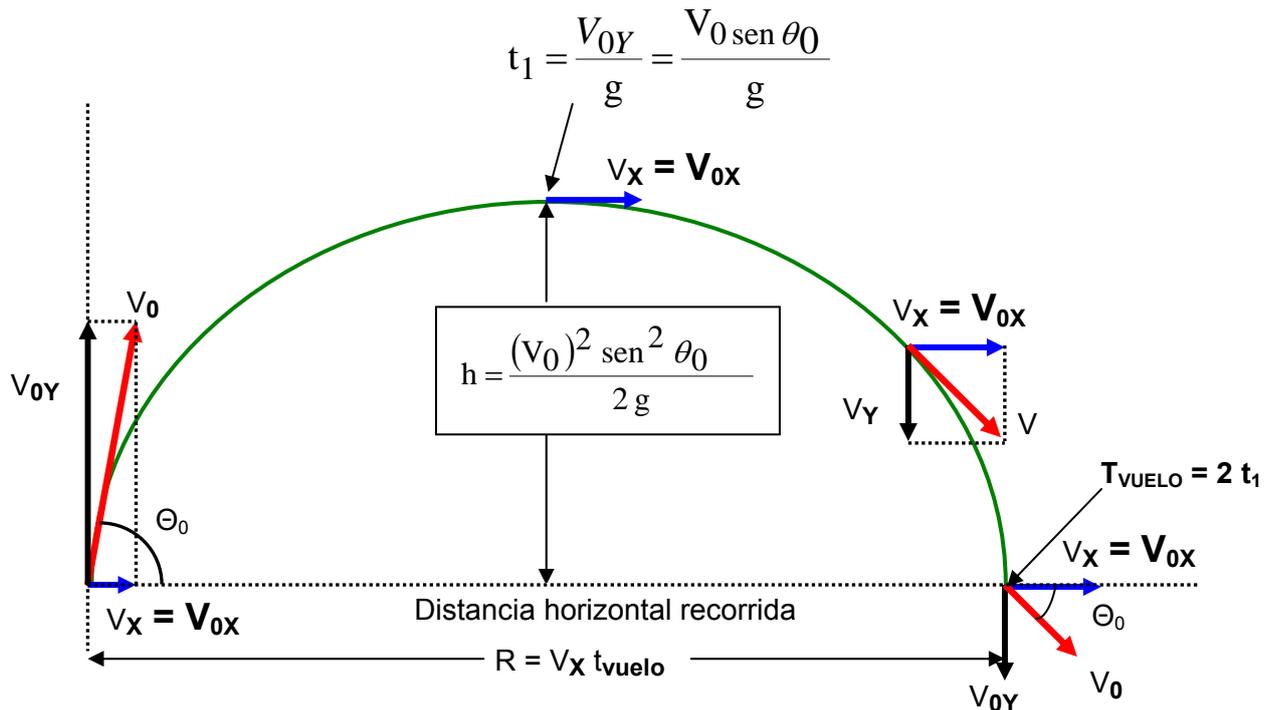


## **PROBLEMAS RESUELTOS MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES**

### **MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES**

- 4.1 Los vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración
- 4.2 Movimiento bidimensional con aceleración constante
- 4.3 Movimiento de proyectiles
- 4.4 Movimiento circular uniforme
- 4.5 Aceleración tangencial y radial
- 4.6 Velocidad y aceleración relativa
- 4.7 Movimiento relativo a altas velocidades

## ALCANCE HORIZONTAL Y ALTURA MÁXIMA DE UN PROYECTIL



Un proyectil disparado desde el origen en  $t = 0$  con una velocidad inicial  $V_0$ . La altura máxima del proyectil es  $h$  y su alcance horizontal es  $R$ . En el punto más alto de la trayectoria, la partícula tiene coordenadas  $(R/2, h)$ .

Supóngase que un proyectil se lanza desde el origen en  $t = 0$  con una componente  $V_y$  positiva, hay dos puntos especiales que es interesante analizar:

El máximo que tiene coordenadas  $(R/2, h)$  y el punto que tiene coordenadas  $(R, 0)$ . La distancia  $R$  se conoce como alcance horizontal del proyectil y  $h$  es su altura máxima.

Se encuentra  $h$  y  $R$  en función de  $V_0$ ,  $\theta$ ,  $g$ .

Se puede determinar  $h$  al observar que en la altura máxima  $V_y = 0$ . En consecuencia, puede usarse la ecuación 4.11 para determinar el tiempo  $t_1$  necesario para llegar a la altura máxima.

**Ecuación 4.11**  $V_y = V_{y0} - g t$   
 $V_y = V_0 \sin \theta_0 - g t$

Despejando el tiempo

$$V_y + g t = V_0 \sin \theta_0$$

$$g t = V_0 \sin \theta_0 - V_y \text{ pero } V_y = 0$$

$$g t = V_0 \sin \theta_0$$

$$t_1 = \frac{V_0 \sin \theta_0}{g}$$

Al sustituir esta expresión para  $t_1$  en la **ecuación 4.13** y reemplazando  $y$  con  $h$ , se obtiene  $h$  en función de  $V_0$ ,  $\Theta$ .

### Componente de posición vertical

$$Y = (V_{0Y})t_1 - \frac{1}{2}g t_1^2$$

$$\text{pero: } t_1 = \frac{V_0 \text{ sen } \theta_0}{g} \quad t_1^2 = \left(\frac{V_0 \text{ sen } \theta_0}{g}\right)^2 \quad V_{0Y} = V_0 \text{ sen } \Theta_0 \quad Y = h$$

### Reemplazando

$$Y = (V_{0Y})t_1 - \frac{1}{2}g t_1^2$$

$$h = (V_0 \text{ sen } \theta_0) \left(\frac{V_0 \text{ sen } \theta_0}{g}\right) - \frac{1}{2}g \left(\frac{V_0 \text{ sen } \theta_0}{g}\right)^2$$

$$h = (V_0 \text{ sen } \theta_0) \left(\frac{V_0 \text{ sen } \theta_0}{g}\right) - \frac{1}{2}g \frac{(V_0)^2 \text{ sen}^2 \theta_0}{g^2}$$

$$h = (V_0 \text{ sen } \theta_0) \left(\frac{V_0 \text{ sen } \theta_0}{g}\right) - \frac{(V_0)^2 \text{ sen}^2 \theta_0}{2g}$$

$$h = \left(\frac{(V_0)^2 \text{ sen}^2 \theta_0}{g}\right) - \frac{(V_0)^2 \text{ sen}^2 \theta_0}{2g}$$

$$h = \frac{2(V_0)^2 \text{ sen}^2 \theta_0 - (V_0)^2 \text{ sen}^2 \theta_0}{2g}$$

$$h = \frac{(V_0)^2 \text{ sen}^2 \theta_0}{2g}$$

El alcance  $R$ , es la distancia horizontal recorrida en el doble de tiempo necesario para alcanzar la altura máxima, es decir, en el tiempo  $2t$ .

$$Y = (V_{0Y})t_1 - \frac{1}{2}g t_1^2 \quad \text{pero: } Y = 0$$

$$0 = (V_{0Y})t_1 - \frac{1}{2}g t_1^2$$

$$(V_{0Y})t_1 = \frac{1}{2}g t_1^2 \quad \text{Cancelando } t_1$$

$$(V_{0Y}) = \frac{1}{2}g t_1 \quad \text{despejando } t_1$$

$$t_1 = \frac{2 V_{0Y}}{g} \quad \text{pero: } V_{0Y} = V_0 \text{ sen } \Theta_0$$

$$t_1 = \frac{2 V_0 \operatorname{sen} \theta_0}{g} \text{ Se le denomina tiempo de vuelo del proyectil}$$

$$t_{\text{VUELO}} = \frac{2 V_0 \operatorname{sen} \theta}{g}$$

El alcance **R**, es la distancia horizontal recorrida

$$R = V_x t_{\text{VUELO}}$$

$$\text{Pero: } V_x = V_{0x} = V_0 \cos \Theta \quad t_{\text{VUELO}} = \frac{2 V_0 \operatorname{sen} \theta}{g}$$

$$R = V_x t_{\text{VUELO}}$$

$$R = V_0 \cos \Theta t_{\text{VUELO}}$$

$$R = V_0 \cos \theta \left( \frac{2 V_0 \operatorname{sen} \theta}{g} \right)$$

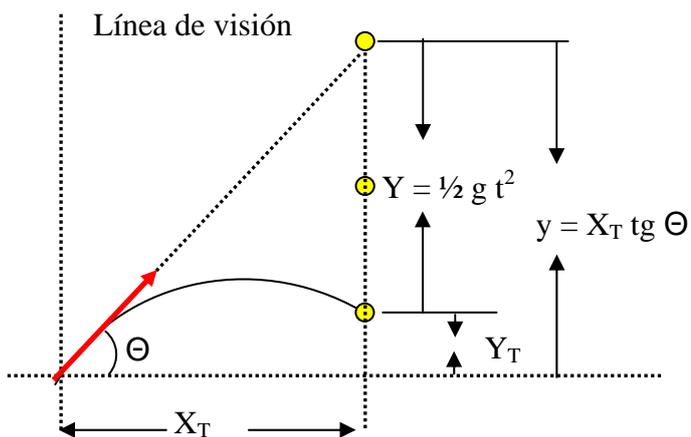
$$R = \frac{2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta (V_0)^2}{g}$$

$$\text{pero: } \mathbf{2 \operatorname{sen} \Theta \cos \Theta = \operatorname{sen} 2 \Theta}$$

$$R = \frac{\operatorname{sen} 2\theta (V_0)^2}{g}$$

#### Ejemplo 4.5 Donde pone el ojo pone la bala. Pág. 81 del libro serway cuarta edición

En una conferencia demostrativa muy popular, un proyectil se dispara contra un blanco de tal manera que el primero sale del rifle al mismo tiempo que el blanco se deja caer en reposo, como muestra la figura 4.9. Se demostrara que si el rifle esta inicialmente dirigido hacia el blanco estacionario, aun así el proyectil hará diana.



**FIGURA 4.9**

#### Razonamiento y solución

Se puede argumentar que el choque resultara bajo las condiciones establecidas observando que tanto el proyectil como el blanco experimentan la misma aceleración  $\mathbf{a}_y = -\mathbf{g}$  tan pronto como se

liberan. Primero observe en la figura 4.9 que la coordenada **y** inicial del blanco es  $X_T \operatorname{tg} \theta$  y que disminuye a lo largo de una distancia  $\frac{1}{2} g t^2$  en un tiempo **t**. En consecuencia, la coordenada **y** del blanco como una función del tiempo es, según la ecuación 4.14.

$$y = X_T \operatorname{tg} \theta$$

**Ver figura 4.9**

$$y = X_T \operatorname{tg} \theta = Y_T + Y \quad \text{Pero } Y = \frac{1}{2} g t^2$$

$$X_T \operatorname{tg} \theta = Y_T + \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{Despejamos } Y_T$$

$$X_T \operatorname{tg} \theta - \frac{1}{2} g t^2 = Y_T$$

Si después de esto se escriben las ecuaciones para **x** y **y** correspondientes a la trayectoria del proyectil a lo largo del tiempo, utilizando las ecuaciones 4.12 y 4.13 en forma simultanea, se obtiene

#### COMPONENTE DE POSICION HORIZONTAL

$$X = v_x \cdot t$$

$$X = (v_0 \cos \theta) t \quad \text{ECUACION 4.12}$$

#### COMPONENTE DE POSICION VERTICAL

$$Y = (V_{0Y})t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$Y = V_0 \operatorname{sen} \theta t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$Y_P = V_0 \operatorname{sen} \theta t - \frac{1}{2} g t^2$$

**PERO:  $X_T = (v_0 \cos \theta) t$  Despejamos **t****

$$t = \frac{X_T}{V_0 \cos \theta}$$

**Reemplazando en la ecuación anterior**

$$Y_P = V_0 \operatorname{sen} \theta t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$Y_P = V_0 \operatorname{sen} \theta \left( \frac{X_T}{V_0 \cos \theta} \right) - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{Cancelando } V_0$$

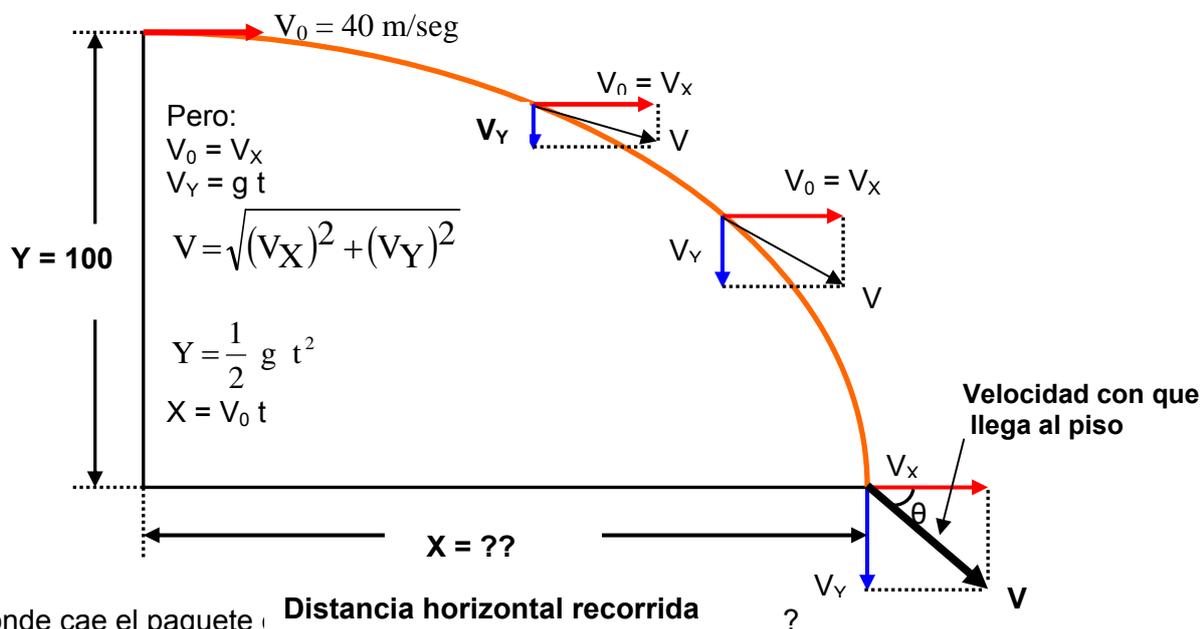
$$Y_P = \operatorname{sen} \theta \left( \frac{X_T}{\cos \theta} \right) - \frac{1}{2} g t^2$$

$$Y_P = X_T \operatorname{tg} \theta - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{Así pues, al comparar las dos ecuaciones anteriores se verá que cuando}$$

**$X_P = X_T$ ;  $Y_P = Y_T$  Se produce un choque.**

**Ejemplo 4.7 Los exploradores extraviados. Pág. 82 del libro serway cuarta edición**

Un avión de rescate en Alaska deja caer un paquete de provisiones a un grupo de exploradores extraviados, como se muestra en la fig. 4.11. Si el avión viaja horizontalmente a 40 m/seg. Y a una altura de 100 metros sobre el suelo. Donde cae el paquete en relación con el punto en que se soltó?



Donde cae el paquete **Distancia horizontal recorrida**  
 Se halla el  $t_{\text{VUELO}}$

$$Y = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 2Y = g * t^2$$

$$\frac{2Y}{g} = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2Y}{g}}$$

$$t_{\text{vuelo}} = \sqrt{\frac{2Y}{g}} = \sqrt{\frac{2 * 100}{9,8}} = \sqrt{\frac{200}{9,8}} = \sqrt{20,4} = 4,51 \text{ seg.}$$

$$X = V_0 * t_{\text{vuelo}} = 40 \text{ m/seg} * 4,51 \text{ seg} = 180,4 \text{ metros}$$

**X = 180,4 metros**

$$V_y = g * t_{\text{VUELO}}$$

$$V_y = 9,8 * 4,51$$

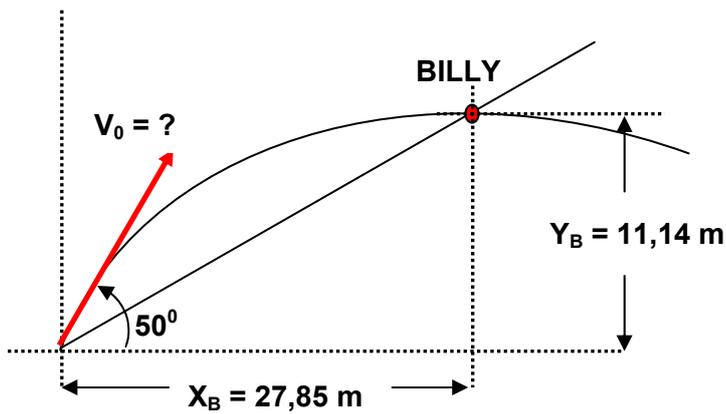
**$V_y = 44,19$  m/seg.**

**$V_x = V_0 = 40$  m/seg.**

**Seccion 4.3 Movimiento de proyectiles**

**Problema 4.10 Edición cuarta SERWAY**

Jimmy esta en la parte inferior de la colina, mientras que Billy se encuentra 30 metros arriba de la misma. Jimmy de un sistema de coordenadas esta en el origen de un sistema de coordenadas x,y y la línea que sigue la pendiente de la colina esta dada por la ecuación  $Y = 0,4 X$ . Si Jimmy lanza una manzana a Billy con un ángulo de  $50^\circ$  respecto de la horizontal. Con que velocidad debe lanzar la manzana para que pueda llegar a Billy?



**Datos del problema:**

Distancia entre Jimmy y Billy = 30 metros.

$\Theta = 50^\circ$

Pendiente de la colina  $Y = 0,4 X$ .

$$Y_B = 0,4 X_B$$

$$(Y_B)^2 = 0,16 (X_B)^2$$

Pero:

$$(30)^2 = (X_B)^2 + (Y_B)^2$$

$$900 = (X_B)^2 + 0,16 (X_B)^2$$

$$900 = 1,16 (X_B)^2$$

$$X_B = \sqrt{\left(\frac{900}{1,16}\right)} = 27,85 \text{ metros}$$

**$X_B = 27,85$  metros**

pero:

$$Y_B = 0,4 X_B$$

$$Y_B = 0,4 (27,85)$$

$$Y_B = 11,14 \text{ metros}$$

Alcance horizontal

$$X = v_X * t$$

$$X = (v_0 \cos \Theta) t \text{ (Ecuación 1)}$$

$$t = \frac{X}{v_0 \cos \theta}$$

Pero:

$$Y = v_{OY} * t - \frac{g * t^2}{2}$$

$$Y = v_0 \text{ sen} \theta * t - \frac{g * t^2}{2} \text{ (Ecuación 2)}$$

Reemplazando la ecuación 1 en la ecuación 2.

$$Y = V_0 \operatorname{sen} \theta * t - \frac{g * t^2}{2}$$

$$Y = V_0 \operatorname{sen} \theta * \left( \frac{X}{V_0 \cos \theta} \right) - \frac{g * \left( \frac{X}{V_0 \cos \theta} \right)^2}{2}$$

$$Y = \frac{V_0 \operatorname{sen} \theta}{V_0 \cos \theta} * (X) - \frac{g * (X)^2}{2 V_0^2 (\cos \theta)^2}$$

$$Y = \operatorname{tag} \theta * (X) - \frac{g * (X)^2}{2 V_0^2 (\cos \theta)^2}$$

Reemplazando

X = 27,85 metros

Y = 11,14 metros

$\Theta = 50^\circ$

$$11,14 = \operatorname{tag} 50 * (27,85) - \frac{9,8 * (27,85)^2}{2 V_0^2 (\cos 50)^2}$$

$$11,14 = 33,19 - \frac{7756,22}{V_0^2 (0,8263)}$$

$$11 = 33,19 - \frac{9386,68}{V_0^2}$$

$$\frac{9386,68}{V_0^2} = 33,19 - 11$$

$$\frac{9386,68}{V_0^2} = 22,19 \quad V_0^2 = \frac{9386,68}{22,19}$$

$$V_0 = \sqrt{\left( \frac{9386,68}{22,19} \right)} = 20,56 \text{ m/seg}$$

**$V_0 = 20,56 \text{ m/seg.}$**

#### Problema 4.11 Edición cuarta SERWAY

En un bar local, un cliente hace deslizar un tarro vacío de cerveza sobre la barra para que vuelvan a llenarlo. El cantinero esta momentáneamente distraído y no ve el tarro, el cual cae de la barra y golpea el piso a 1,4 metros de la base de la misma.

Si la altura de la barra es 0,86 metros.

a) Con que velocidad abandono el tarro la barra?

b) Cual fue la dirección de la velocidad del tarro justo antes de chocar con el piso?

Se halla el  $t_{\text{VUELO}}$

$$Y = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 2Y = g * t^2$$

$$\frac{2Y}{g} = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2Y}{g}}$$

$$t_{\text{vuelo}} = \sqrt{\frac{2 Y}{g}} = \sqrt{\frac{2 * 0,86}{9,8}} = \sqrt{0,1755} = 0,4189 \text{ seg.}$$

**a) Con que velocidad abandono el tarro la barra?**

Datos:  $X = 1,4$  metros  $t_{\text{VUELO}} = 0,4189$  seg.

$$X = V_0 * t_{\text{vuelo}}$$

$$V_0 = \frac{X}{t_{\text{vuelo}}} = \frac{1,4}{0,4189} = 3,34 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

**$V_0 = 3,34$  m/seg.**

**b) Cual fue la dirección de la velocidad del tarro justo antes de chocar con el piso?**

Datos:  $V_0 = V_X = 3,34$  m/seg.  $g = 9,8$  m/seg<sup>2</sup>  $t_{\text{VUELO}} = 0,4189$  seg.

$$V_Y = g t_{\text{VUELO}} = 9,8 \text{ m/seg}^2 * 0,4189 \text{ seg.}$$

$$V_Y = 4,105 \text{ m/seg.}$$

$$V^2 = (V_X)^2 + (V_Y)^2$$

$$V = \sqrt{(V_X)^2 + (V_Y)^2} = \sqrt{(3,34)^2 + (4,105)^2} = \sqrt{11,155 + 16,851} = 5,29 \text{ m/seg}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{V_Y}{V_X} = \frac{- 4,105}{3,34} = - 1,229$$

$$\theta = \text{arc tg } (- 1,229)$$

$$\theta = - 50,86^\circ$$

#### **Problema 4.13 Edición cuarta SERWAY**

Una pelota se lanza horizontalmente desde la azotea de un edificio de 35 metros de altura. La pelota golpea el suelo en un punto a 80 metros de la base del edificio. Encuentre:

- El tiempo que la pelota permanece en vuelo?
- Su velocidad inicial?
- Las componentes X y Y de la velocidad justo antes de que la pelota pegue en el suelo?

