}{2}11\cdot 8\cdot \text{sen}\,110^\circ = 41'3\ \text{m}^2$$

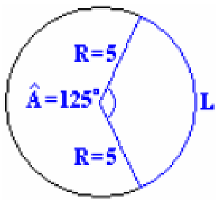
$$\text{Área Paralelogramo} = 2\times \text{Área Triángulo} = 2\cdot 41'3 = 82'6\ \text{m}^2$$

16. En una circunferencia de radio 5 cm. se considera un arco de 125º. Calcular:

a. La longitud de la cuerda, y el área del triángulo que determina la cuerda con los radiovectores.
b. El área del sector circular y el área del segmento circular correspondiente a ese arco.

Solución.

a. Longitud de la cuerda:



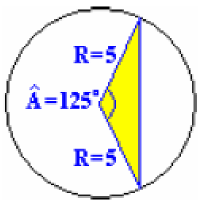
$$L = \alpha\,R$$

Donde α es el ángulo en radianes

$$\alpha = \frac{125}{180}\pi = \frac{25}{36}\pi\ \text{rad}$$

$$L = \frac{25}{36}\pi\cdot 5 = \frac{25}{36}\pi\ \text{cm}$$

Área del triángulo:



Aplicando la expresión $A = \frac{1}{2}ab\,\text{sen}\,\hat{C}$, siendo $a = b = R$ y $\hat{C} = 125^\circ$

$$A_T = \frac{1}{2}5\cdot 5\,\text{sen}\,125^\circ = 10'2\ \text{cm}^2$$