**a) El tiempo que la pelota permanece en vuelo?**

Se halla el  $t_{\text{VUELO}}$  Datos:  $Y = 35$  metros  $g = 9,8$  m/seg<sup>2</sup>

$$Y = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 2Y = g * t^2$$

$$\frac{2Y}{g} = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2Y}{g}}$$

$$t_{\text{vuelo}} = \sqrt{\frac{2 Y}{g}} = \sqrt{\frac{2 * 35}{9,8}} = \sqrt{\frac{70}{9,8}} = \sqrt{7,142} = 2,6726 \text{ seg.}$$

**$t_{\text{VUELO}} = 2,6726$  seg.**

**b) Su velocidad inicial?  $V_0 = V_x$**

Datos:  $X = 80$  metros  $t_{\text{VUELO}} = 2,6726$  seg.

$$X = V_0 * t_{\text{vuelo}}$$

$$V_0 = \frac{X}{t_{\text{vuelo}}} = \frac{80}{2,6726} = 29,93 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

**$V_0 = 29,93$  m/seg.**

**c) Las componentes X y Y de la velocidad justo antes de que la pelota pegue en el suelo?**

**$V_0 = V_x = 29,93$  m/seg.  $t_{\text{VUELO}} = 2,6726$  seg.**

$$V_y = g t_{\text{VUELO}} = 9,8 \text{ m/seg}^2 * 2,6726 \text{ seg.}$$

**$V_y = - 26,19$  m/seg. (El signo negativo por que va la pelota va cayendo.)**

$$V^2 = (V_x)^2 + (V_y)^2$$

$$V = \sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2} = \sqrt{(29,93)^2 + (-26,19)^2} = \sqrt{895,8049 + 685,9161} = \sqrt{1581,721}$$

**$V = 39,77$  m/seg.**

$$\text{tg } \theta = \frac{V_y}{V_x} = \frac{-26,19}{29,93} = -0,875$$

$$\theta = \text{arc tg } (-0,875)$$

$$\theta = -41,18^\circ$$

#### **Problema 4.14 Edición cuarta SERWAY**

Superman vuela al nivel de los árboles cuando ve que el elevador de la torre Eiffel empieza a desplomarse (el cable se rompe), su visión de rayos X le indica que Luisa Lane esta en el interior. Si Superman se encuentra a 1 km de distancia de la torre y el elevador cae desde una altura de 240 metros. Cuanto tarda Superman en salvar a Luisa y cual debe ser su velocidad promedio?

Se halla el  $t_{\text{VUELO}}$  Datos:  $Y = 240$  metros  $g = 9,8$  m/seg<sup>2</sup>

$$Y = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 2Y = g * t^2$$

$$\frac{2Y}{g} = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2Y}{g}}$$

$$t_{\text{vuelo}} = \sqrt{\frac{2Y}{g}} = \sqrt{\frac{2 * 240}{9,8}} = \sqrt{\frac{480}{9,8}} = \sqrt{48,979} = 7 \text{ seg.}$$

**$t_{\text{VUELO}} = 7$  seg.**

Datos:  $X = 1$  km = 1000 metros  $t_{\text{VUELO}} = 7$  seg.

$$X = V_0 * t_{\text{vuelo}}$$

$$V_0 = \frac{X}{t_{\text{vuelo}}} = \frac{1000}{7} = 142,85 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

$$V_0 = V_x = 142,85 \text{ m/seg.}$$

#### Problema 4.14a Edición cuarta SERWAY

Superman vuela al nivel de los árboles cuando ve que el elevador de la torre Eiffel empieza a desplomarse (el cable se rompe), su visión de rayos X le indica que Luisa Lane esta en el interior. Si Superman se encuentra a una distancia **d** de la torre y el elevador cae desde una altura **h**. Cuanto tarda Superman en salvar a Luisa y cual debe ser su velocidad promedio?

Se halla el  $t_{\text{VUELO}}$  Datos: altura vertical = **h**  $g = 9,8 \text{ m/seg}^2$  distancia horizontal = **d**

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 2h = g * t^2$$

$$\frac{2h}{g} = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$t_{\text{vuelo}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$d = V_0 * t_{\text{vuelo}}$$

$$V_0 = \frac{d}{t_{\text{vuelo}}} = \frac{d}{\sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

$$V_0 = \frac{d}{\sqrt{\frac{2h}{g}}} = \frac{\sqrt{d^2}}{\sqrt{\frac{2h}{g}}} = \sqrt{\frac{d^2}{\frac{2h}{g}}} = \sqrt{\frac{g d^2}{2h}} = d * \sqrt{\frac{g}{2h}}$$

$$V_0 = d \sqrt{\frac{g}{2h}}$$

#### Problema 4.15 Edición cuarta SERWAY

Un jugador de soccer patea una roca horizontalmente desde el borde de una plataforma de 40 metros de altura en dirección a una fosa de agua. Si el jugador escucha el sonido de contacto con el agua 3 seg. Después de patear la roca. Cual fue la velocidad inicial? . Suponga que la velocidad del sonido en el aire es 343 m/seg.

Se halla el  $t_{\text{VUELO}}$  Datos: Y = 40 metros  $g = 9,8 \text{ m/seg}^2$

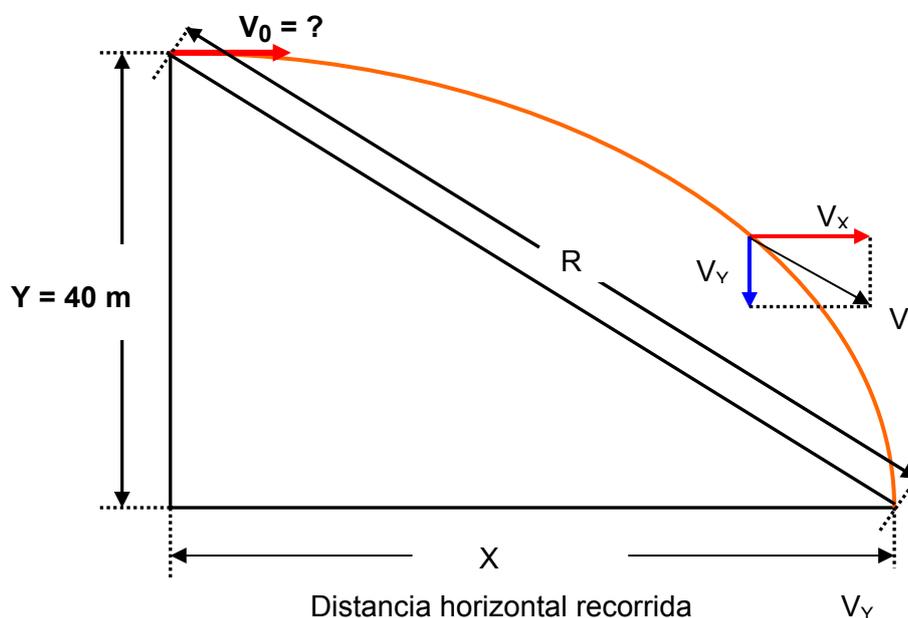
$$Y = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 2Y = g * t^2$$

$$\frac{2Y}{g} = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2Y}{g}}$$

$$t_{\text{vuelo}} = \sqrt{\frac{2Y}{g}} = \sqrt{\frac{2 * 40}{9,8}} = \sqrt{\frac{80}{9,8}} = \sqrt{8,1632} = 2,86 \text{ seg.}$$

$$t_{\text{VUELO}} = 2,86 \text{ seg.}$$

$$3 \text{ seg} - t_{\text{VUELO}} = 3 - 2,86 = 0,14 \text{ seg.}$$



Se halla la distancia recorrida por la pelota

Datos:  $t = 0,14 \text{ seg.}$   $V_x = \text{veloc. del sonido en el agua} = 343 \text{ m/seg.}$

$$R = V_0 * t = 343 * 0,14 = 48,02 \text{ m}$$

$$R^2 = (Y)^2 + (X)^2$$

$$(X)^2 = R^2 - (Y)^2$$

$$X = \sqrt{(R)^2 - (Y)^2} = \sqrt{(48,02)^2 - (40)^2} = \sqrt{2305,92 - 1600} = \sqrt{705,92}$$

$$X = 26,56 \text{ m/seg.}$$

Su velocidad inicial?  $V_0 = V_x$

Datos:  $X = 26,56 \text{ metros}$   $t_{\text{VUELO}} = 2,86 \text{ seg.}$

$$X = V_0 * t_{\text{vuelo}}$$

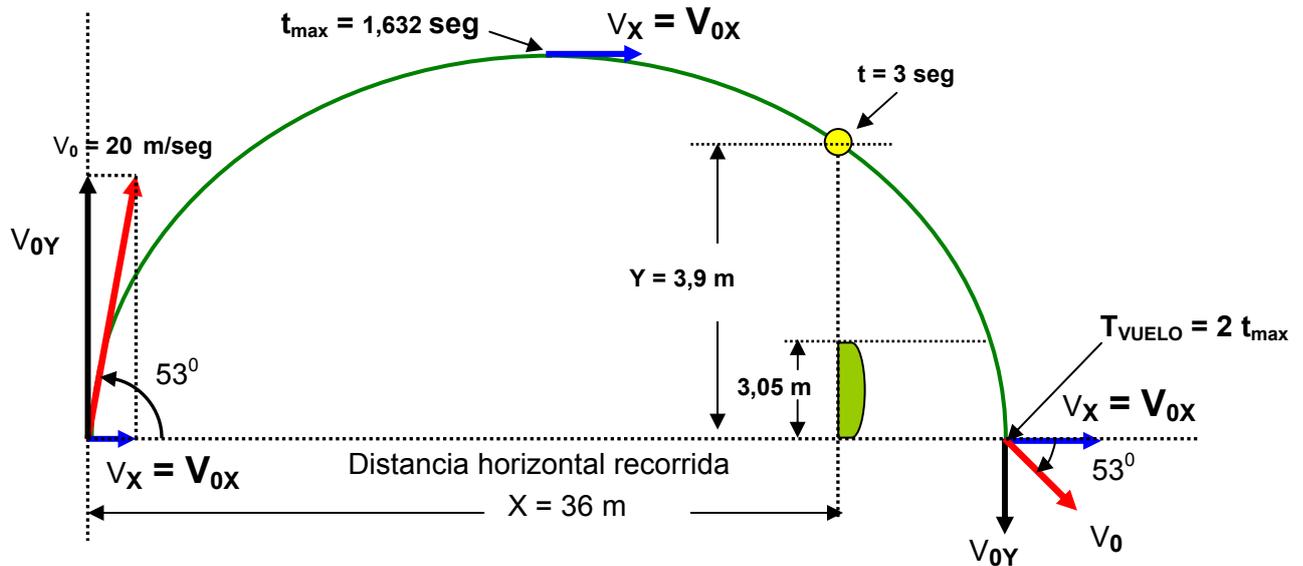
$$V_0 = \frac{X}{t_{\text{vuelo}}} = \frac{26,56}{2,86} = 9,28 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

$$V_0 = V_x = 9,28 \text{ m/seg.}$$

#### Problema 4.17 Edición cuarta SERWAY

Un pateador de lugar debe patear un balón de fútbol desde un punto a 36 metros (casi 40 yardas) de la zona de gol y la bola debe librar los postes, que están a 3,05 metros de alto. Cuando se patear, el balón abandona el suelo con una velocidad de 20 m/seg y un ángulo de  $53^\circ$  respecto de la horizontal.

- a) Por cuanto distancia el balón libra o no los postes.  
 b) El balón se aproxima a los postes mientras continua ascendiendo o cuando va descendiendo.



Datos  $X = 36$  metros  $\Theta = 53^\circ$   $V_0 = 20$  m/seg.

$$V_{0Y} = V_0 \text{ sen } \Theta$$

$$V_{0Y} = 20 \text{ sen } 53$$

$$V_{0Y} = 16 \text{ m/seg.}$$

Se halla el tiempo máximo, es decir el tiempo en que alcanza el punto mas alto de la trayectoria. Con esto se puede ubicar los postes.

$$t_{\text{max}} = \frac{V_{0Y}}{g} = \frac{16}{9,8} = 1,632 \text{ seg.}$$

Se halla el tiempo de vuelo del balón.

$$t_{\text{vuelo}} = 2 t_{\text{max}}$$

$$t_{\text{vuelo}} = 2 * 1,632$$

$$t_{\text{vuelo}} = 3,26 \text{ seg.}$$

En la figura se puede observar la posición del poste. A los 3 seg. el balón va bajando.

Pero:

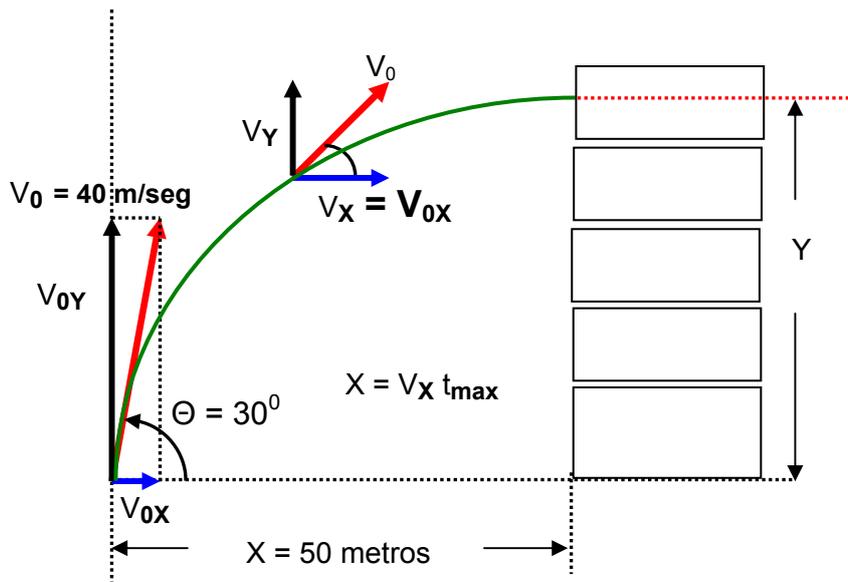
$$Y = V_{0Y} * t - \frac{g * t^2}{2} = 16 * 3 - \frac{9,8 * 3^2}{2}$$

$$Y = 48 - 44,1$$

$Y = 3,9$  metros . la diferencia es  $3,9 - 3,05 = 0,85$  METROS

#### Problema 4.18 Edición cuarta SERWAY

Un bombero a 50 metros de un edificio en llamas dirige un chorro de agua de una manguera a un ángulo de  $30^\circ$  sobre la horizontal, como se muestra en la figura p4.18. Si la velocidad inicial de la corriente es 40 m/seg. A que altura el agua incide en el edificio?



Datos  $X = 50$  metros  $\Theta = 30^\circ$   $V_0 = 40$  m/seg.

**PERO:  $X = (v_0 \cos \Theta) t$  Despejamos  $t$**

$$t = \frac{X}{V_0 \cos \theta}$$

$$t = \frac{X}{V_0 \cos \theta} = \frac{50}{40 \cos 30} = \frac{50}{34,64}$$

**$t = 1,443$  seg.**

$$Y = V_{0Y} * t - \frac{g * t^2}{2}$$

$$Y = V_0 \operatorname{sen} \theta * t - \frac{g * t^2}{2}$$

$$Y = 40 \operatorname{sen} 30 * 1,443 - \frac{9,8 * (1,443)^2}{2}$$

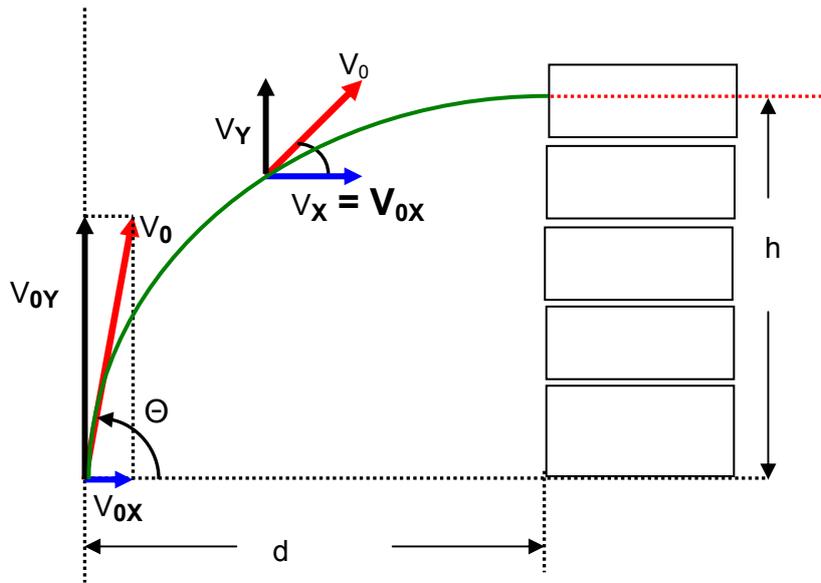
$$Y = 28,86 - \frac{20,4}{2}$$

$$Y = 28,86 - 10,2$$

**$Y = 18,66$  metros**

#### Problema 4.18 a Edición cuarta SERWAY

Un bombero a una distancia  $d$  metros de un edificio en llamas dirige un chorro de agua de una manguera a un ángulo de  $\Theta$  sobre la horizontal, como se muestra en la figura p4.18. Si la velocidad inicial de la corriente es  $V_0$ . A que altura el agua incide en el edificio?



**PERO:  $d = (v_0 \cos \theta) t$  Despejamos  $t$**

$$t = \frac{d}{V_0 \cos \theta}$$

$$h = V_{0Y} * t - \frac{g * t^2}{2}$$

$$h = V_0 \sin \theta * t - \frac{g * t^2}{2} \text{ reemplazando } t \text{ en la ecuación}$$

$$h = (V_0 \sin \theta) \left( \frac{d}{V_0 \cos \theta} \right) - \frac{1}{2} g \left( \frac{d}{V_0 \cos \theta} \right)^2$$

$$h = (\sin \theta) \left( \frac{d}{\cos \theta} \right) - \frac{1}{2} g \left( \frac{d}{V_0 \cos \theta} \right)^2$$

$$h = \operatorname{tg} \theta d - \frac{1}{2} g \left( \frac{d}{V_0 \cos \theta} \right)^2$$

$$h = \operatorname{tg} \theta d - \frac{g d^2}{2(V_0)^2 \cos^2 \theta}$$

$$h = \frac{2(V_0)^2 \cos^2 \theta \operatorname{tg} \theta d - g d^2}{2(V_0)^2 \cos^2 \theta}$$

$$h = \frac{2(V_0)^2 \cos^2 \theta \frac{\sin \theta}{\cos \theta} d - g d^2}{2(V_0)^2 \cos^2 \theta}$$

$$h = \frac{(V_0)^2 2 \cos \theta \sin \theta d - g d^2}{2(V_0)^2 \cos^2 \theta}$$

pero:  **$2 \operatorname{sen} \Theta \cos \Theta = \operatorname{sen} 2 \Theta$**

$$h = \frac{(V_0)^2 \operatorname{sen} 2\theta d - g d^2}{2(V_0)^2 \cos^2 \theta}$$

#### **Problema 4.19 Edición cuarta SERWAY**

Un astronauta sobre la luna dispara una pistola de manera que la bala abandona el cañon moviéndose inicialmente en una posición horizontal

- Cual debe ser la velocidad de orificio si la bala va a recorrer por completo el derredor de la luna y alcanzara al astronauta en un punto 10 cm debajo de su altura inicial
- Cuanto permanece la bala en vuelo? Suponga que la aceleración en caída libre sobre la luna es un sexto de la de la tierra.

Gravedad de la luna =  $1/6 * 9,8 = 1,6333 \text{ m/seg}^2$  (**Aceleración de la luna**)

La realidad es que la bala describe un movimiento circular alrededor de la luna, para esto necesitamos el radio de la luna =  $1,74 * 10^6$  metros, los 10 cm no inciden sobre el calculo del radio de la luna. hallamos la velocidad

$$a_L = \frac{V^2}{r_L}$$

$$V^2 = a_L * r_L$$

$$V = \sqrt{a_L r_L} = \sqrt{1,6333 * 1,74 * 10^6} = \sqrt{2841999,999} = 1685,82 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

**b) Cuanto permanece la bala en vuelo?**

$$V = 2 \pi r_L f = 2 \pi r_L \frac{1}{T}$$

Se despeja el periodo T

$$T = \frac{2 \pi r_L}{V} = \frac{2 * \pi * 1,74 * 10^6 \text{ m}}{1685,82 \frac{\text{m}}{\text{seg}}} = 6485,11 \text{ seg}$$

$$T = 6485,11 \text{ seg} * \frac{1 \text{ hora}}{3600 \text{ seg}} = 1,8 \text{ horas}$$

**T = 1,8 horas**

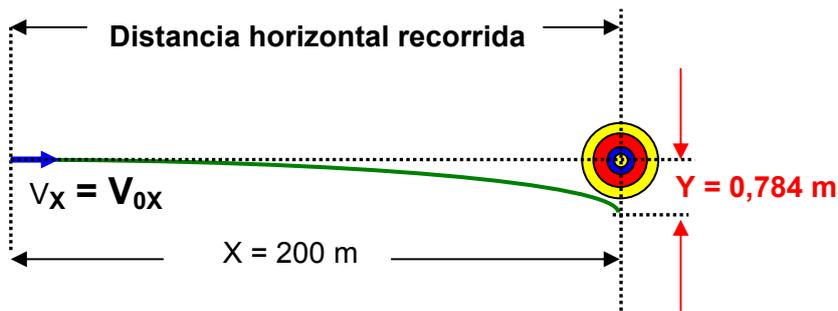
#### **Problema 4.20 Edición cuarta SERWAY**

Un rifle se dirige horizontalmente al centro de un gran blanco a 200 metros de distancia. La velocidad inicial de la bala es 500 m/seg.

- Donde incide la bala en el blanco?
- Para golpear en el centro del blanco, el cañon debe estar a un ángulo sobre la línea de visión. Determine el ángulo de elevación del cañon.

**a) Donde incide la bala en el blanco?**

Es evidente que al disparar horizontalmente, la bala describe un movimiento de tiro parabólico, ver la figura.



Datos:

Como el disparo es horizontal  $V_x = 500$  m/seg  $X = 200$  metros

**Hallamos el tiempo de vuelo**

$$X = V_x * t_{\text{vuelo}}$$

$$t_{\text{vuelo}} = \frac{X}{V_x} = \frac{200}{500} = 0,4 \text{ seg}$$

Ahora se halla el desplazamiento vertical de la bala con respecto al centro.

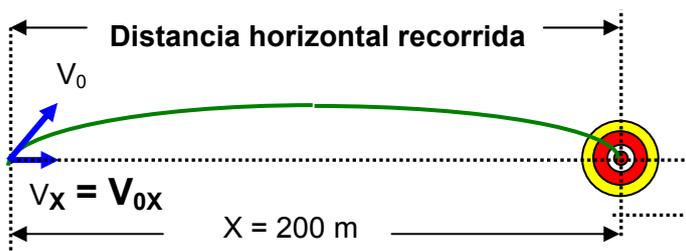
$$Y = V_{0Y} * t - \frac{g * t^2}{2} \text{ pero como el disparo es horizontal } V_{0Y} = 0$$

$$Y = \frac{g * t^2}{2} \text{ como el movimiento es hacia abajo se considera el valor de Y (+)}$$

$$Y = \frac{g * t^2}{2} = \frac{9,8 * 0,4^2}{2} = 0,784 \text{ m}$$

**b) Para golpear en el centro del blanco, el cañón debe estar a un ángulo sobre la línea de visión. Determine el ángulo de elevación del cañón.**

Observemos que el mismo disparo, pero ahora la velocidad inicial tiene un ángulo respecto de la horizontal, esto es para garantizar que el disparo llegue al blanco. Es decir  $V_0 = 500$  m/seg.



$$X = \frac{\text{sen } 2\theta (V_0)^2}{g}$$

$$X g = \text{sen } 2\theta (V_0)^2$$

$$\text{sen } 2\theta = \frac{X g}{(V_0)^2} = \frac{200 * 9,8}{500^2} = \frac{1960}{250000} = 0,00784$$

$$\text{sen } 2\theta = 0,00784$$

$$\text{arc sen } 2\theta = \text{arc sen } 0,00784$$

$$2\theta = 0,4492$$

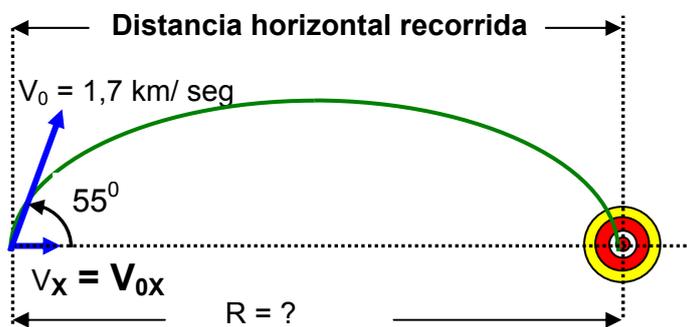
$$\theta = \frac{0,4492}{2} = 0,224^\circ$$

$\theta = 0,224^\circ$  respecto a la horizontal.

#### Problema 4.21 Edición cuarta SERWAY

Durante la primera guerra mundial los alemanes tenían un cañón llamado Big Bertha que se usó para bombardear París. Los proyectiles tenían una velocidad inicial de 1,7 km/seg. a una inclinación de  $55^\circ$  con la horizontal. Para dar en el blanco, se hacían ajustes en relación con la resistencia del aire y otros efectos. Si ignoramos esos efectos:

- ¿Cuál era el alcance de los proyectiles?
- ¿Cuánto permanecían en el aire?



#### a) ¿Cuál era el alcance de los proyectiles?

Datos:  $V_0 = 1,7 \text{ km/seg}$      $\theta = 55^\circ$

$$V_0 = 1,7 \frac{\text{km}}{\text{seg}} * \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} = 1700 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

$$R = \frac{\text{sen } 2\theta (V_0)^2}{g}$$

$$R = \frac{\text{sen } 2(55) (1700)^2}{9,8} = \frac{\text{sen } 110 * 2890000}{9,8} = \frac{2715711,674}{9,8} = 277113,43 \text{ m}$$

**R = 277,113 km**

$$R = V_{0x} t_{\text{vuelo}} \quad \text{pero: } V_{0x} = V_0 \cos \theta$$

$$R = V_0 \cos \theta t_{\text{vuelo}}$$

despejamos el tiempo de vuelo

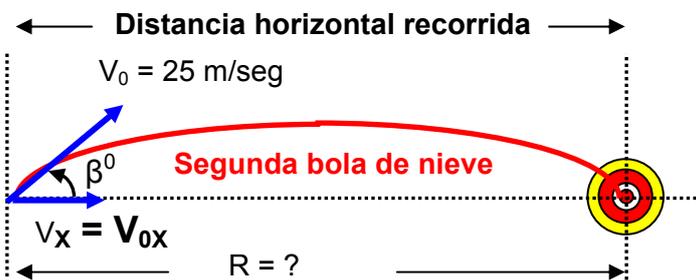
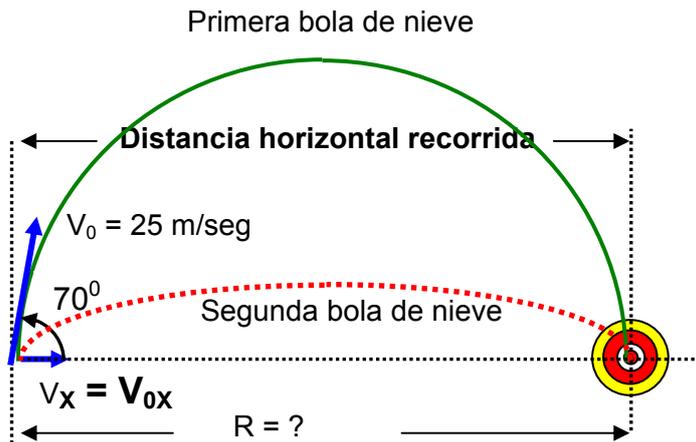
$$t_{\text{vuelo}} = \frac{R}{V_0 \cos \theta} = \frac{277113,43}{1700 * \cos 55} = \frac{277113,43}{975,079} = 284,19 \text{ seg}$$

**$t_{\text{vuelo}} = 284,19 \text{ seg}$**

**Problema 4.22 Edición cuarta SERWAY**

Una estrategia en las guerras con bolas de nieve es lanzarlas a un gran ángulo sobre el nivel del suelo. Mientras su oponente esta viendo esta primera bola de nieve, usted lanza una segunda bola a un ángulo menor lanzada en el momento necesario para que llegue a su oponente ya sea antes o al mismo tiempo que la primera. Suponga que ambas bolas de nieve se lanzan con una velocidad de 25 m/seg. La primera se lanza a un ángulo de  $70^\circ$  respecto de la horizontal.

- a) A que ángulo debe lanzarse la segunda bola de nieve para llegar al mismo punto que la primera?
- b) Cuantos segundos después debe lanzarse la segunda bola después de la primera para que llegue al blanco al mismo tiempo?



**PRIMERA BOLA DE NIEVE**

Se halla el tiempo de vuelo.

Datos  $\theta = 70^\circ$   $V_0 = 25$  m/seg.

$$Y = V_{0Y} * t - \frac{g * t^2}{2} \quad \text{pero: } \mathbf{V_{0Y} = V_0 \text{ sen } \theta}$$

$$Y = V_0 \text{ sen } \theta * t - \frac{g * t^2}{2} \quad \text{pero } Y = 0$$

$$0 = V_0 \text{ sen } \theta * t - \frac{g * t^2}{2}$$

$$V_0 \text{ sen } \theta * t = \frac{g * t^2}{2} \quad \text{Cancelando } \mathbf{t} \text{ a ambos lados de la igualdad.}$$

$$V_0 \text{ sen } \theta = \frac{g * t}{2}$$

$$2 V_0 \text{ sen } \theta = g t$$

$$t_{\text{vuelo}} = \frac{2 V_0 \text{ sen } \theta}{g}$$

$$t_{\text{vuelo}} = \frac{2 * 25 \text{ sen } 70}{g} = \frac{50 \text{ sen } 70}{9,8} = \frac{46,984}{9,8} = 4,794 \text{ seg}$$

**$t_{\text{vuelo}} = 4,794 \text{ seg}$  (de la primera bola de nieve.)**

Con el tiempo de vuelo de la primera bola de nieve, se halla el alcance horizontal.

$$R = V_{0X} t_{\text{vuelo}} \quad \text{pero: } V_{0X} = V_0 \cos \theta$$

$$R = V_0 \cos \theta t_{\text{vuelo}}$$

$$R = 25 * \cos 70 * 4,794$$

**$R = 41 \text{ metros}$**

**Ahora hallamos el tiempo de vuelo de la segunda bola de nieve en función del ángulo de disparo.**

Datos:  $\beta$  = ángulo de disparo de la segunda bola de nieve  $V_0 = 25 \text{ m/seg.}$   **$R = 41 \text{ metros}$**

$$t_{\text{vuelo}2} = \frac{2 V_0 \text{ sen } \beta}{g}$$

$$t_{\text{vuelo}2} = \frac{2 V_0 \text{ sen } \beta}{g} = \frac{2 * 25 * \text{sen } \beta}{9,8} = \frac{50 \text{ sen } \beta}{9,8} = 5,1 \text{ sen } \beta$$

**$t_{\text{vuelo}2} = 5,1 \text{ sen } \beta$  (de la segunda bola de nieve.)**

Con este dato procedemos a hallar el ángulo  $\beta$  de disparo de la segunda bola de nieve.

$$R = V_{0X} t_{\text{vuelo}2} \quad \text{pero: } V_{0X} = V_0 \cos \beta$$

$$R = V_0 \cos \beta t_{\text{vuelo}2} \quad \text{pero: } t_{\text{vuelo}2} = 5,1 \text{ sen } \beta$$

$$R = V_0 \cos \beta * 5,1 \text{ sen } \beta$$

$$R = 25 * \cos \beta * 5,1 \text{ sen } \beta$$

$$R = 127,5 * \cos \beta * \text{sen } \beta \quad \text{pero: } R = 41$$

$$41 = 63,72 * (2 \cos \beta * \text{sen } \beta) \quad \text{pero: } 2 \text{ sen } \beta \cos \beta = \text{sen } 2 \beta$$

$$41 = 63,72 * (\text{sen } 2 \beta)$$

$$\text{sen } 2 \beta = \frac{41}{63,72} = 0,6431$$

$$\text{sen } 2 \beta = 0,6431$$

$$\text{arc sen } 2 \beta = \text{arc sen } 0,6431$$

$$2 \beta = 40^\circ$$

$$\beta = \frac{40}{2} = 20^\circ$$

$$\beta = 20^\circ$$

Con el calor del ángulo de disparo de la segunda bola de nieve, se halla el tiempo de vuelo

$$t_{\text{vuelo } 2} = 5,1 \text{ sen } \beta \quad (\text{de la segunda bola de nieve.})$$

$$t_{\text{vuelo } 2} = 5,1 \text{ sen } 20$$

$$t_{\text{vuelo } 2} = 5,1 * 0,342$$

$$t_{\text{vuelo } 2} = 1,744 \text{ seg} \quad (\text{de la segunda bola de nieve.})$$

b) Cuantos segundos después debe lanzarse la segunda bola después de la primera para que llegue al blanco al mismo tiempo?

$$t_{\text{vuelo}} = 4,794 \text{ seg} \quad (\text{de la primera bola de nieve.})$$

$$t_{\text{vuelo } 2} = 1,744 \text{ seg} \quad (\text{de la segunda bola de nieve.})$$

$$\Delta t = t_{\text{vuelo}} - t_{\text{vuelo } 2}$$

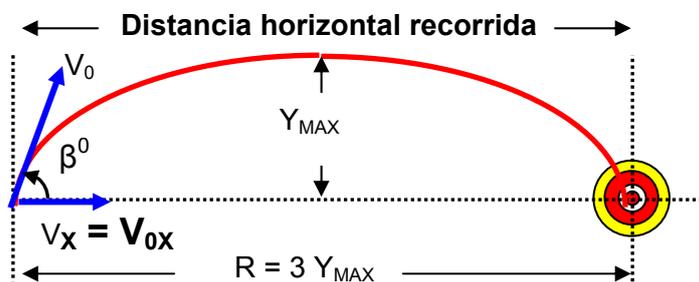
$$\Delta t = 4,794 \text{ seg} - 1,744 \text{ seg}$$

$$\Delta t = 3,05 \text{ seg.}$$

#### Problema 4.23 Edición cuarta SERWAY

Un proyectil se dispara de tal manera que su alcance horizontal es igual a tres veces su máxima altura.

Cual es el ángulo de disparo?



$$Y_{\text{max}} = \frac{(V_{0Y})^2}{2g} \quad \text{Pero: } V_{0Y} = V_0 \text{ sen } \beta$$

$$Y_{\text{max}} = \frac{(V_0 \text{ sen } \beta)^2}{2g} = \frac{(V_0)^2 \text{ sen}^2 \beta}{2g}$$

$$Y_{\text{max}} = \frac{(V_0)^2 \text{ sen}^2 \beta}{2g} \quad \text{ECUACION 1}$$

$$R = \frac{\text{sen } 2\beta (V_0)^2}{g} \quad \text{Pero: } 2 \text{ sen } \beta \text{ cos } \beta = \text{sen } 2\beta$$

$$R = \frac{2 \text{ sen } \beta \text{ cos } \beta * (V_0)^2}{g} \quad \text{Pero: } R = 3 Y_{\text{MAX}}$$

$$3 Y_{\text{MAX}} = \frac{2 \operatorname{sen} \beta \cos \beta * (V_0)^2}{g}$$

$$Y_{\text{MAX}} = \frac{2 \operatorname{sen} \beta \cos \beta * (V_0)^2}{3g} \quad \text{ECUACION 2}$$

Igualando las ecuaciones 1 y 2.

$$Y_{\text{max}} = \frac{(V_0)^2 \operatorname{sen}^2 \beta}{2g} \quad \text{ECUACION 1}$$

$$Y_{\text{MAX}} = \frac{2 \operatorname{sen} \beta \cos \beta * (V_0)^2}{3g} \quad \text{ECUACION 2}$$

$$\frac{(V_0)^2 \operatorname{sen}^2 \beta}{2g} = \frac{2 \operatorname{sen} \beta \cos \beta * (V_0)^2}{3g} \quad \text{Cancelando a ambos lados de la ecuación}$$

$$\frac{\operatorname{sen} \beta}{2} = \frac{2 \cos \beta}{3}$$

$$\frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} = \frac{2 * 2}{3}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{3}$$

$$\operatorname{tg} \beta = 1,3333$$

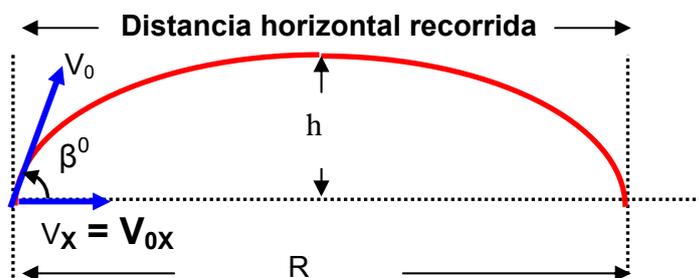
$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1,3333$$

$$\beta = 53,13^\circ$$

#### Problema 4.24 Edición cuarta SERWAY

Una pulga puede brincar una altura vertical  $h$ .

- Cual es la máxima distancia horizontal que puede saltar.
- Cual es el tiempo en el aire en ambos casos?



- Cual es la máxima distancia horizontal que puede saltar.  
El máxima alcance horizontal se logra cuando el ángulo es de  $\beta = 45^\circ$

$$R = \frac{\text{sen } 2 \beta (V_0)^2}{g}$$

$$R = \frac{\text{sen } 2 * 45 (V_0)^2}{g} = \frac{\text{sen } 90 (V_0)^2}{g} = \frac{(V_0)^2}{g}$$

$$R = \frac{(V_0)^2}{g} \quad \text{Ecuación 1}$$

$$h = \frac{(V_{0Y})^2}{2g}$$

$$2gh = (V_{0Y})^2$$

$$2gh = (V_0 \text{ sen } \beta)^2$$

$$2gh = (V_0)^2 \text{ sen}^2 \beta$$

$$2gh = 0,5 * (V_0)^2$$

$$4gh = (V_0)^2 \quad \text{Ecuación 2}$$

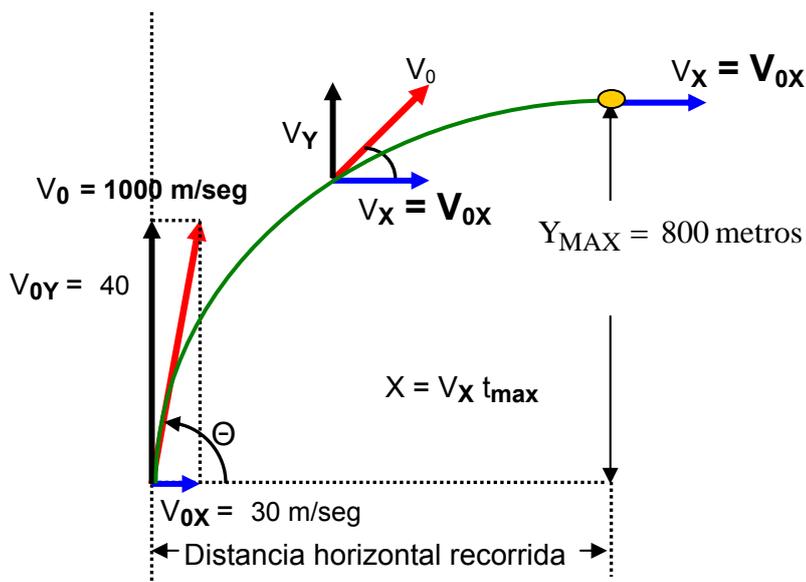
Reemplazando en la ecuación 1

$$R = \frac{(V_0)^2}{g} \quad R = \frac{4gh}{g}$$

$$R = 4h$$

#### Problema 4.25 Edición cuarta SERWAY

Un cañón que tiene una velocidad de orificio de 1000 m/seg se usa para destruir un blanco en la cima de una montaña. El blanco se encuentra a 2000 metros del cañón horizontalmente y a 800 metros sobre el nivel del suelo. A que ángulo relativo al suelo, debe dispararse el cañón? Ignore la fricción del aire.



Datos del problema:

$$V_0 = 1000 \text{ m/seg.} \quad X = 2000 \text{ metros}$$

Alcance horizontal

$$X = v_x * t$$

$$X = (v_0 \cos \theta) t$$

$$t = \frac{X}{V_0 \cos \theta} = \frac{2000}{1000 \cos \theta} = \frac{2}{\cos \theta} \quad \text{(Ecuación 1)}$$

Mientras el cuerpo vaya subiendo, ( $-\uparrow$ ) la ecuación es negativa.  $Y = V_{OY} * t - \frac{g * t^2}{2}$

$$Y = V_0 \operatorname{sen} \theta * t - \frac{g * t^2}{2} \quad \text{(Ecuación 2)}$$

Reemplazando la ecuación 1 en la ecuación 2.

$$Y = V_0 \operatorname{sen} \theta * t - \frac{g * t^2}{2}$$

$$Y = V_0 \operatorname{sen} \theta * \left( \frac{2}{\cos \theta} \right) - \frac{g * \left( \frac{2}{\cos \theta} \right)^2}{2}$$

$$Y = \frac{V_0 \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} * (2) - \frac{g * (2)^2}{(\cos \theta)^2} = \frac{2000 \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} - \frac{9,8 * 4}{2(\cos \theta)^2}$$

$$800 = 2000 * \operatorname{tag} \theta - \frac{19,6}{(\cos \theta)^2}$$

$$2000 * \operatorname{tg} \theta = 800 + \frac{19,6}{(\cos \theta)^2}$$

pero:

$$\frac{1}{(\cos \theta)^2} = (\sec \theta)^2$$

$$2000 * \operatorname{tg} \theta = 800 + 19,6(\sec \theta)^2$$

$$\text{pero: } (\sec \theta)^2 = (\operatorname{tg} \theta)^2 + 1$$

$$2000 * \operatorname{tg} \theta = 800 + 19,6 \left[ (\operatorname{tg} \theta)^2 + 1 \right]$$

$$2000 * \operatorname{tg} \theta = 800 + 19,6(\operatorname{tg} \theta)^2 + 19,6$$

Ordenando la ecuación

$$19,6(\operatorname{tg} \theta)^2 - 2000 \operatorname{tg} \theta + 800 + 19,6 = 0$$

$$19,6(\operatorname{tg} \theta)^2 - 2000 \operatorname{tg} \theta + 819,6 = 0$$

$$\text{pero: } a = 19,6 \quad b = -2000 \quad c = 818,6$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2000) \pm \sqrt{(-2000)^2 - 4 * 19,6 * (818,6)}}{2 * 19,6} = \frac{2000 \pm \sqrt{4000000 - 64178,24}}{39,2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2000 \pm \sqrt{3935821,76}}{39,2} = \frac{2000 \pm 1983,8905}{39,2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2000 + 1983,8905}{39,2} = 101,6298613$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2000 - 1983,8905}{39,2} = 0,410956$$

$$\operatorname{tg} \Theta = 101,6298613 \quad t = \frac{2}{\cos \theta} = \frac{2}{\cos 89,43} = \frac{2}{9,94821 \cdot 10^{-3}} = 201,04 \text{ seg}$$

$$\Theta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 101,6298613$$

$$\Theta = 89,43^\circ$$

$$\operatorname{tg} \beta = 0,410956 \quad t = \frac{2}{\cos \beta} = \frac{2}{\cos 22,34} = \frac{2}{0,9249} = 2,16 \text{ seg.}$$

$$\beta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 0,410956$$

$$\beta = 22,34^\circ$$

#### Problema 4.26 Edición cuarta SERWAY

Se lanza una pelota desde la ventana del piso más alto de un edificio. Se da a la pelota una velocidad inicial de 8 m/seg. a un ángulo de  $20^\circ$  debajo de la horizontal. La pelota golpea el suelo 3 seg. después.

- A que distancia horizontal a partir de la base del edificio la pelota golpea el suelo?
- Encuentre la altura desde la cual se lanzó la pelota?
- Cuanto tiempo tarda la pelota para alcanzar un punto 10 metros abajo del nivel de lanzamiento?

Datos:  $V_0 = 8 \text{ m/seg.}$      $\Theta = 20^\circ$      $t_{\text{vuelo}} = 3 \text{ seg.}$

**a) A que distancia horizontal a partir de la base del edificio la pelota golpea el suelo?**

$$X = v_x \cdot t_{\text{vuelo}}$$

$$X = (v_0 \cos \Theta) t_{\text{vuelo}}$$

$$X = (8 \cos 20) \cdot 3$$

$$X = 22,55 \text{ metros}$$

Mientras el cuerpo vaya bajando, (  $+\uparrow$  ) la ecuación es positiva.

$$Y = V_0 \operatorname{sen} \theta \cdot t + \frac{g \cdot t^2}{2}$$

$$Y = 8 \operatorname{sen} 20 \cdot 3 + \frac{9,8 \cdot 3^2}{2}$$

$$Y = 24 \operatorname{sen} 20 + \frac{9,8 \cdot 9}{2}$$

$$Y = 8,208 + 44,1$$

$$Y = 52,3 \text{ metros}$$

c) Cuanto tiempo tarda la pelota para alcanzar un punto 10 metros abajo del nivel de lanzamiento?

Mientras el cuerpo vaya bajando, (  $+\uparrow$  ) la ecuación es positiva.

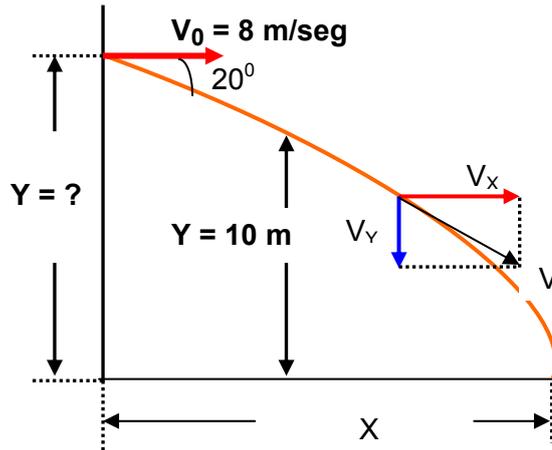
$$Y = V_0 \operatorname{sen} \theta * t + \frac{g * t^2}{2}$$

$$10 = 8 \operatorname{sen} 20 * t + \frac{9,8 * t^2}{2}$$

$$10 = 2,736 t + 4,9 t^2$$

$$4,9 t^2 + 2,736 t - 10 = 0$$

$$a = 4,9 \quad b = 2,736 \quad c = -10$$



Distancia horizontal recorrida

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(2,736) \pm \sqrt{(2,736)^2 - 4 * 4,9 * (-10)}}{2 * 4,9} = \frac{-2,736 \pm \sqrt{7,4529 + 196}}{9,8}$$

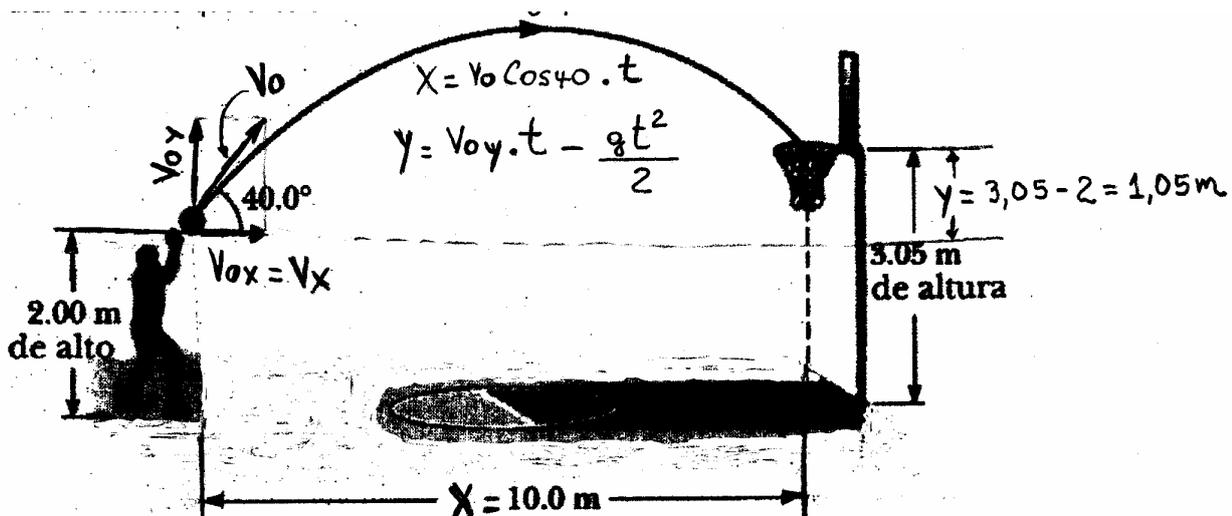
$$t = \frac{-2,736 \pm \sqrt{203,4529}}{9,8} \quad t = \frac{-2,736 \pm 14,26}{9,8}$$

$$t_1 = \frac{-2,736 + 14,26}{9,8} = \frac{11,53}{9,8}$$

$$t = 1,17 \text{ seg.}$$

#### Problema 4.58 Edición cuarta SERWAY

Un jugador de básquetbol de 2,0 metros de altura lanza un tiro a la canasta desde una distancia horizontal de 10 metros. Si tira a un ángulo de  $40^\circ$  con la horizontal, ¿Con que velocidad inicial debe tirar de manera que el balón entre al aro sin golpear el tablero?



Datos del problema:

Altura del lanzador 2,00 metros

Altura de la canasta 3,05 metros

$$X = 10 \text{ metros}$$

$$Y = 3,05 - 2,0 = 1,05 \text{ METROS}$$

$$\Theta = 40^0$$

Alcance horizontal

$$X = v_x * t$$

$$X = (v_0 \cos \Theta) t \text{ (Ecuación 1)}$$

$$t = \frac{X}{V_0 \cos \theta}$$

Pero:

$$Y = V_{OY} * t - \frac{g * t^2}{2}$$

$$Y = V_0 \text{ sen} \theta * t - \frac{g * t^2}{2} \text{ (Ecuación 2)}$$

Reemplazando la ecuación 1 en la ecuación 2.

$$Y = V_0 \text{ sen} \theta * t - \frac{g * t^2}{2}$$

$$Y = V_0 \text{ sen} \theta * \left( \frac{X}{V_0 \cos \theta} \right) - \frac{g * \left( \frac{X}{V_0 \cos \theta} \right)^2}{2}$$

$$Y = \frac{V_0 \text{ sen} \theta}{V_0 \cos \theta} * (X) - \frac{g * (X)^2}{2 V_0^2 (\cos \theta)^2}$$

$$Y = \text{tag} \theta * (X) - \frac{g * (X)^2}{2 V_0^2 (\cos \theta)^2}$$

Reemplazando

$$X = 10 \text{ metros}$$

$$Y = 3,05 - 2,0 = 1,05 \text{ metros}$$

$$\Theta = 40^0$$

$$1,05 = \text{tag} 40 * (10) - \frac{10 * (10)^2}{2 V_0^2 (\cos 40)^2}$$

$$1,05 = 8,39 - \frac{1000}{V_0^2 (1,1736)}$$

$$1,05 = 8,39 - \frac{852,07}{V_0^2}$$

$$\frac{852,07}{V_0^2} = 8,39 - 1,05$$

$$\frac{852,07}{V_0^2} = 7,34$$

$$V_0^2 = \frac{852,07}{7,34}$$

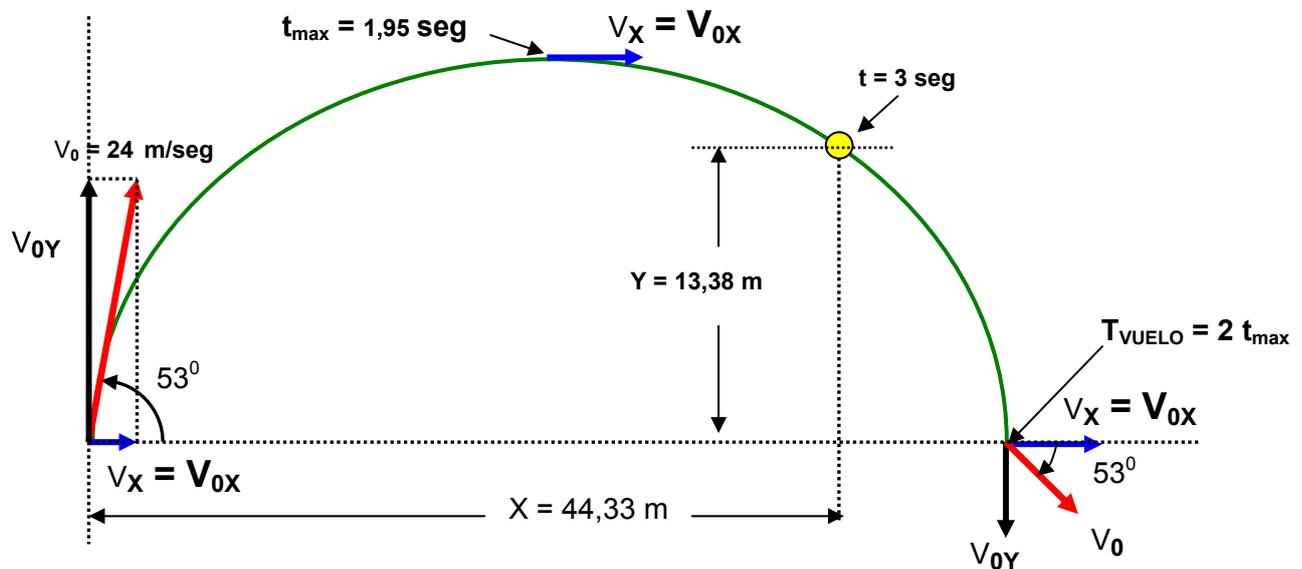
$$V_0 = \sqrt{\left(\frac{852,07}{7,34}\right)} = 10,77 \text{ m/seg}$$

$$V_0 = 10,77 \text{ m/seg.}$$

### PROBLEMAS ADICIONALES SOBRE TIRO PARABOLICO

**Problema 1** Un proyectil tiene una velocidad inicial de 24 m /seg que forma un ángulo de  $53^\circ$  por encima de la horizontal calcular:

- La distancia horizontal a que se encuentra del punto de partida 3 seg después de ser disparado.
- La distancia vertical por encima del punto de partida en el mismo instante
- Las componentes horizontal y vertical de su velocidad en dicho momento



Datos  $\Theta = 53^\circ$   $V_0 = 24 \text{ m/seg.}$

Inicialmente se halla el tiempo máximo, para saber si los 3 seg están subiendo o bajando en la grafica.

$$V_{0Y} = V_0 \text{ sen } \Theta$$

$$V_{0Y} = 24 \text{ sen } 53$$

$$V_{0Y} = 19,16 \text{ m/seg.}$$

$$t_{\text{max}} = \frac{V_{0Y}}{g} = \frac{19,16}{9,8} = 1,95 \text{ seg}$$

$t_{\text{max}} = 1,95 \text{ seg}$  significa que a los 3 seg. el proyectil esta bajando , ver grafica.

**a) La distancia horizontal a que se encuentra del punto de partida 3 seg después de ser disparado.**

$$V_{0X} = V_X = V_0 \text{ cos } \theta$$

$$V_{0X} = V_X = 24 \text{ cos } 53$$

$$V_{0X} = V_X = 14,44 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

$$X = V_X * t \Rightarrow$$

$$X = 14,44 * 3$$

$$\mathbf{X = 44,33 \text{ m}}$$

**b) La distancia vertical por encima del punto de partida en el mismo instante**

En la figura se puede observar la posición del poste. A los 3 seg. el balón va bajando.

Pero:

$$Y = V_{OY} * t - \frac{g * t^2}{2} = 19,16 * 3 - \frac{9,8 * 3^2}{2}$$

$$Y = 57,48 - 44,1$$

$$\mathbf{Y = 13,38 \text{ metros}}$$

**c) Las componentes horizontal y vertical de su velocidad en dicho momento**

$$V_{OX} = V_X = 14,44 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

$$V_Y = V_0 \text{ sen } \Theta - g t$$

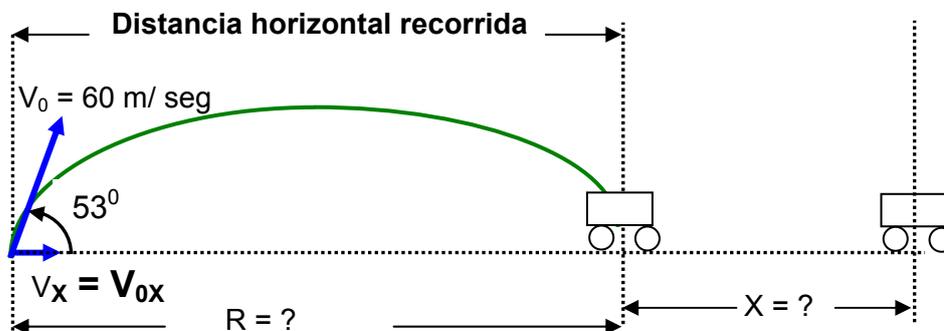
$$V_Y = 24 \text{ sen } 53 - 9,8 * 3$$

$$V_Y = 19,16 - 29,4$$

$$\mathbf{V_Y = - 10,24 \text{ m/seg}}$$

**Problema 2** Un mortero de trinchera dispara un proyectil con un ángulo de  $53^\circ$  por encima de la horizontal y una velocidad inicial  $V_0 = 60 \text{ m/seg}$ .

Un tanque avanza directamente hacia el mortero, sobre un terreno horizontal, a la velocidad de  $3 \text{ m/seg}$ . Cual deberá ser la distancia desde el mortero al tanque en el instante en que el mortero es disparado para lograr hacer blanco.



$$V_{OX} = V_X = V_0 \cos \theta$$

$$V_{OX} = V_X = 60 \cos 53$$

$$V_{OX} = V_X = 36,1 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

Se halla el alcance horizontal del mortero

$$R = \frac{\text{sen } 2\theta (V_0)^2}{g}$$

$$R = \frac{\sin 2(53) (60)^2}{9,8} = \frac{\sin 106 * 3600}{9,8} = \frac{3460,54}{9,8} = 353,11 \text{ m}$$

**R = 353,11 km**

**Se halla el tiempo de vuelo del mortero**

$$R = V_X * t_v \Rightarrow$$

$$t_v = \frac{R}{V_X} = \frac{353,11}{36,1} = 9,78 \text{ seg}$$

**t<sub>v</sub> = 9,78 seg**

**El tiempo de vuelo del mortero es el mismo tiempo que necesita el tanque para llegar al objetivo.**

**Se halla el desplazamiento del tanque**

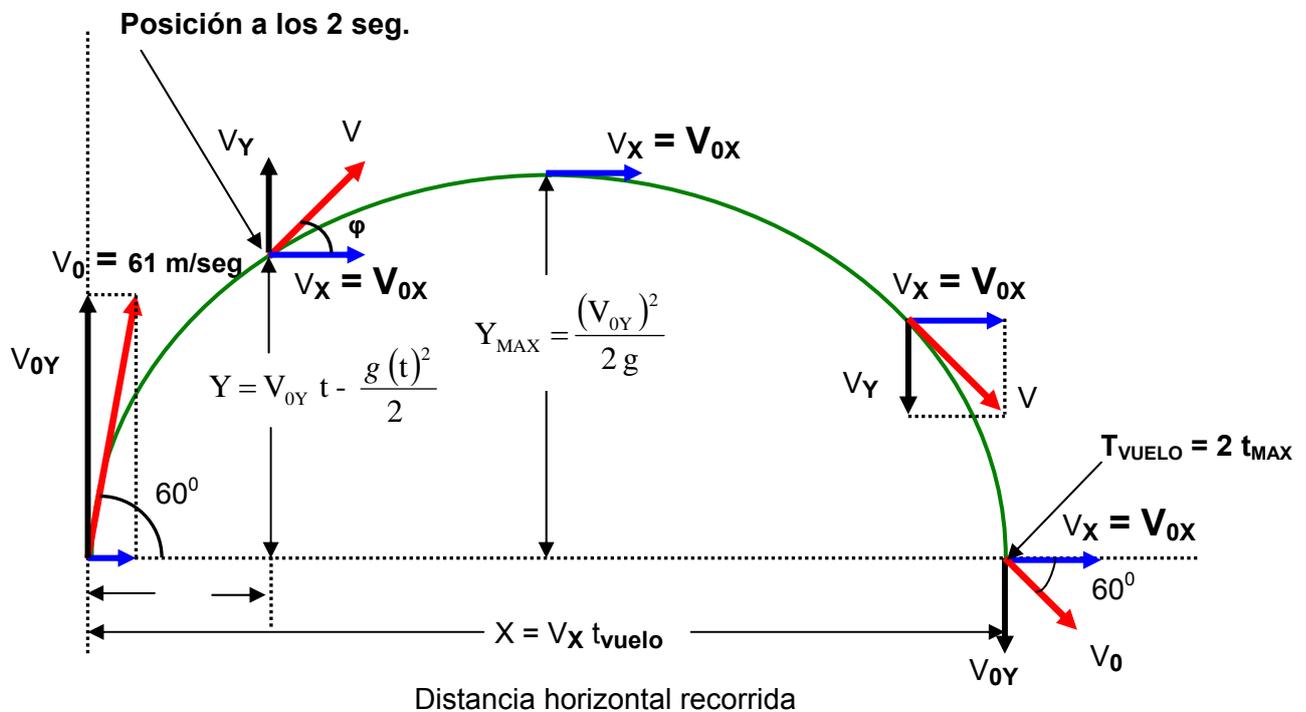
$$X = v * t$$

$$X = 3 * 9,78$$

**X = 29,34 metros**

### PROBLEMA 3

Se lanza un proyectil con una velocidad de 61 m/seg. y un ángulo de 60° sobre la horizontal. Calcular:



**a) Cuanto vale la componente vertical de la velocidad inicial ( $V_{0Y}$ )**

Datos del problema  $V_0 = 61 \text{ m/seg}$ .  $\theta = 60^\circ$

$$V_{OY} = V_O \text{ sen } \theta$$
$$V_{OY} = 61 \text{ sen } 60 = 61 (0,866)$$
$$V_{OY} = \mathbf{52,82 \text{ m/seg.}}$$

**b) Cuanto vale la componente horizontal de la velocidad inicial ( $V_{Ox}$ )**

Datos del problema  $V_O = 61 \text{ m/seg.}$   $\theta = 60^\circ$

$$V_{Ox} = V_O \text{ cos } \theta$$
$$V_{Ox} = 61 \text{ cos } 60 = 61 (0,5)$$
$$V_{Ox} = \mathbf{30,5 \text{ m/seg.}}$$

**c) Cual es la velocidad vertical al cabo de 2 seg.**

(- ↑)  $V_Y = V_{OY} - gt$  pero:  $V_{OY} = 52,82 \text{ m/seg.}$

$$V_Y = 52,82 \text{ m/seg.} - 10 \text{ m/seg}^2 * 2 \text{ seg.}$$

$$V_Y = 52,82 \text{ m/seg.} - 20 \text{ m/seg.}$$

$$V_Y = \mathbf{32,82 \text{ m/seg.}}$$

**d) Cual es la velocidad horizontal al cabo de 2 seg.**

La velocidad horizontal ( $V_X$ ) al cabo de 2 seg. es la misma que  $V_{Ox} = 30,5 \text{ m/seg.}$  Es decir la velocidad en eje horizontal permanece constante a través de todo el recorrido.

$$V_X = V_{Ox} = \mathbf{30,5 \text{ m/seg.}}$$

**e) Cual es la magnitud de la velocidad al cabo de 2 seg.**

Pero:  $V_X = V_{Ox} = 30,5 \text{ m/seg.}$   $V_Y = 32,82 \text{ m/seg.}$

$$V = \sqrt{(V_X)^2 + (V_Y)^2} = \sqrt{(30,5)^2 + (32,82)^2} = 44,8 \text{ m/seg}$$

$$V = \mathbf{44,8 \text{ m/seg.}}$$

**f) En que instante el proyectil alcanza el punto mas alto de su trayectoria.**

$$t_{\text{max}} = \frac{V_{OY}}{g} = \frac{52,82 \text{ m/seg}}{10 \text{ m/seg}^2} = 5,282 \text{ seg.}$$

**g) Cual es el alcance del proyectil (Distancia horizontal recorrida)**

$$X = V_X * t_{\text{vuelo}} \quad \text{pero: } t_{\text{vuelo}} = 2 * t_{\text{max}}$$

$$X = 30,5 * 10,564 \quad t_{\text{vuelo}} = 2 * 5,282 \text{ seg.}$$

$$X = 322,2 \text{ metros} \quad t_{\text{vuelo}} = 10,564 \text{ seg.}$$

**h) Cual es la velocidad del proyectil al llegar al suelo**

Es igual a la velocidad con que parte el proyectil.

$$V_O = \mathbf{61 \text{ m/seg.}}$$

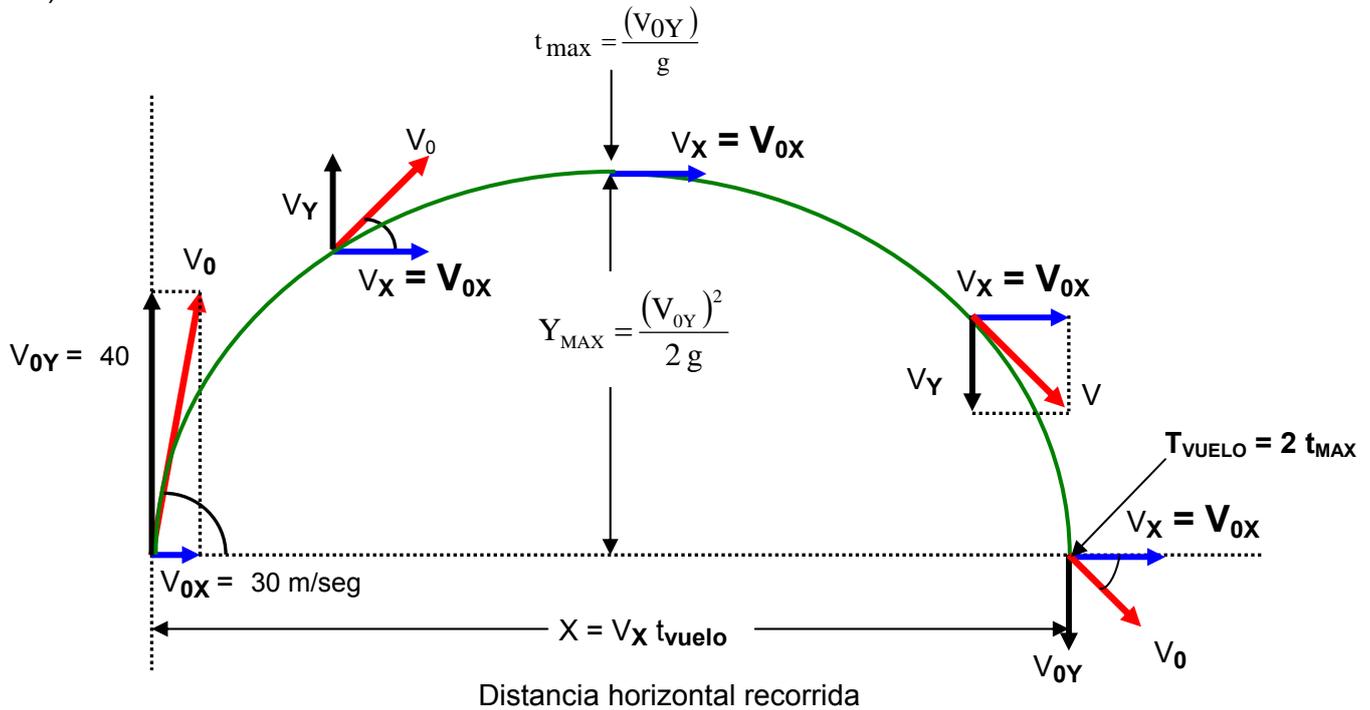
$V_X = V_{Ox} = 30,5 \text{ m/seg.}$  Es decir la velocidad en eje horizontal permanece constante a través de todo el recorrido.

$$V_{OY} = 52,82 \text{ m/seg.} \quad V_O = 61 \text{ m/seg.}$$

#### PROBLEMA 4

Se lanza un objeto con velocidad vertical de 40 m/seg. y horizontal de 30 m/seg.

- Cual es la altura alcanzada.
- El alcance horizontal.



- Cual es la altura alcanzada.

$$Y_{\text{max}} = \frac{(V_{0Y})^2}{2g} = \frac{(40)^2}{2g} = \frac{1600 \text{ m}^2/\text{seg}^2}{2 * 10 \text{ m/seg}^2} = \frac{1600}{20} = 80 \text{ metros}$$

- El alcance horizontal.

El tiempo para alcanzar el punto más alto. Pero:  $V_{0Y} = 40 \text{ m/seg}$ .

$$t_{\max} = \frac{V_{0Y}}{g} = \frac{40 \text{ m/seg}}{10 \text{ m/seg}^2} = 4 \text{ seg.}$$

pero:  $t_{\text{vuelo}} = 2 * t_{\max}$

$$t_{\text{vuelo}} = 2 * 4 \text{ seg.}$$

$$t_{\text{vuelo}} = 8 \text{ seg.}$$

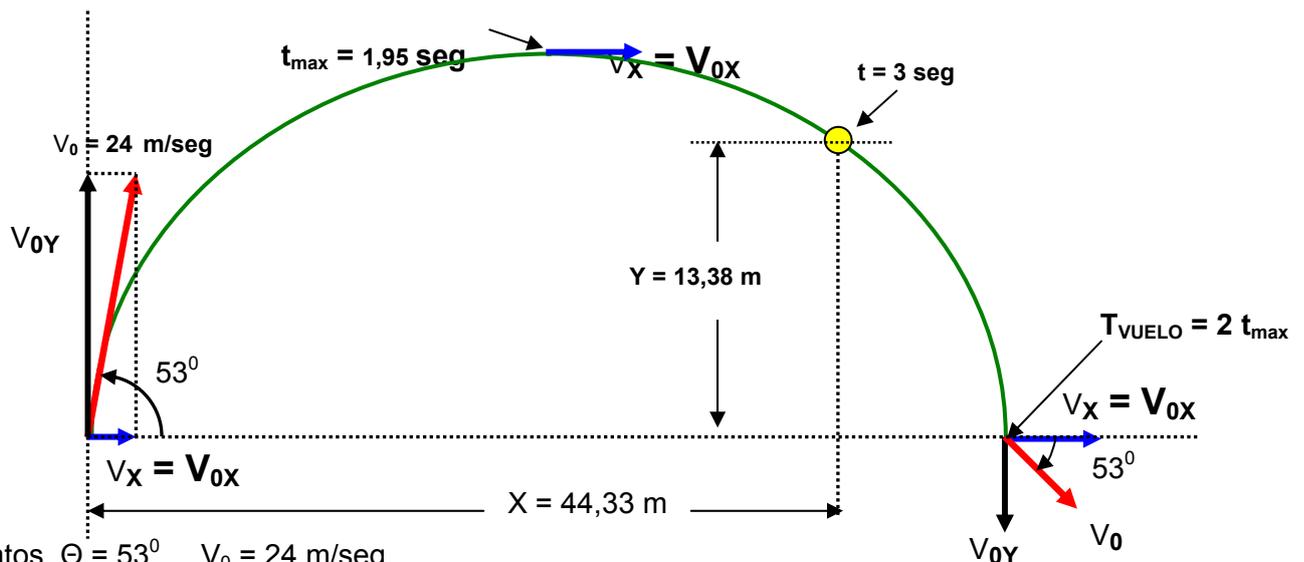
$X = V_x * t_{\text{vuelo}}$  pero:  $V_x = V_{0x} = 30 \text{ m/seg}$ .

$$X = 30 \text{ m/seg.} * 8 \text{ seg.}$$

$$X = 240 \text{ metros}$$

**Problema 5** Un proyectil tiene una velocidad inicial de 24 m /seg que forma un ángulo de  $53^\circ$  por encima de la horizontal calcular:

- La distancia horizontal a que se encuentra del punto de partida 3 seg después de ser disparado.
- La distancia vertical por encima del punto de partida en el mismo instante
- Las componentes horizontal y vertical de su velocidad en dicho momento



Datos  $\Theta = 53^\circ$   $V_0 = 24$  m/seg.

Inicialmente se halla el tiempo máximo, para saber si los 3 seg están subiendo o bajando en la grafica.

$$V_{0Y} = V_0 \text{ sen } \Theta$$

$$V_{0Y} = 24 \text{ sen } 53$$

$$V_{0Y} = 19,16 \text{ m/seg.}$$

$$t_{\text{max}} = \frac{V_{0Y}}{g} = \frac{19,16}{9,8} = 1,95 \text{ seg}$$

$t_{\text{max}} = 1,95$  seg significa que a los 3 seg. el proyectil esta bajando , ver grafica.

a) La distancia horizontal a que se encuentra del punto de partida 3 seg después de ser disparado.

$$V_{0X} = V_X = V_0 \text{ cos } \theta$$

$$V_{0X} = V_X = 24 \text{ cos } 53$$

$$V_{0X} = V_X = 14,44 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

$$X = V_X * t \Rightarrow$$

$$X = 14,44 * 3$$

$$\mathbf{X = 44,33 \text{ m}}$$

b) La distancia vertical por encima del punto de partida en el mismo instante

En la figura se puede observar la posición del poste. A los 3 seg. el balón va bajando.

Pero:

$$Y = V_{0Y} * t - \frac{g * t^2}{2} = 19,16 * 3 - \frac{9,8 * 3^2}{2}$$

$$Y = 57,48 - 44,1$$

$$\mathbf{Y = 13,38 \text{ metros}}$$

c) Las componentes horizontal y vertical de su velocidad en dicho momento

$$V_{0X} = V_X = 14,44 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

$$V_Y = V_0 \text{ sen } \Theta - g t$$

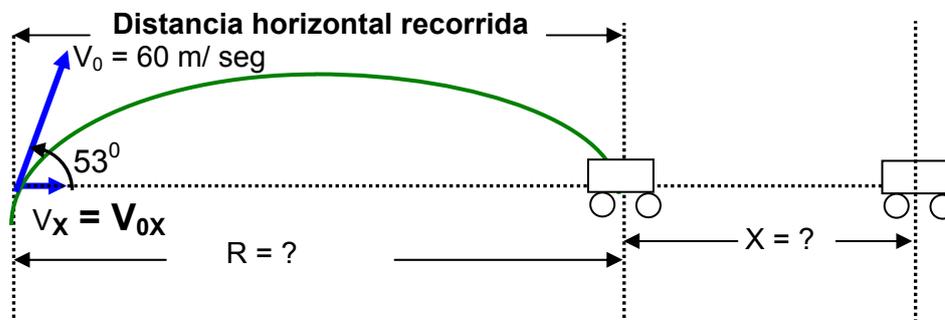
$$V_Y = 24 \text{ sen } 53 - 9,8 * 3$$

$$V_Y = 19,16 - 29,4$$

$$\mathbf{V_Y = - 10,24 \text{ m/seg}}$$

**Problema 6** Un mortero de trinchera dispara un proyectil con un ángulo de  $53^\circ$  por encima de la horizontal y una velocidad inicial  $V_0 = 60$  m/seg.

Un tanque avanza directamente hacia el mortero, sobre un terreno horizontal, a la velocidad de 3 m/seg. Cual deberá ser la distancia desde el mortero al tanque en el instante en que el mortero es disparado para lograr hacer blanco.



$$V_{OX} = V_X = V_0 \cos \theta$$

$$V_{OX} = V_X = 60 \cos 53$$

$$V_{OX} = V_X = 36,1 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

Se halla el alcance horizontal del mortero

$$R = \frac{\text{sen } 2\theta (V_0)^2}{g}$$

$$R = \frac{\text{sen } 2(53) (60)^2}{9,8} = \frac{\text{sen } 106 * 3600}{9,8} = \frac{3460,54}{9,8} = 353,11 \text{ m}$$

**R = 353,11 m**

Se halla el tiempo de vuelo del mortero

$$R = V_X * t_v \Rightarrow$$

$$t_v = \frac{R}{V_X} = \frac{353,11}{36,1} = 9,78 \text{ seg}$$

**$t_v = 9,78$  seg**

El tiempo de vuelo del mortero es el mismo tiempo que necesita el tanque para llegar al objetivo.

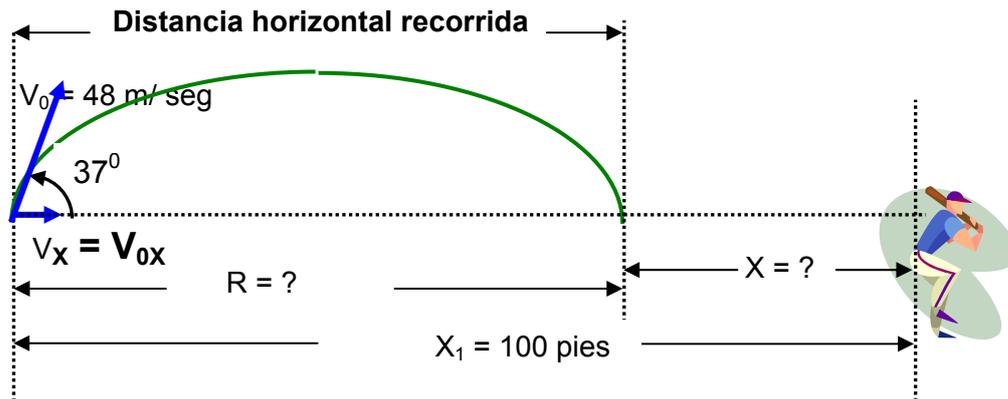
Se halla el desplazamiento del tanque

$$X = v * t$$

$$X = 3 * 9,78$$

**X = 29,34 metros**

**Problema 7** Un jugador lanza una pelota formando un ángulo de  $37^\circ$  con la horizontal y con una velocidad inicial de 48 pies/seg. Un segundo jugador, que se encuentra a una distancia de 100 pies del primero en la dirección del lanzamiento inicia una carrera para encontrar la pelota, en el momento de ser lanzada. Con que velocidad ha de correr para coger la pelota



$$V_{OX} = V_X = V_0 \cos \theta$$

$$V_{OX} = V_X = 48 \cos 37$$

$$V_{OX} = V_X = 38,33 \frac{\text{pies}}{\text{seg}}$$

Se halla el alcance horizontal de la pelota  $g = 32 \text{ pies/seg}^2$

$$R = \frac{\text{sen } 2\theta (V_0)^2}{g}$$

$$R = \frac{\text{sen } 2(37) 48^2}{32} = \frac{\text{sen } 74 * 2304}{32} = \frac{2214,74}{32} = 69,21 \text{ pies}$$

$$R = 69,21 \text{ pies}$$

**Se halla el tiempo de vuelo de la pelota**

$$R = V_X * t_v \Rightarrow$$

$$t_v = \frac{R}{V_X} = \frac{69,21}{38,33} = 1,8 \text{ seg}$$

$$t_v = 1,8 \text{ seg}$$

Para el segundo jugador, el tiempo de vuelo de la pelota es el mismo tiempo que el jugador necesita para llegar hasta la pelota.

$$X_1 = 100 \text{ pies} \quad R = 69,21 \text{ pies}$$

$$X_1 = R + X$$

$$X = X_1 - R$$

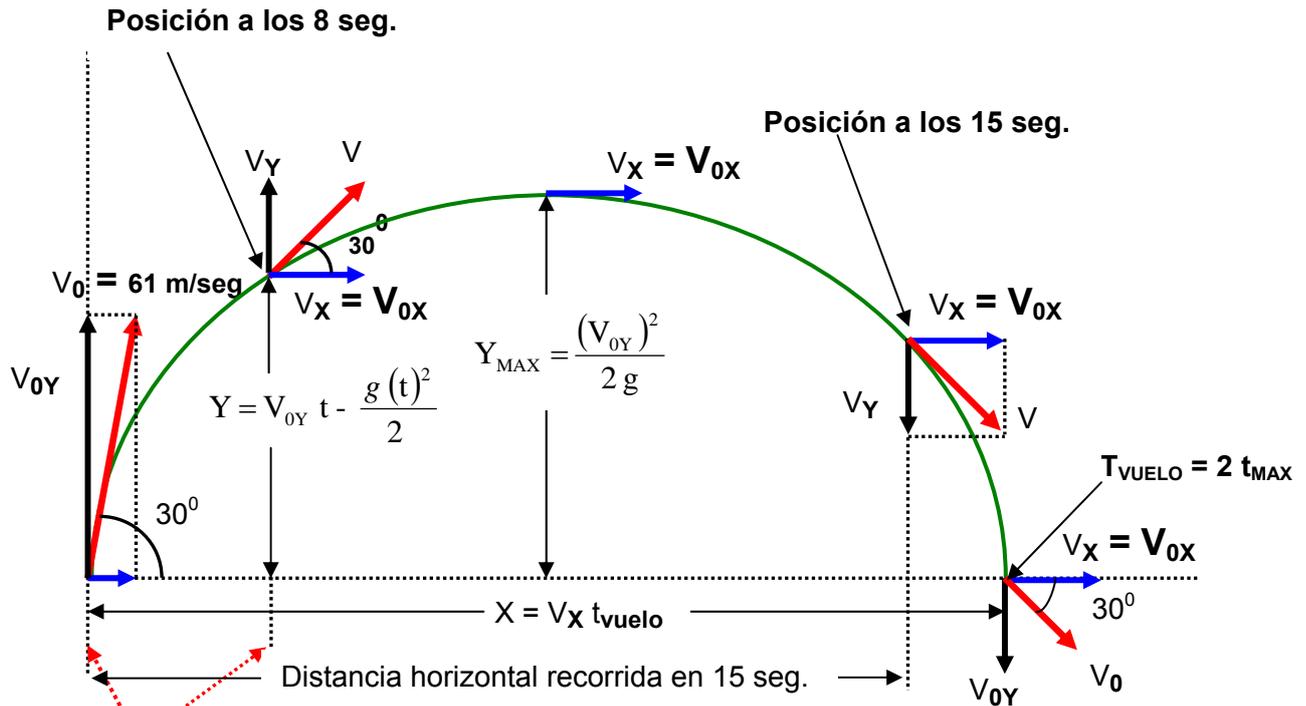
$$X = 100 - 69,21$$

$$X = 30,79 \text{ pies}$$

**se halla la velocidad del jugador para atrapar la pelota**

**PROBLEMA 8** Una bala se dispara con un ángulo de tiro de  $30^\circ$  y una velocidad de 200 m/seg. Calcular:

- Altura alcanzada en 8 seg.
- A los cuantos seg. regresa a la tierra.
- Distancia horizontal recorrida en 15 seg.



**Distancia horizontal recorrida en 8 seg.**

**a) Altura alcanzada en 8 seg.**

Datos del problema  $V_0 = 200$  m/seg.  $\theta = 30^\circ$

$$V_{0Y} = V_0 \text{ sen } \theta$$

$$V_{0Y} = 200 \text{ sen } 30$$

$$V_{0Y} = 200 * (0,5)$$

$$\mathbf{V_{0Y} = 100 \text{ m/seg.}}$$

Es necesario hallar el tiempo máximo ( $t_{max}$ ), para determinar si a los 8 seg. del movimiento la bala va bajando o subiendo.

$$t_{max} = \frac{V_{0Y}}{g} = \frac{100 \text{ m/seg}}{10 \text{ m/seg}^2} = 10 \text{ seg.}$$

El tiempo máximo es de 10 seg. (Ver la grafica) se puede decir que a los 8 seg. la bala esta subiendo.

$$Y = V_{0Y} * t - \frac{g * t^2}{2}$$

pero  $t = 8$  seg.  $g = 10$  m/seg<sup>2</sup>  $V_{0Y} = 100$  m/seg.

$$Y = 100 * 8 - \frac{10 * (8)^2}{2} = 800 - \frac{10 * 64}{2} = 800 - 320$$

$$\mathbf{Y = 480 \text{ metros.}}$$

**b) A los cuantos seg. regresa a la tierra.**

$$t_{vuelo} = 2 * t_{max}$$

$$t_{vuelo} = 2 * 10 \text{ seg.}$$

$$\mathbf{t_{vuelo} = 20 \text{ seg.}}$$

**c) Distancia horizontal recorrida en 15 seg.**

Datos del problema  $V_0 = 200$  m/seg.  $\theta = 30^\circ$

$$V_{0X} = V_0 \text{ cos } \theta$$

$$V_{Ox} = 200 \cdot \cos 30$$

$$V_{Ox} = 200 \cdot (0,866)$$

$$V_{Ox} = 173,2 \text{ m/seg.}$$

$$X = V_x \cdot t \quad \text{pero: } V_x = V_{Ox} = 173,2 \text{ m/seg.}$$

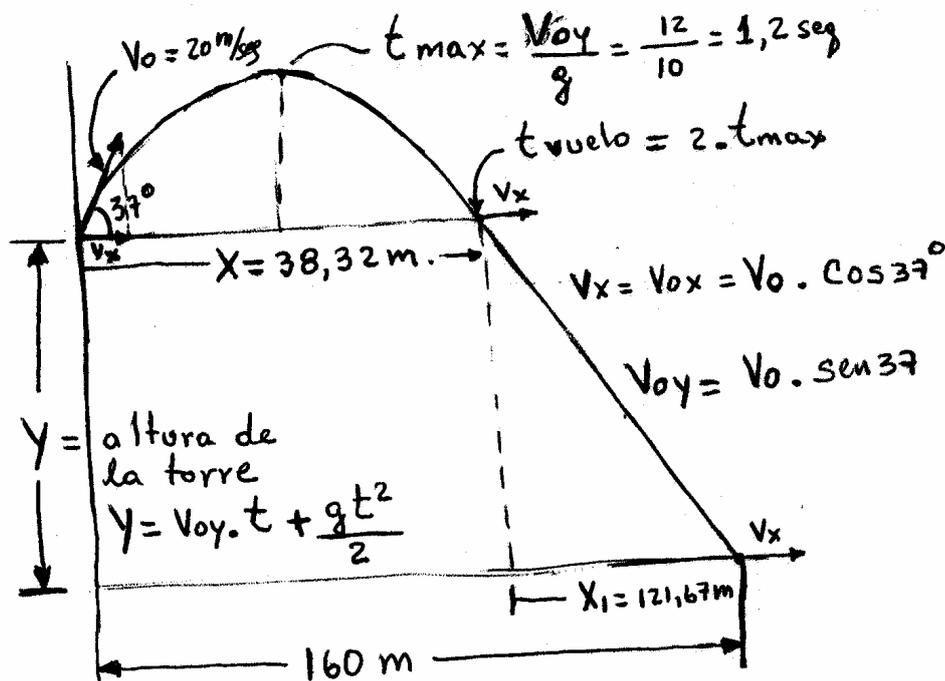
$$X = 173,2 \text{ m/seg.} \cdot 15 \text{ seg.}$$

$$X = 2598 \text{ metros}$$

El alcance horizontal para 15 seg. es  $X = 2598$  metros.

### PROBLEMA 9

De arriba de una torre se lanza una piedra con una velocidad de 20 m/seg y un ángulo de  $37^\circ$ . La piedra alcanza el suelo a una distancia de 160 metros con respecto a la base de la torre. Cual es la altura de la torre.



Datos del problema  $V_0 = 20 \text{ m/seg}$ .  $\theta = 37^\circ$

$$V_{Oy} = V_0 \cdot \sin \theta$$

$$V_{Oy} = 20 \cdot \sin 37$$

$$V_{Oy} = 20 \cdot (0,6018)$$

$$V_{Oy} = 12 \text{ m/seg.}$$

$$t_{\text{max}} = \frac{V_{Oy}}{g} = \frac{12 \text{ m/seg}}{10 \text{ m/seg}^2} = 1,2 \text{ seg.}$$

$$t_{\text{vuelo}} = 2 \cdot t_{\text{max}}$$

$$t_{\text{vuelo}} = 2 \cdot 1,2 \text{ seg.}$$

$$t_{\text{vuelo}} = 2,4 \text{ seg.}$$

Datos del problema  $V_0 = 20 \text{ m/seg}$ .  $\theta = 37^\circ$

$$V_{Ox} = V_0 \cdot \cos \theta$$

$$V_{Ox} = 20 \cdot \cos 37$$

$$V_{Ox} = 20 \cdot (0,798)$$

$$V_x = V_{ox} = 15,97 \text{ m/seg.}$$

$$X = V_x * t_{\text{vuelo}} \quad \text{pero: } V_x = V_{ox} = 15,97 \text{ m/seg.} \quad t_{\text{vuelo}} = 2,4 \text{ seg.}$$

$$X = 15,97 \text{ m/seg.} * 2,4 \text{ seg.}$$

**X = 38,32 metros. (Este es el alcance horizontal del tiro parabólico, ver grafica)**

Pero:

$$160 = X + X_1$$

$$X_1 = 160 - X$$

$$X_1 = 160 - 38,32$$

**X<sub>1</sub> = 121,67 metros (VER LA GRAFICA)**

$$X_1 = V_x * t \quad \text{Pero: } V_x = V_{ox} = 15,97 \text{ m/seg.}$$

$$t = \frac{X_1}{V_x} = \frac{121,67}{15,97} = 7,61 \text{ seg.}$$

$$(+\downarrow) \quad Y = V_{oy} * t + \frac{g * t^2}{2}$$

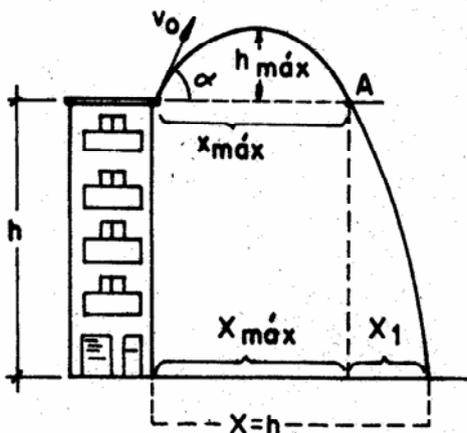
$$Y = V_{oy} * t + \frac{g * t^2}{2} = 12 * (7,61) + \frac{10 * (7,61)^2}{2}$$

$$Y = 91,32 + 289,56 = 380 \text{ metros}$$

La altura de la torre es de 380 metros.

### PROBLEMA 10

De lo alto de un edificio se lanza un proyectil con una inclinación de  $40^\circ$  por encima de la horizontal. Al cabo de 5 seg. el proyectil encuentra el plano horizontal que pasa por el pie del edificio, a una distancia de este pie igual a la altura del edificio. Calcular la velocidad inicial del proyectil y la altura del edificio. Se sabe que la máxima altura de trayectoria del proyectil respecto a la parte superior del edificio es de 10 metros.



Datos del problema:

$$\theta = 40^\circ$$

$t = 5 \text{ seg.}$  (para  $X = H$ ) (Es decir el proyectil demora en el aire 5 seg.)

$$h_{\text{max}} = 10 \text{ metros.}$$

$$g = 10 \text{ m/seg}^2$$

Como tenemos el valor de  $h_{\max}$  se puede hallar la  $V_{OY}$  (Velocidad inicial en el eje vertical).

$$Y_{\max} = \frac{(V_{OY})^2}{2g} \Rightarrow$$

$$(V_{OY})^2 = 2 * g * Y_{\max}$$

$$V_{OY} = \sqrt{2 * g * Y_{\max}} = \sqrt{2 * 10 * 10} = 14,14 \text{ m/seg}$$

**$V_{OY} = 14,14 \text{ m/seg.}$**

$$V_{OY} = V_O \text{ sen } \theta$$

$$V_O = \frac{V_{OY}}{\text{sen } 40} = \frac{14,14}{0,6427} = 22 \text{ m/seg}$$

**$V_O = 22 \text{ m/seg.}$**

Datos del problema  $V_O = 22 \text{ m/seg.}$   $\theta = 40^\circ$

$$V_{OX} = V_O \text{ cos } \theta$$

$$V_{OX} = 22 * \text{cos } 40$$

$$V_{OX} = 22 * (0,766)$$

**$V_X = V_{OX} = 16,85 \text{ m/seg.}$**

Como  $V_X = V_{OX} = 16,85 \text{ m/seg.}$  es constante en todo el recorrido del proyectil, y el tiempo de vuelo del proyectil es de 5 seg. se halla el recorrido horizontal ( $X = h$ )

$$X = h = V_X * t$$

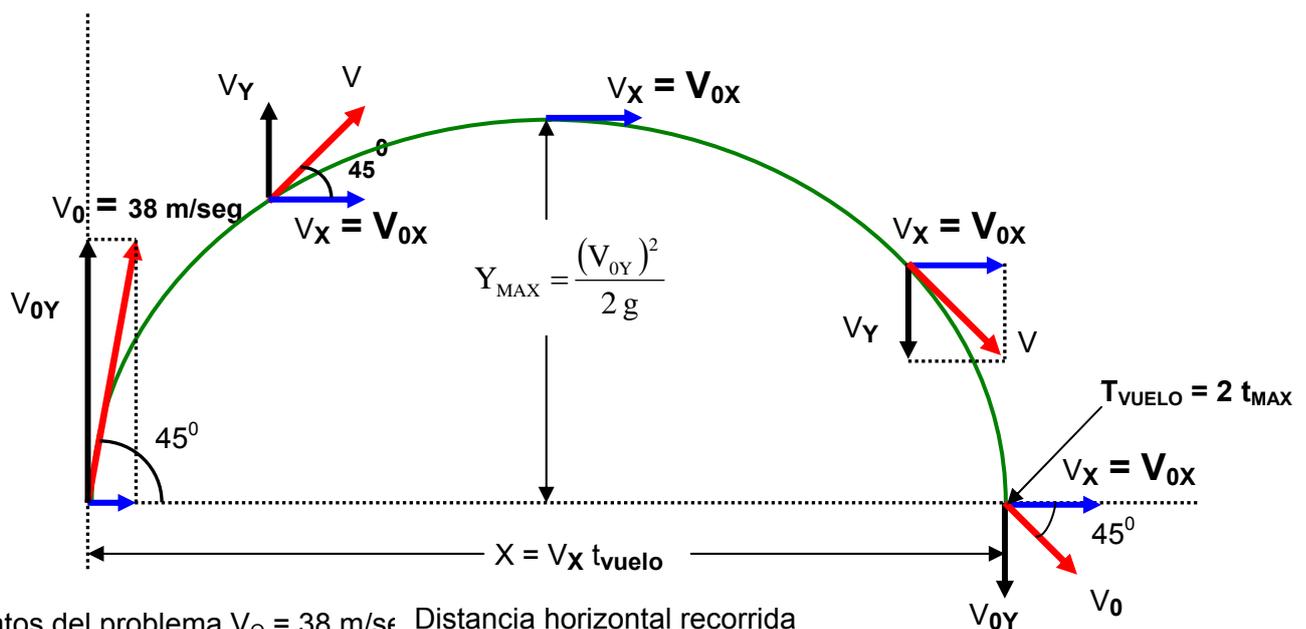
$$X = h = 16,85 * 5$$

$$X = h = 84,25 \text{ metros.}$$

**La altura del edificio (h) es de 84,25 metros.**

### PROBLEMA 11

Un jugador de béisbol golpea la pelota con un ángulo de  $45^\circ$  y le proporciona una velocidad de 38 m/seg. Cuanto tiempo tarda la pelota en llegar al suelo.



Datos del problema  $V_O = 38 \text{ m/s}$  Distancia horizontal recorrida

$$V_{OY} = V_0 \text{ sen } \theta$$

$$V_{OY} = 38 \text{ sen } 45$$

$$V_{OY} = 38 (0,7071)$$

**$V_{OY} = 26,87 \text{ m/seg.}$**  Es la velocidad inicial en el eje Y, sirve para hallar el  $t_{\text{max}}$

$$t_{\text{max}} = \frac{V_{OY}}{g} = \frac{26,87 \text{ m/seg}}{10 \text{ m/seg}^2} = 2,687 \text{ seg.}$$

Con el  $t_{\text{max}}$  hallamos el tiempo de vuelo

$$t_{\text{vuelo}} = 2 * t_{\text{max}}$$

$$t_{\text{vuelo}} = 2 * 2,687 \text{ seg.}$$

$$t_{\text{vuelo}} = \mathbf{5,374 \text{ seg.}}$$

### PROBLEMA 12

Se lanza una pelota al aire, cuando esta a 12 metros sobre el piso, las velocidades son:  $V_x = V_{0x} = 4,5 \text{ m/seg.}$   $V_y = 3,36 \text{ m/seg.}$

Cual es la velocidad inicial de la pelota ( $V_0$ ).

Que altura máxima alcanza la pelota.

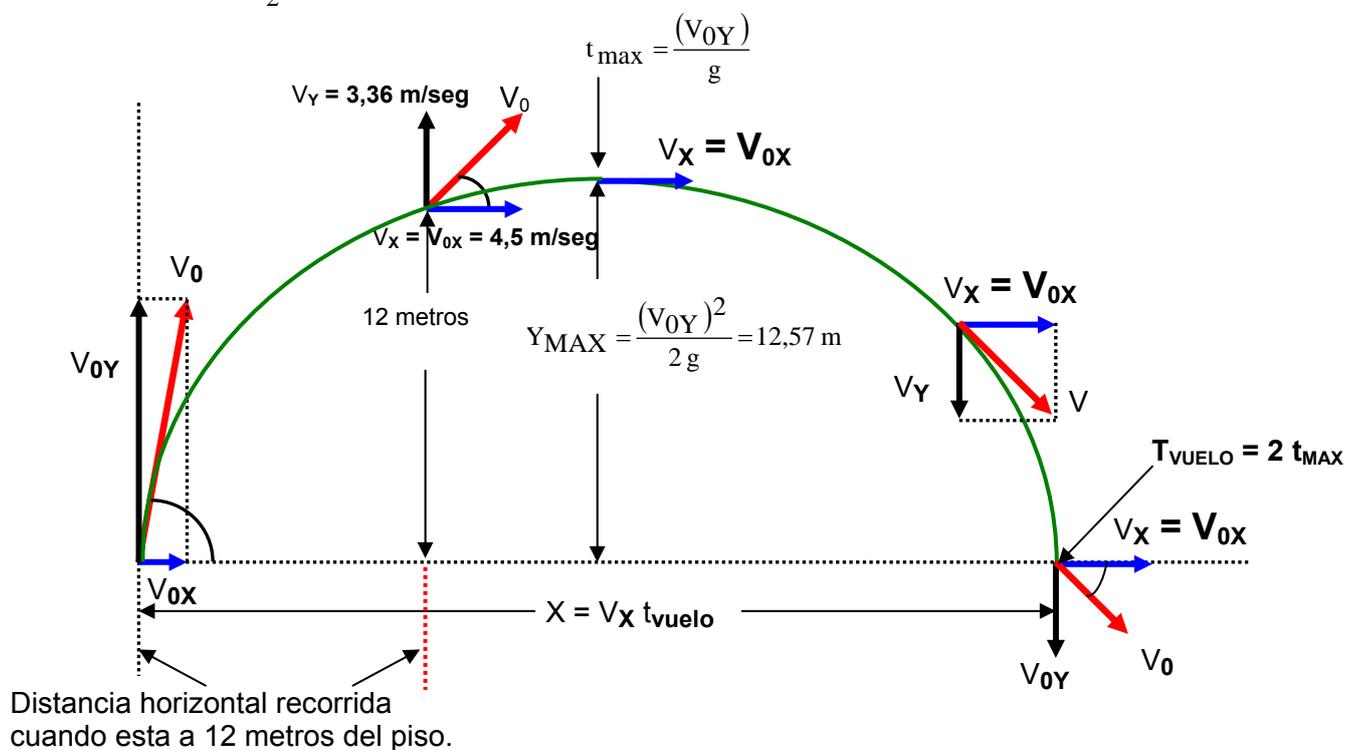
$$V_y = V_{0y} - g t$$

$$V_y + g t = V_{0y}$$

$$\mathbf{3,36 + 10t = V_{0y}} \quad (\text{Ecuación 1})$$

$$Y = V_{0y} * t - \frac{g * t^2}{2}$$

$$12 = V_{0y} * t - \frac{10 * (t)^2}{2}$$



$$12 + 5t^2 = V_{OY} * t$$

$$\frac{12}{t} + 5t = V_{OY} \quad \text{(Ecuación 2)}$$

Igualando ecuación 1 con ecuación 2

$$3,36 + 10t = 12/t + 5t$$

$$3,36 = \frac{12}{t} + 5t - 10t = \frac{12}{t} - 5t$$

$$3,36 = \frac{12 - 5t^2}{t}$$

$$3,36t = 12 - 5t^2$$

$$5t^2 + 3,36t - 12 = 0$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3,36 \pm \sqrt{3,36^2 - 4 * 5 * (-12)}}{2 * 5} = \frac{-3,36 \pm \sqrt{11,28 + 240}}{10} = \frac{-3,36 \pm \sqrt{251,28}}{10}$$

$$t = \frac{-3,36 \pm 15,85}{10} \Rightarrow t = \frac{-3,36 + 15,85}{10} = \frac{12,4918}{10}$$

$$t = 1,25 \text{ seg.}$$

Reemplazando el  $t = 1,25$  seg. hallamos  $V_{OY}$

$$3,36 + 10t = V_{OY} \quad \text{(Ecuación 1)}$$

$$3,36 + 10 * 1,25 = V_{OY}$$

$$V_{OY} = 3,36 + 12,5 = 15,86 \text{ m/seg}$$

$$V_{OY} = 15,86 \text{ m/seg}$$

$$\text{La altura máxima es: } Y_{\max} = \frac{(V_{OY})^2}{2g} = \frac{(15,86)^2}{2g} = \frac{251,539 \text{ m}^2/\text{seg}^2}{2 * 10 \text{ m/seg}^2} = \frac{251,539}{20} = 12,57 \text{ metros}$$

$V_x = V_{OX} = 4,5$  m/seg. Por que la velocidad en este sentido permanece constante a través de todo el recorrido.

$$\text{tg } \theta = \frac{V_{OY}}{V_{OX}} = \frac{15,86}{4,5} = 3,524$$

$$\theta = \text{arc tg } 3,524$$

$$\theta = 74,15^\circ$$

$$V_{OY} = V_O \text{ sen } \theta$$

$$15,86 = V_O \text{ sen } 74,15$$

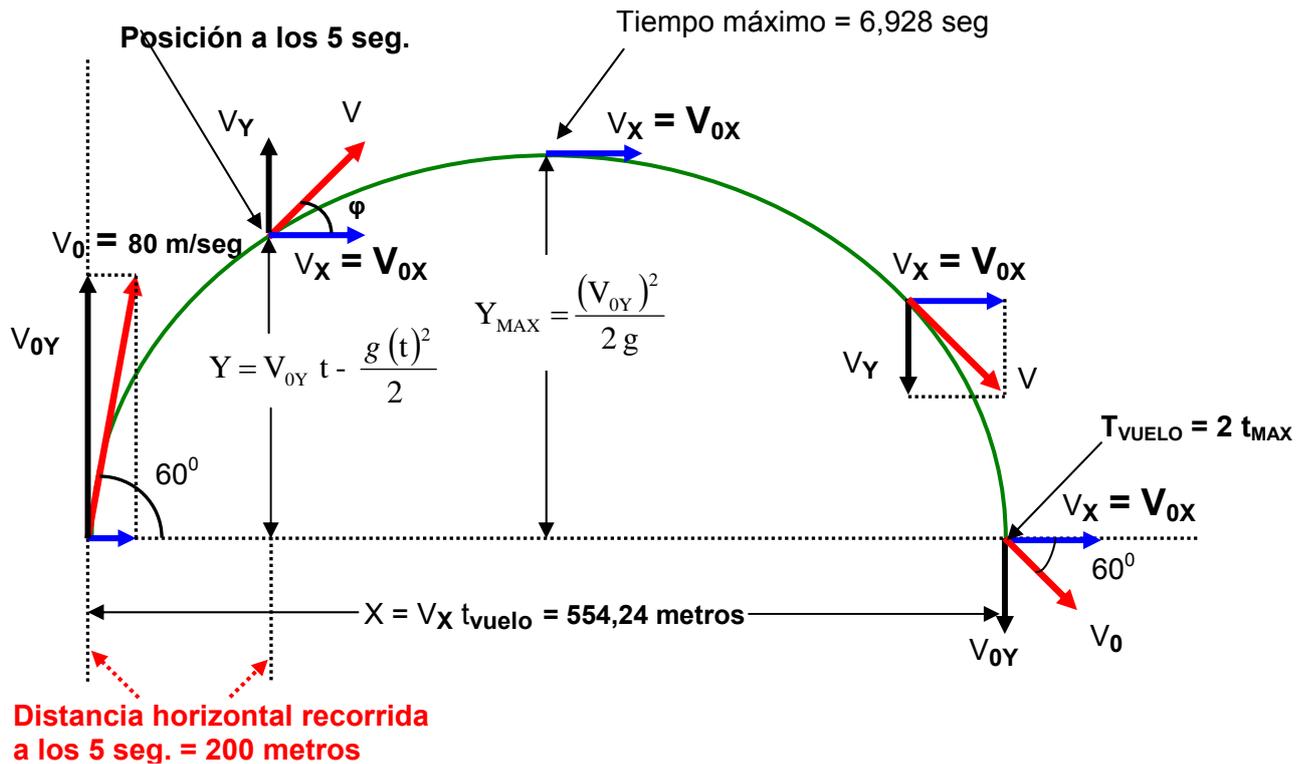
$$V_O = \frac{15,86}{\text{sen } 74,15} = \frac{15,86}{0,96198} = 16,48 \text{ m/seg}$$

$$V_O = 16,48 \text{ m/seg} \quad \text{(Velocidad inicial con que fue lanzada la pelota)}$$

### PROBLEMA 13

Se dispara un proyectil con rapidez inicial de 80 m/seg. hacia el este con un ángulo de elevación de  $60^\circ$

- Calcular el tiempo de vuelo del proyectil.
- Cual es el alcance máximo horizontal.
- Cual es el desplazamiento vertical y horizontal al cabo de 5 seg.
- Que magnitud y dirección tiene la velocidad del proyectil a los 5 seg.
- En que instante de tiempo y a que altura la componente vertical de la velocidad se anula.



Datos del problema

$$V_o = 80 \text{ m/seg. } \theta = 60^\circ$$

$$V_{OY} = V_o \text{ sen } \theta$$

$$V_{OY} = 80 \text{ sen } 60$$

$$V_{OY} = 80 (0,866)$$

**$V_{OY} = 69,28 \text{ m/seg.}$**  Es la velocidad inicial en el eje Y, sirve para hallar el  $t_{max}$

$$t_{max} = \frac{V_{OY}}{g} = \frac{69,28 \text{ m/seg}}{10 \text{ m/seg}^2} = 6,928 \text{ seg.}$$

**a) Calcular el tiempo de vuelo del proyectil.**

Con el  $t_{max}$  hallamos el tiempo de vuelo

$$t_{vuelo} = 2 * t_{max}$$

$$t_{vuelo} = 2 * 6,928 \text{ seg.}$$

$$\mathbf{t_{vuelo} = 13,856 \text{ seg.}}$$

**b) Cual es el alcance máximo horizontal.**

Datos del problema  $V_o = 80 \text{ m/seg. } \theta = 60^\circ$

$$V_{Ox} = V_O \cos \theta$$

$$V_{Ox} = 80 * \cos 60$$

$$V_{Ox} = 80 * (0,5)$$

$$\mathbf{V_x = V_{Ox} = 40 \text{ m/seg.}}$$

Como  $V_x = V_{Ox} = 40 \text{ m/seg.}$  es constante en todo el recorrido del proyectil.

$$t_{\text{vuelo}} = 13,856 \text{ seg.}$$

$$X = V_x * t_{\text{vuelo}} = 40 * 13,856 = 554,24 \text{ metros.}$$

$$\mathbf{X = 554,24 \text{ metros.}}$$

**c) Cual es el desplazamiento vertical y horizontal al cabo de 5 seg.**

Para el desplazamiento vertical es necesario evaluar si a los 5 seg., el movimiento del proyectil va bajando o subiendo.

Para determinar el signo de la ecuación, se compara el valor de  $t_{\text{max}} = 6,928 \text{ seg.}$  (**Ver grafica**) Esto nos indica que a los 5 seg. el proyectil va subiendo ( - ↑ ) luego la ecuación es negativa

$$Y = V_{OY} * t - \frac{g * t^2}{2}$$

$$Y = V_{OY} * t - \frac{g * t^2}{2} = 69,28 * (5) - \frac{10 * (5)^2}{2}$$

$$Y = 346,4 - 125 = 221,4 \text{ metros}$$

$$\mathbf{Y = 221,4 \text{ metros}} \quad (\text{Alcance vertical a los 5 seg.})$$

$$X = V_x * t = 40 * 5 = 200 \text{ metros}$$

$$\mathbf{X = 200 \text{ metros}} \quad (\text{Alcance horizontal a los 5 seg.})$$

**d) Que magnitud y dirección tiene la velocidad del proyectil a los 5 seg.**

$$V_Y = V_{OY} - gt \quad \text{pero: } V_{OY} = 69,28 \text{ m/seg.}$$

$$V_Y = 69,28 - 10 * 5$$

$$\mathbf{V_Y = 19,28 \text{ m/seg.}}$$

La velocidad horizontal ( $V_x$ ) al cabo de 5 seg. es la misma que  $V_{Ox} = 40 \text{ m/seg.}$  Por que la velocidad en este sentido permanece constante a través de todo el recorrido.

Para hallar la magnitud de la velocidad al cabo de 5 seg.

$$\text{Pero: } V_x = V_{Ox} = 40 \text{ m/seg.} \quad V_Y = 19,28 \text{ m/seg.}$$

$$V = \sqrt{(V_X)^2 + (V_Y)^2} = \sqrt{(40)^2 + (19,28)^2} = \sqrt{1600 + 371,71} = 44,4 \text{ m/seg}$$

$$\mathbf{V = 44,4 \text{ m/seg.}}$$

$$\text{tg } \beta = \frac{V_Y}{V_X} = \frac{19,28}{40} = 0,482$$

$$\beta = \text{arc tg } 0,482$$

$$\mathbf{\beta = 25,734^\circ}$$

**e) En que instante de tiempo y a que altura la componente vertical de la velocidad se anula.**

La velocidad vertical se hace cero, cuando alcanza la máxima altura.

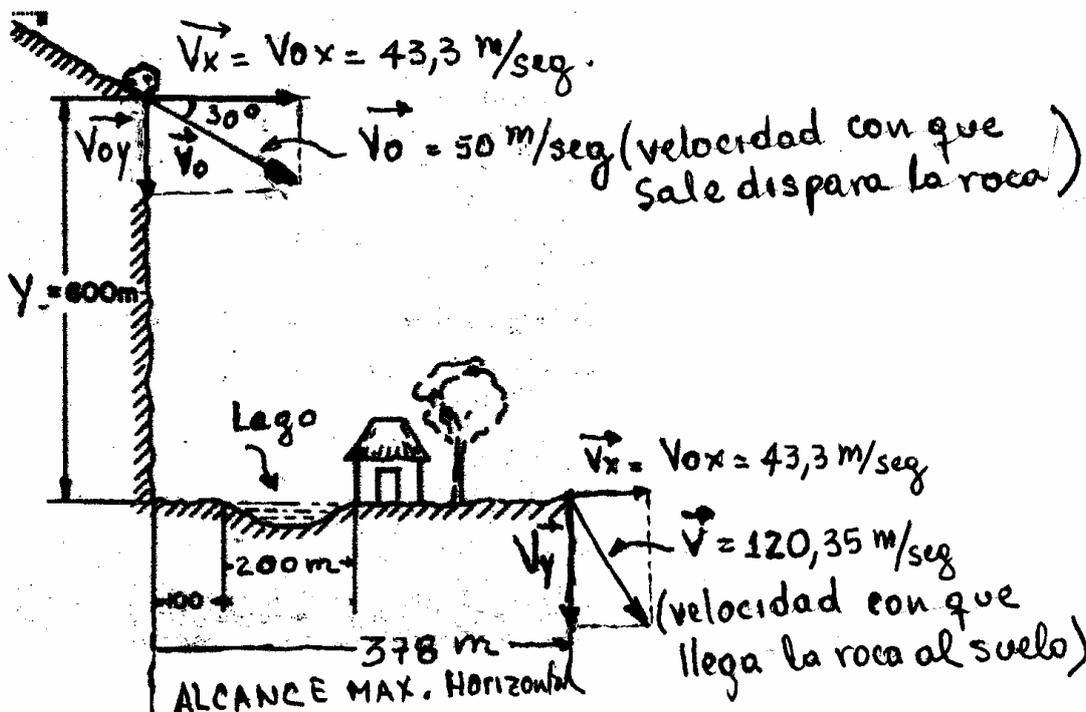
$$t_{\max} = \frac{V_{OY}}{g} = \frac{69,28 \text{ m/seg}}{10 \text{ m/seg}^2} = 6,928 \text{ seg.}$$

$$Y_{\max} = \frac{(V_{OY})^2}{2g} = \frac{(69,28)^2}{2 \cdot 10} = \frac{4799,71 \text{ m}^2/\text{seg}^2}{20} = 239,98 \text{ metros}$$

#### PROBLEMA 14

Una roca descansa sobre un barranco 600 metros por encima de una casa, tal como se muestra en la figura. En tal posición que si rodase, saldría disparada con una rapidez de 50 m/seg. Existe un lago de 200 metros de diámetro. Con uno de sus bordes a 100 metros del borde del barranco. La casa esta junto a la laguna en el otro borde.

- Si la roca se desprendiera del barranco cuanto tiempo permanecería en el aire antes de caer al suelo?
- Caerá la roca en la laguna
- Hallar la rapidez de la roca al llegar al suelo y la rapidez horizontal en ese momento.



Datos del problema.

$$Y = 600 \text{ metros} \quad V_0 = 50 \text{ m/seg.} \quad \theta = 30^\circ$$

$$V_{OY} = V_0 \text{ sen } \theta$$

$$V_{OY} = 50 \text{ sen } 30$$

$$V_{OY} = 50 (0,5)$$

$V_{OY} = 25 \text{ m/seg}$ . Es la velocidad inicial en el eje Y, sirve para hallar el tiempo.

- Si la roca se desprendiera del barranco cuanto tiempo permanecería en el aire antes de caer al suelo?

La ecuación para hallar Y es positiva por que la roca va bajando.

$$Y = V_{OY} \cdot t + \frac{g \cdot t^2}{2}$$

$$600 = 25 * t + \frac{10 * t^2}{2} = 25t + 5t^2$$

$$5t^2 + 25t - 600 = 0 \text{ (Simplificando la ecuación por 5)}$$

$$t^2 + 5t - 120 = 0 \text{ pero } a = 1 \quad b = 5 \quad c = -120$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(5) \pm \sqrt{5^2 - 4 * 1 * (-120)}}{2 * 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 480}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{505}}{2} = \frac{-5 \pm 22,4722}{2}$$

$$t = \frac{-5 + 22,4722}{2} = \frac{17,4722}{2} = 8,73 \text{ seg}$$

$$t = 8,73 \text{ seg}$$

### b) Caerá la roca en la laguna?

Datos del problema.  $Y = 600$  metros  $V_0 = 50$  m/seg.  $\theta = 30^\circ$

El alcance máximo horizontal.

$$V_{Ox} = V_0 \cos \theta$$

$$V_{Ox} = 50 * \cos 30$$

$$V_{Ox} = 50 * (0,866)$$

$$V_x = V_{Ox} = 43,3 \text{ m/seg.}$$

Como  $V_x = V_{Ox} = 43,3$  m/seg. es constante en todo el recorrido del proyectil.

$$t_{\text{vuelo}} = 8,73 \text{ seg.}$$

$$X = V_x * t_{\text{vuelo}} = 43,3 * 8,73 = 378 \text{ metros.}$$

**X = 378 metros Si observamos la grafica, la roca no cae dentro de la laguna.**

### c) Hallar la rapidez de la roca al llegar al suelo y la rapidez horizontal en ese momento.

Pero:  $V_x = V_{Ox} = 43,3$  m/seg.

La ecuación para hallar  $V_y$  es positiva por que la roca va bajando.

$$V_y = V_{Oy} + gt \quad \text{pero: } V_{Oy} = 25 \text{ m/seg.}$$

$$V_y = 25 + 10 * 8,73$$

$$V_y = 112,3 \text{ m/seg.}$$

$$V = \sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2} = \sqrt{(43,3)^2 + (112,3)^2} = \sqrt{1874,89 + 12611,29} = \sqrt{14486,18} \text{ m/seg}$$

**V = 120,35 m/seg. (Velocidad con que llega la roca al suelo)**

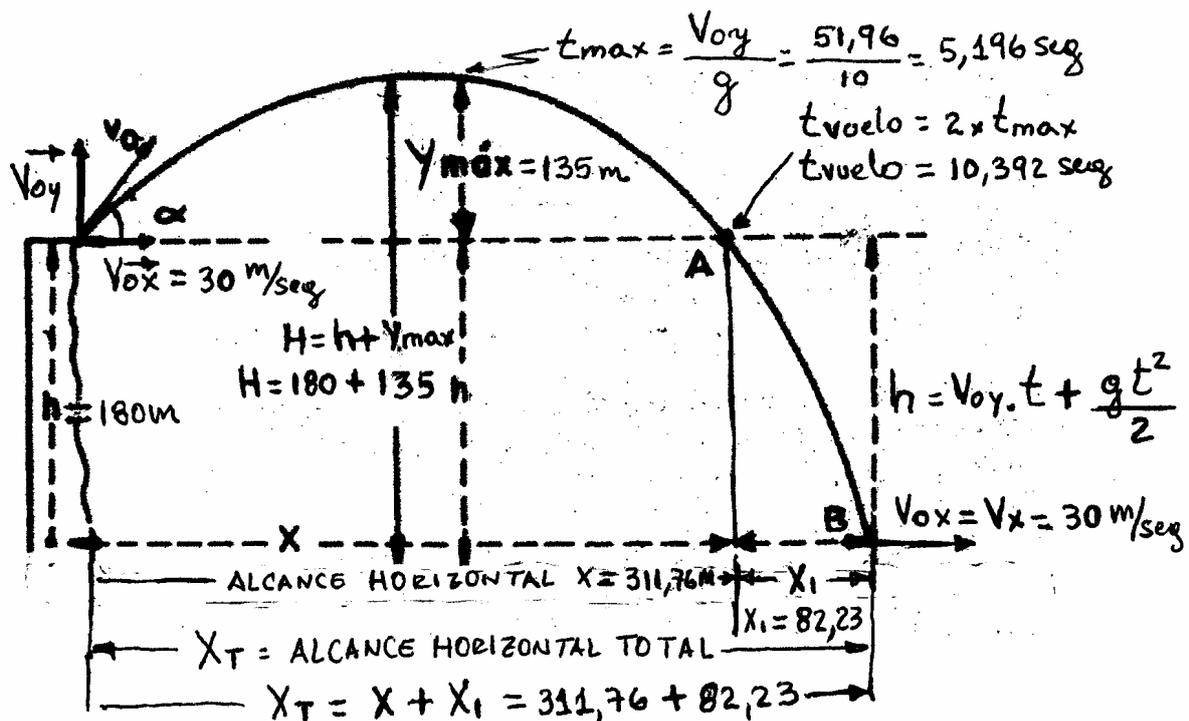
Como  $V_x = V_{Ox} = 43,3$  m/seg. es constante en todo el recorrido del proyectil. Es la velocidad horizontal.

### PROBLEMA 15

Se dispara un proyectil desde la cima de una montaña a 180 metros por encima del valle, tal como se indica en la figura. El modulo de su velocidad inicial es 60 m/seg a  $60^\circ$  respecto a la horizontal

a) Cual es la máxima altura respecto al valle

b) Donde caerá el proyectil



Datos del problema

$$V_0 = 60 \text{ m/seg.}$$

$h$  altura de la montaña = 180 metros

$$\theta = 60^\circ$$

a) Cual es la máxima altura respecto al valle (H) (ver grafica)

$$H = h + Y_{max} \text{ pero } h = 180 \text{ metros}$$

$$V_{0y} = V_0 \text{ sen } \theta$$

$$V_{0y} = 60 \text{ sen } 60$$

$$V_{0y} = 60 (0,866)$$

$V_{0y} = 51,96 \text{ m/seg.}$  Es la velocidad inicial en el eje Y, sirve para hallar el  $Y_{max}$

Hallamos  $Y_{max}$

$$Y_{max} = \frac{(V_{0y})^2}{2g} = \frac{(51,96)^2}{2 \cdot 10} = \frac{2700 \text{ m}^2/\text{seg}^2}{20} = \frac{2700}{20} = 135 \text{ metros}$$

$Y_{MAX} = 135 \text{ metros}$

$$H = h + Y_{max} \text{ pero } h = 180 \text{ metros}$$

$$H = 180 + 135 = 315 \text{ metros}$$

$H = 315 \text{ metros}$  (Altura respecto al valle)

b) Donde caerá el proyectil ( $X_T$ ) ?

Para hallar el alcance horizontal, es necesario calcular el tiempo de vuelo y la velocidad horizontal en el eje X.

$$t_{max} = \frac{V_{0y}}{g} = \frac{51,96 \text{ m/seg}}{10 \text{ m/seg}^2} = 5,196 \text{ seg.}$$

Con el  $t_{\max}$  hallamos el tiempo de vuelo

$$t_{\text{vuelo}} = 2 * t_{\max}$$

$$t_{\text{vuelo}} = 2 * 5,196 \text{ seg.}$$

$$t_{\text{vuelo}} = \mathbf{10,392 \text{ seg. (ver grafica)}}$$

El alcance máximo horizontal del tiro parabólico (X)

Datos del problema  $V_0 = 60 \text{ m/seg. } \theta = 60^\circ$

$$V_{0X} = V_0 \cos \theta$$

$$V_{0X} = 60 * \cos 60$$

$$V_{0X} = 60 * (0,5)$$

$$\mathbf{V_X = V_{0X} = 30 \text{ m/seg.}}$$

$$X = V_X * t_{\text{vuelo}} = 30 * 10,392 = 311.76 \text{ metros. (ver grafica)}$$

$$\mathbf{X = 311.76 \text{ metros.}}$$

La ecuación para hallar  $h = 180$  metros es positiva por que la roca va bajando.

$$h = V_{0Y} * t + \frac{g * t^2}{2}$$

$$180 = 51,96 * t + \frac{10 * t^2}{2} = 51,96t + 5t^2$$

$$5t^2 + 51,96t - 180 = 0 \quad \text{pero } a = 5 \quad b = 51,96 \quad c = -180$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(51,96) \pm \sqrt{51,96^2 - 4 * 5 * (-180)}}{2 * 5} = \frac{-51,96 \pm \sqrt{2699,84 + 3600}}{10}$$

$$t = \frac{-51,96 + \sqrt{6300}}{10} = \frac{-51,96 + 79,37}{10} = \frac{27,41}{10} = 2,741 \text{ seg.}$$

$t = \mathbf{2,741 \text{ seg.}}$  Es el tiempo que transcurre desde el punto A hasta el punto B. (ver grafica)

$$X_1 = V_X * t = 30 * 2,741 = 82,23 \text{ metros.}$$

$$\mathbf{X_1 = 82,23 \text{ metros.}}$$

El desplazamiento total pero:  $X = 311.76$  metros.

$$X_T = X + X_1 = 311,76 + 82,23 = 394 \text{ metros}$$

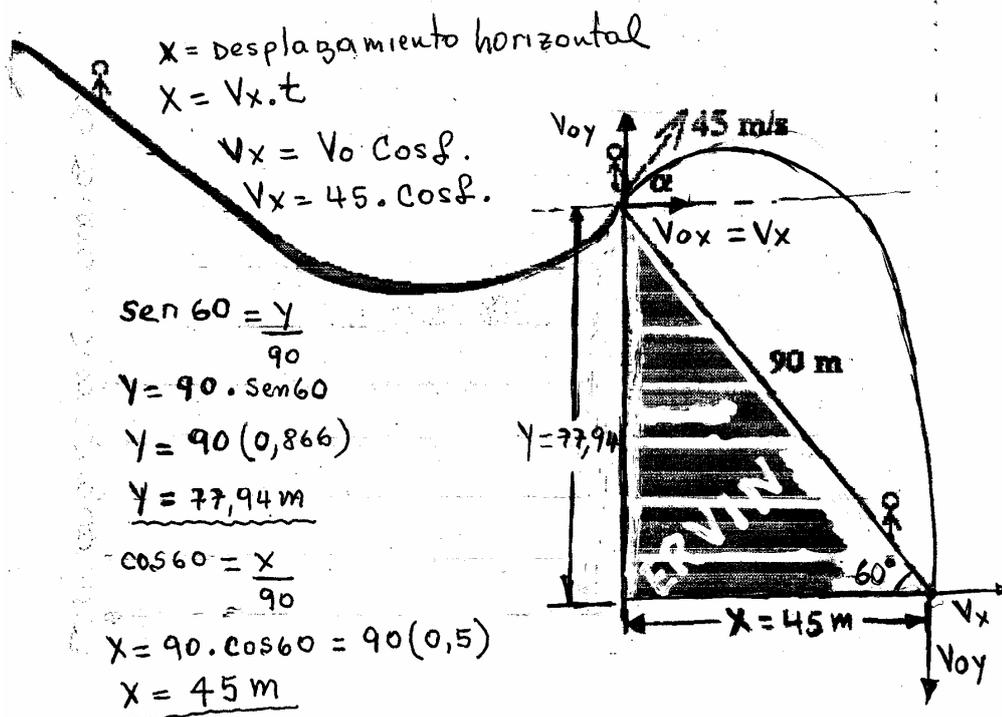
$$\mathbf{X_T = 394 \text{ metros}}$$

### PROBLEMA 16

Un patinador desciende por una pista helada, alcanza al finalizar la pista una velocidad de 45 m/seg. En una competición de salto, debería alcanzar 90 metros a lo largo de una pista inclinada  $60^\circ$  respecto a la horizontal.

Cual será el ángulo o los ángulos  $\alpha$  que debe formar su vector velocidad con la horizontal?

Cuanto tiempo tardara en aterrizar?



Datos del problema:

$v_0 = 45 \text{ m/seg.}$

$X = \text{ALCANCE HORIZONTAL}$

$X = v_x \cdot t$  pero  $X = 45 \text{ metros}$

$X = (v_0 \cos \alpha) t$

$t = \frac{X}{v_0 \cos \alpha} = \frac{45}{45 \cos \alpha}$

$t = \frac{1}{\cos \alpha}$  **(Ecuación 1)**

Pero:

$Y = v_{0Y} \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$

$Y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$  **(Ecuación 2)**

Reemplazando la ecuación 1 en la ecuación 2.

$Y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$

$Y = v_0 \sin \alpha \cdot \left( \frac{1}{\cos \alpha} \right) - \frac{g \cdot \left( \frac{1}{\cos \alpha} \right)^2}{2}$

$Y = \frac{v_0 \sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{g}{2 (\cos \alpha)^2}$

$$-77,94 = (45) * \operatorname{tg} \alpha - \frac{10}{2 (\cos \alpha)^2} = 45 \operatorname{tg} \alpha - \frac{5}{(\cos \alpha)^2}$$

pero:

$$\frac{1}{(\cos \alpha)^2} = (\sec \alpha)^2$$

$$-77,94 = 45 \operatorname{tg} \alpha - 5(\sec \alpha)^2$$

pero:  $(\sec \alpha)^2 = (\operatorname{tg} \alpha)^2 + 1$

$$-77,94 = 45 \operatorname{tg} \alpha - 5[(\operatorname{tg} \alpha)^2 + 1]$$

$$-77,94 = 45 \operatorname{tg} \alpha - 5(\operatorname{tg} \alpha)^2 - 5$$

Ordenando la ecuación

$$5(\operatorname{tg} \alpha)^2 - 45 \operatorname{tg} \alpha + 5 - 77,94 = 0$$

$$5(\operatorname{tg} \alpha)^2 - 45 \operatorname{tg} \alpha - 72,94 = 0$$

pero:  $a = 5$   $b = -45$   $c = -72,94$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-45) \pm \sqrt{(-45)^2 - 4 * 5 * (-72,94)}}{2 * 5} = \frac{45 \pm \sqrt{2025 + 1458,8}}{10}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{45 \pm \sqrt{3483,8}}{10} = \frac{45 \pm 59,023}{10}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{45 + 59,023}{10} = 10,4023$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{45 - 59,023}{10} = -1,4023$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 10,4023$$

$$t = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos 84,5} = 10,43 \text{ seg.}$$

$$\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 10,4023$$

$$\alpha = 84,5^\circ$$

$$\operatorname{tg} \beta = -1,4023$$

$$t = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos -54,5} = 1,72 \text{ seg.}$$

$$\beta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} -1,4023$$

$$\beta = -54,5^\circ$$

### Problema 17

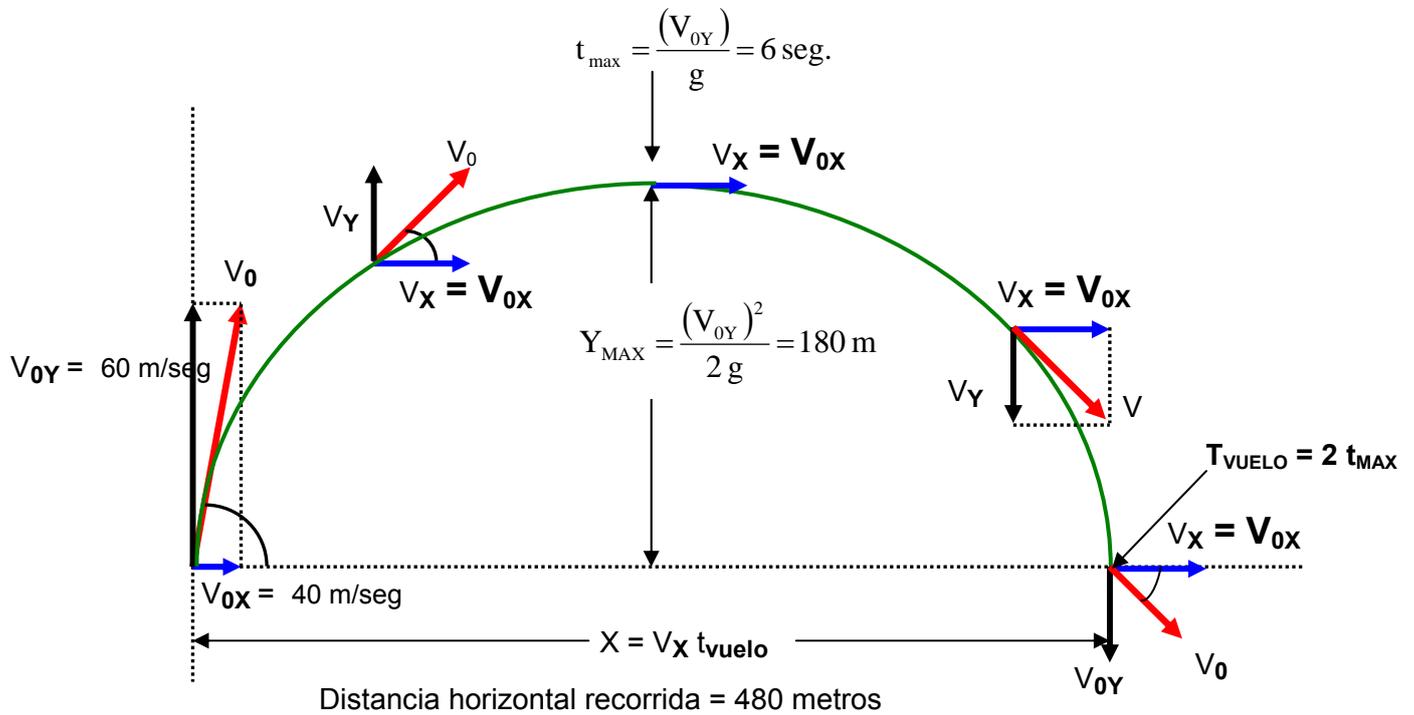
Se lanza un cuerpo desde el origen con velocidad horizontal de 40 m/s, y con una velocidad vertical hacia arriba de 60 m/s. Calcular la máxima altura y el alcance horizontal.

$$V_{0y} = 60 \text{ m/seg.}$$

$$V_{0x} = V_x = 40 \text{ m/seg.}$$

$$Y_{\text{max}} = \frac{(V_{0y})^2}{2g} = \frac{60^2}{2 \cdot 10} = \frac{3600}{20} = 180 \text{ metros}$$

máxima altura 180 metros



$$t_{\text{max}} = \frac{V_{0y}}{g} = \frac{60}{10} = 6 \text{ seg.}$$

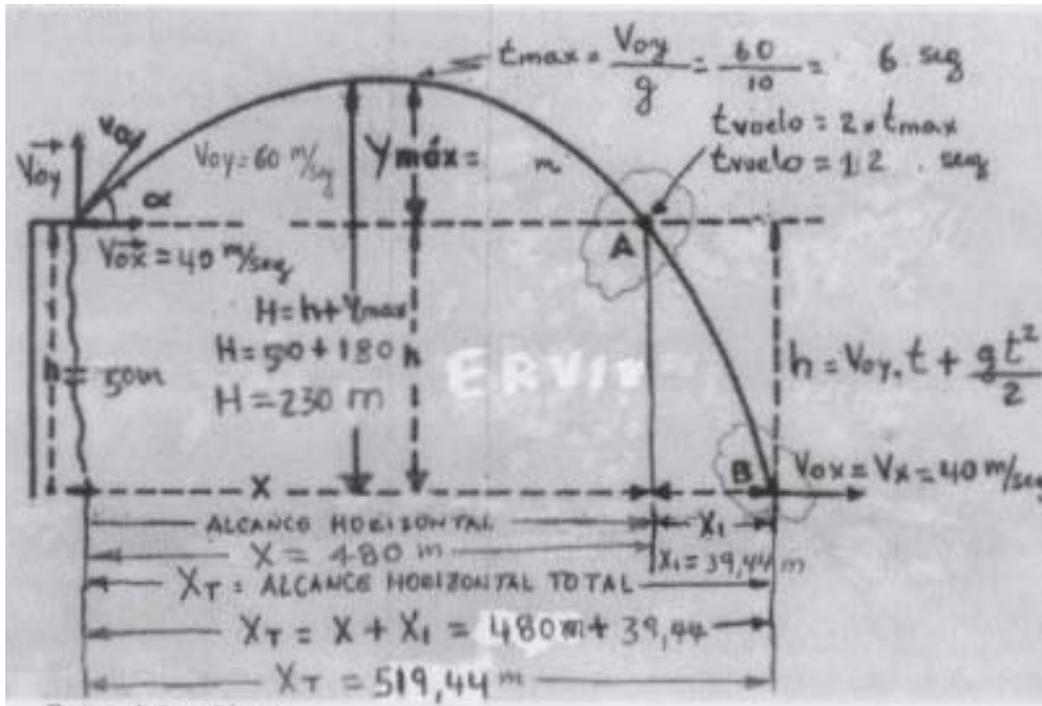
$$t_{\text{vuelo}} = 2 * t_{\text{max}} = 2 * 6 = 12 \text{ seg}$$

$$X = V_x * t_{\text{vuelo}} = 40 \text{ m/seg.} * 12 \text{ seg} = 480 \text{ metros}$$

**X = El alcance horizontal es 480 metros.**

### Problema 18

Resolver el ejercicio anterior, tomando como lugar de lanzamiento la cima de una colina de 50 m de altura.



Calcular la máxima altura y el alcance horizontal.

Datos del problema

$$V_{0x} = V_x = 40 \text{ m/seg.}$$

$$V_{0y} = 60 \text{ m/seg.}$$

$h$  altura de la colina = 50 metros

Cual es la máxima altura respecto al valle ( $H$ )

$$H = h + Y_{\max} \text{ pero } h = 50 \text{ metros}$$

$V_{0y} = 60 \text{ m/seg.}$  Es la velocidad inicial en el eje  $Y$ , sirve para hallar el  $Y_{\max}$

Hallamos  $Y_{\max}$

$$Y_{\max} = \frac{(V_{0y})^2}{2g} = \frac{(60)^2}{2g} = \frac{3600 \text{ m}^2/\text{seg}^2}{2 * 10 \text{ m/seg}^2} = \frac{3600}{20} = 180 \text{ metros}$$

$$H = h + Y_{\max} = 50 + 180 = 230 \text{ metros}$$

**$H = 230 \text{ metros MAXIMA ALTURA}$**

Donde caerá el proyectil ( $X_T$ ) ?

Para hallar el alcance horizontal, es necesario calcular el tiempo de vuelo y la velocidad horizontal en el eje  $X$ .

$$t_{\max} = \frac{V_{0y}}{g} = \frac{60 \text{ m/seg}}{10 \text{ m/seg}^2} = 6 \text{ seg.}$$

Con el  $t_{\max}$  hallamos el tiempo de vuelo

$$t_{\text{vuelo}} = 2 * t_{\max}$$

$$t_{\text{vuelo}} = 2 * 6 \text{ seg.}$$

$$t_{\text{vuelo}} = 12 \text{ seg.}$$

El alcance máximo horizontal del tiro parabólico (X)

Datos del problema  $V_{0x} = V_x = 40 \text{ m/seg.}$   $V_{0y} = 60 \text{ m/seg.}$

$$X = V_x * t_{\text{vuelo}} = 40 * 12 = 480 \text{ metros. (ver grafica)}$$

**X = 480 metros.**

La ecuación para hallar  $h = 50$  metros es positiva por que la roca va bajando.

$$h = V_{0Y} * t + \frac{g * t^2}{2}$$

$$50 = 60 * t + \frac{10 * t^2}{2} = 60t + 5t^2$$

$$5t^2 + 60t - 50 = 0 \quad \text{pero } a = 5 \quad b = 60 \quad c = -50$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(60) \pm \sqrt{60^2 - 4 * 5 * (-50)}}{2 * 5} = \frac{-60 \pm \sqrt{3600 + 1000}}{10}$$

$$t = \frac{-60 + \sqrt{4600}}{10} = \frac{-51,96 + 61,82}{10} = \frac{9,86}{10} = 0,986 \text{ seg.}$$

$t = 0,986 \text{ seg.}$  Es el tiempo que transcurre desde el punto A hasta el punto B. (ver grafica)

$$X_1 = V_x * t = 40 * 0,986 = 39,44 \text{ metros.}$$

**X<sub>1</sub> = 39,44 metros.**

ALCANCE HORIZONTAL TOTAL (X<sub>T</sub>) pero: X = 480 metros.

$$X_T = X + X_1 = 480 + 39,44 = 519,44 \text{ metros}$$

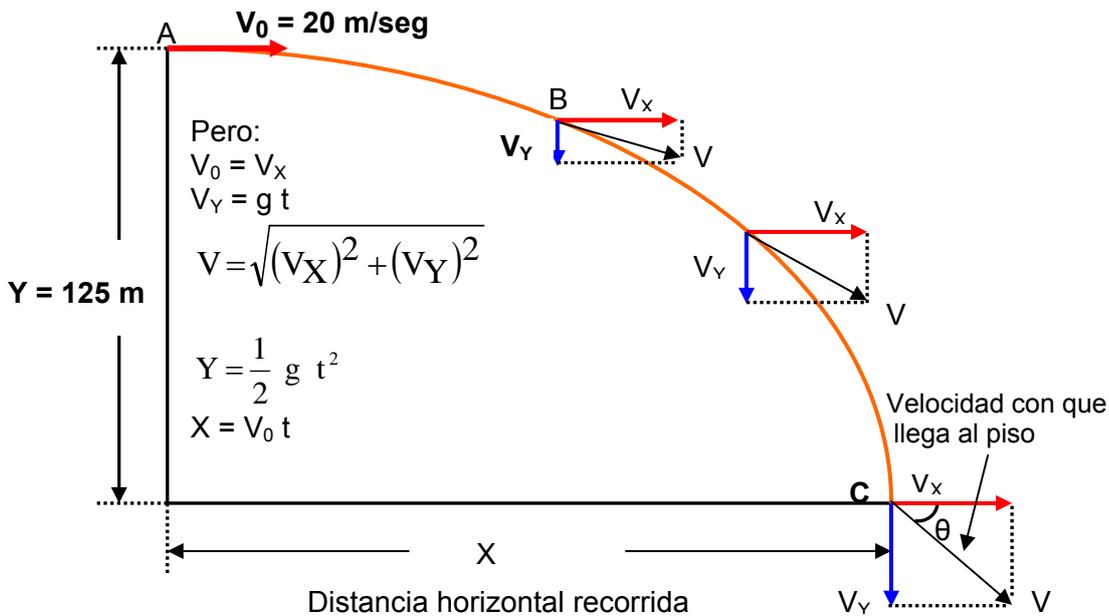
**X<sub>T</sub> = 519,44 metros MAXIMO ALCANCE HORIZONTAL**

**PROBLEMAS ADICIONALES SOBRE MOVIMIENTO DE UN CUERPO LANZADO HORIZONTALMENTE**

**PROBLEMA 19**

Desde la azotea de un edificio de 125 metros de altura se lanza un objeto horizontalmente con una velocidad de 20 m/seg. Calcular:

- a) Tiempo empleado en caer. Rta.  $t = 5$  seg.  
 b) Velocidad con que llega a la tierra. Rta.  $V = 53,85$  m/seg.  
 c) Distancia horizontal recorrida. Rta.  $X = 100$  metros



$V_0 = V_x = 20$  m/seg  
 $Y = 125$  metros

**a) Tiempo empleado en caer.**

$$Y = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 2Y = g t^2$$

$$\frac{2Y}{g} = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2Y}{g}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2Y}{g}} = \sqrt{\frac{2 * 125}{10}} = \sqrt{\frac{250}{10}} = \sqrt{25} = 5 \text{ seg.}$$

**t = 5 seg.**

**b) Velocidad con que llega a la tierra.**

$$V_0 = V_x = 20 \text{ m/seg} \quad V_y = g * t = 10 \text{ m/seg}^2 * 5 \text{ seg} = 50 \text{ m/seg}$$

$$V = \sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2} = \sqrt{(20)^2 + (50)^2} = \sqrt{400 + 2500} = \sqrt{2900} = 53,85 \text{ m/seg}$$

**c) Distancia horizontal recorrida.**

$$X = V_x * t = 20 \text{ m/seg} * 5 \text{ seg} = 100 \text{ metros} \quad \text{MAXIMO ALCANCE HORIZONTAL}$$

### PROBLEMA 20

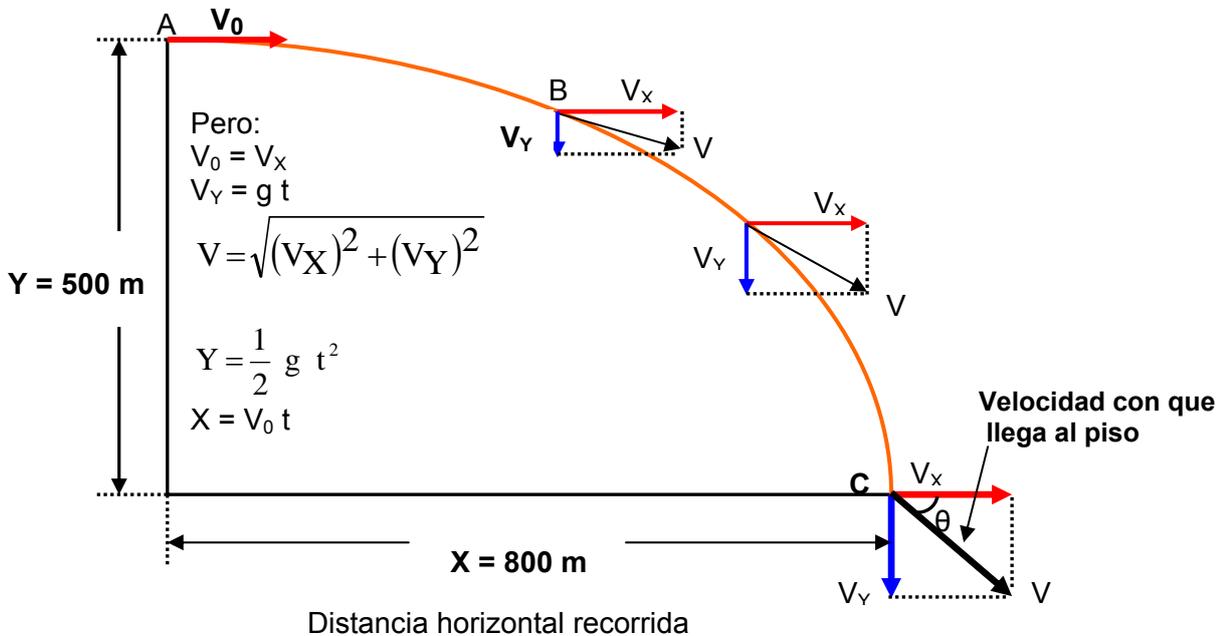
Un avión vuela horizontalmente a 500 m de altura y deja caer un objeto. Si hasta llegar a tierra el objeto recorre horizontalmente 800 m, hallar:

a) Con que velocidad vuela el avión. Rta.  $V_x = 80$  m/seg.

b) Con qué velocidad choca el objeto. Rta.  $V = 128$  m/seg.

c) Cuanto tiempo emplea en caer. Rta.  $t = 10$  seg.

$Y = 500$  metros     $X = 800$  metros



Cuanto tiempo emplea en caer.

$$Y = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 2Y = g t^2$$

$$\frac{2Y}{g} = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2Y}{g}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2Y}{g}} = \sqrt{\frac{2 * 500}{10}} = \sqrt{\frac{1000}{10}} = \sqrt{100} = 10 \text{ seg.}$$

**t = 10 seg. Tiempo empleado en caer.**

a) Con que velocidad vuela el avión.

$$X = V_x * t \Rightarrow V_x = \frac{X}{t} = \frac{800}{10} = 80 \text{ m/seg}$$

$$V_0 = V_x = 80 \text{ m/seg}$$

b) Con qué velocidad choca el objeto.

$$V_0 = V_x = 80 \text{ m/seg} \quad V_y = g * t = 10 \text{ m/seg}^2 * 10 \text{ seg} = 100 \text{ m/seg}$$

$$V = \sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2} = \sqrt{(80)^2 + (100)^2} = \sqrt{6400 + 10000} = \sqrt{16400}$$

**V = 128,06 m/seg.**

### PROBLEMA 21

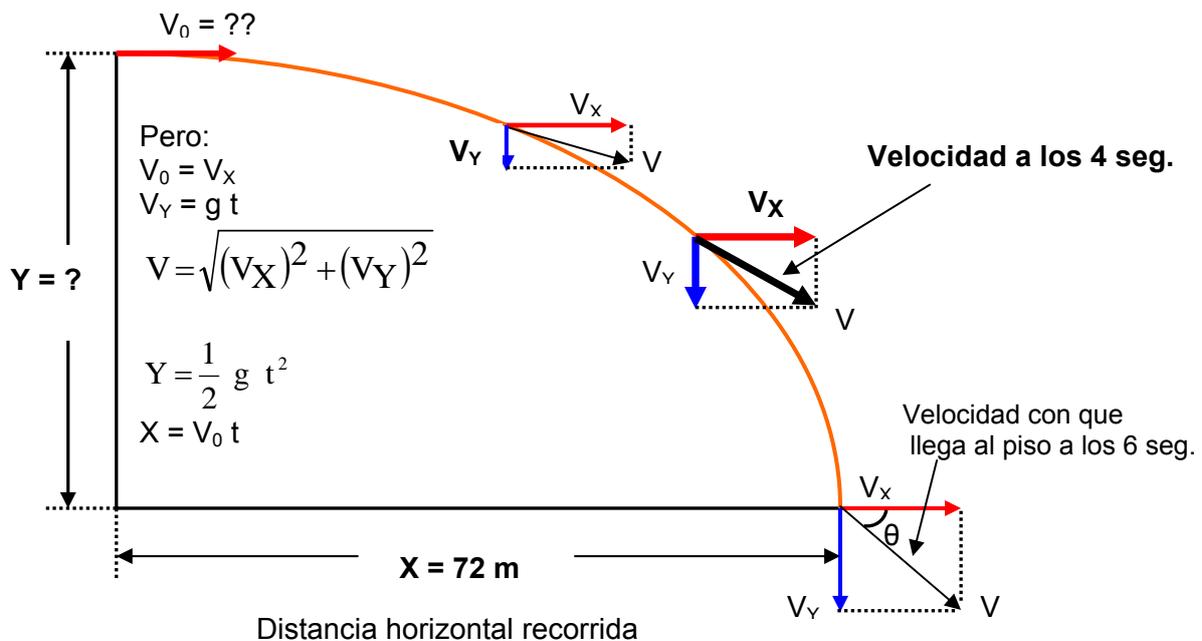
Un objeto se lanza horizontalmente desde cierta altura. Si en llegar a tierra gasta 6 seg. y recorre horizontalmente 72 metros. Calcular:

a) Desde que altura se lanza. Rta.  $Y = 180$  metros

b) Cual es la velocidad horizontal Rta.  $V_0 = V_X = 12$  m/seg

c) Que velocidad tiene a los 4 segundos. Rta.  $V = 41,76$  m/seg.

$t$  (vuelo) = 6 seg.  $X = 72$  metros.



a) Desde que altura se lanza.

$$Y = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} * 10 * 6^2 = \frac{10 * 36}{2} = 180 \text{ metros}$$

**$Y = 180$  metros**

b) Cual es la velocidad horizontal

$$X = V_X * t \Rightarrow$$

$$V_X = \frac{X}{t} = \frac{72}{6} = 12 \text{ m/seg}$$

$$V_0 = V_X = 12 \text{ m/seg}$$

c) Que velocidad tiene a los 4 segundos.

$$V_0 = V_X = 12 \text{ m/seg} \quad V_y = g * t = 10 \text{ m/seg}^2 * 4 \text{ seg} = 40 \text{ m/seg}$$

$$V = \sqrt{(V_X)^2 + (V_y)^2} = \sqrt{(12)^2 + (40)^2} = \sqrt{144 + 1600} = \sqrt{1744}$$

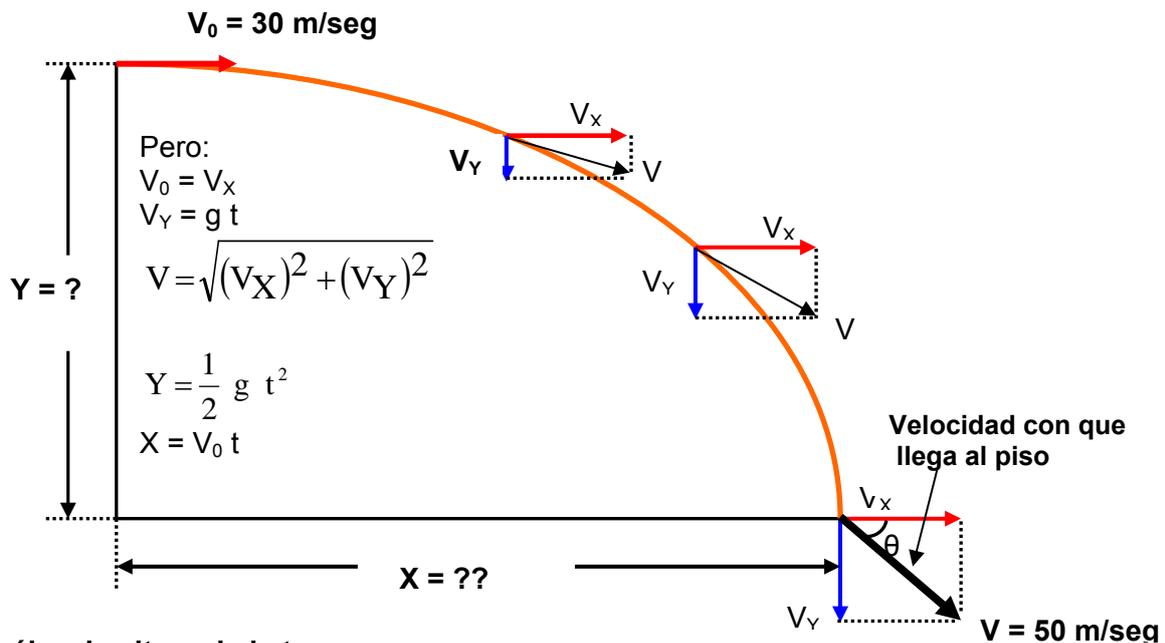
**$V = 41,76$  m/seg.**

### PROBLEMA 22

De arriba de una torre se lanza horizontalmente una piedra, con velocidad de 30 m/seg. La piedra alcanza el suelo con velocidad de 50 m/seg.

a) Cuál es la altura de la torre. Rta.  $Y = 80$  metros

- b) Cuanto recorre horizontalmente la piedra. Rta.  $X = 120$  metros  
 c) Escriba las ecuaciones cinemáticas del movimiento. Rta.  $X = 30 t$ ;  $v_x = 30$ ;  $y = -5t^2$ ;  $v = -10 t$ .



a) Cuál es la altura de la torre.

$V_0 = V_X = 30 \text{ m/seg}$     $V = 50 \text{ m/seg}$ .

$$V = \sqrt{(V_X)^2 + (V_Y)^2} \Rightarrow V^2 = (V_X)^2 + (V_Y)^2$$

$$V^2 - (V_X)^2 = (V_Y)^2$$

$$V_Y = \sqrt{V^2 - (V_X)^2} = \sqrt{(50)^2 - (30)^2} = \sqrt{2500 - 900} = \sqrt{1600}$$

$V_Y = 40 \text{ m/seg}$ .

Pero

$$V_Y = g * t$$

Hallamos el tiempo

$$t = \frac{V_Y}{g} = \frac{40 \text{ m/seg}}{10 \text{ m/seg}^2} = 4 \text{ seg}$$

$$Y = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} * 10 * 4^2 = \frac{10 * 16}{2} = 80 \text{ metros}$$

**Altura de la torre = 80 metros.**

b) Cuanto recorre horizontalmente la piedra. Pero:  $V_0 = V_X = 30 \text{ m/seg}$

$$X = V_X * t = 30 \text{ m/seg} * 4 \text{ seg} = 120 \text{ metros}$$

c) Escriba las ecuaciones cinemáticas del movimiento

$$X = V_X * t \Rightarrow X = 30 t$$

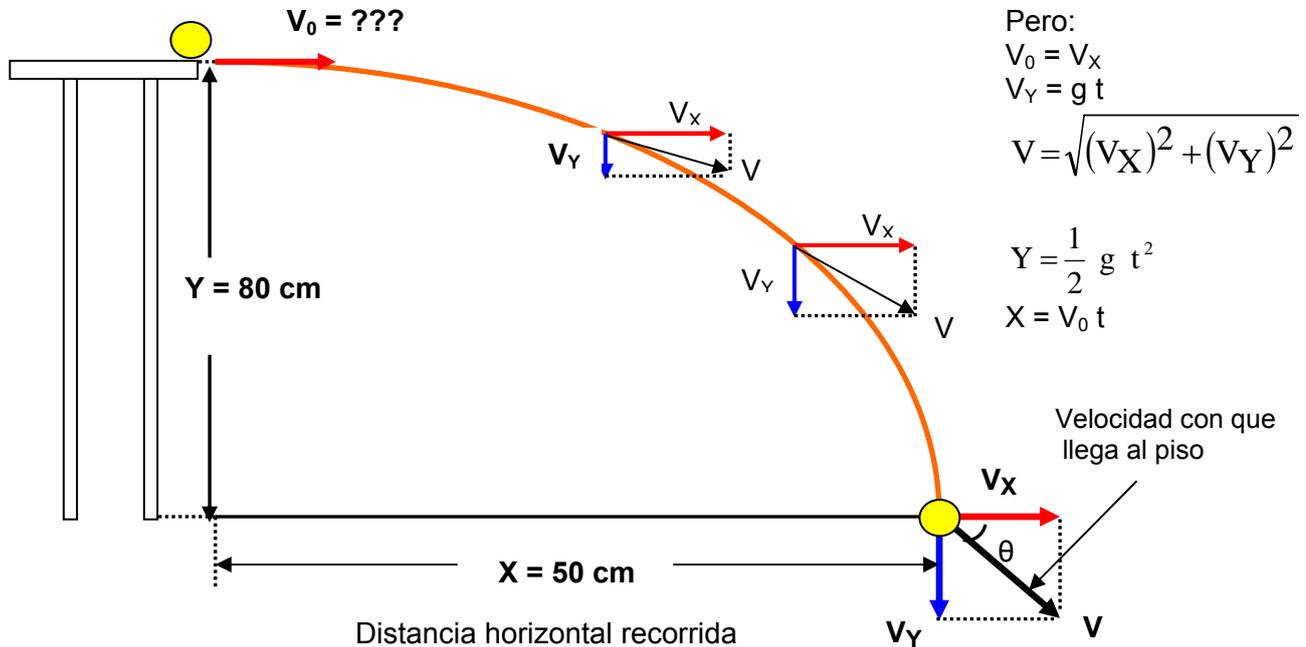
$$V_Y = g * t \rightarrow V_Y = 10 t$$

$$Y = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} * 10 * t^2 = 5t^2 \Rightarrow Y = 5t^2$$

### PROBLEMA 23

Una persona empuja una pelota por una mesa de 80 cm de altura y cae a 50 cm del borde de la mesa, como se observa en la figura. **Con que velocidad horizontal salió la pelota.**

Datos del problema  $Y = 80 \text{ cm} = 0,8 \text{ metros}$   $X = 50 \text{ cm} = 0,5 \text{ metros}$



Hallamos el tiempo de vuelo

$$Y = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 2Y = g * t^2$$

$$\frac{2Y}{g} = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2Y}{g}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2Y}{g}} = \sqrt{\frac{2 * 0,8}{10}} = \sqrt{\frac{1,6}{10}} = \sqrt{0,16} = 0,4 \text{ seg.}$$

**t = 0,4 seg.**

Hallamos la velocidad horizontal

$$X = V_X * t \Rightarrow$$

$$V_X = \frac{X}{t} = \frac{0,5}{0,4} = 1,25 \text{ m/seg}$$

$$V_0 = V_X = 1,25 \text{ m/seg}$$

### PROBLEMA 24

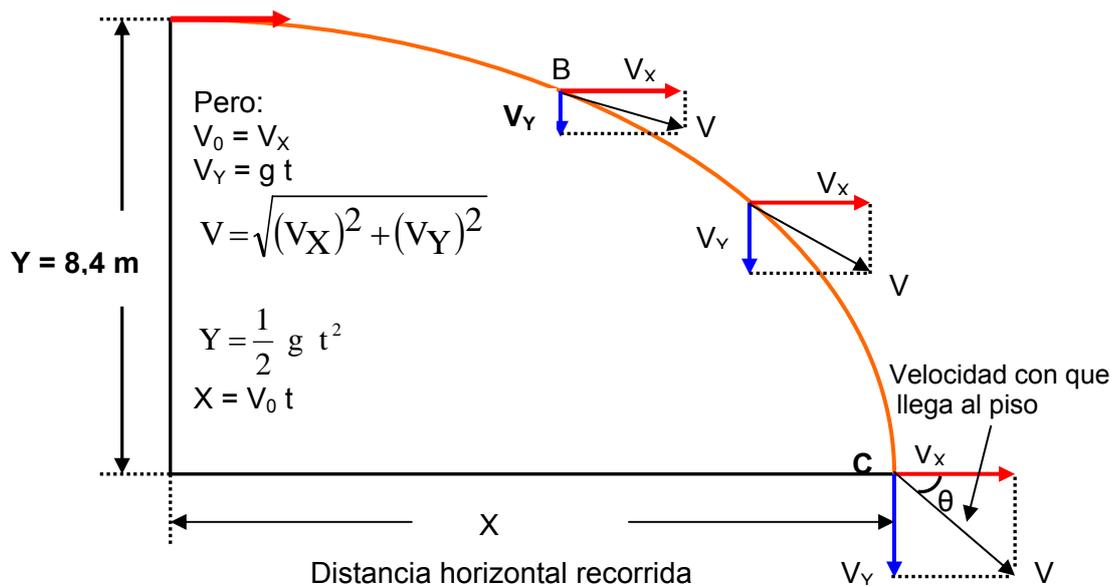
Un carpintero lanza un trozo de madera desde el techo de una casa que esta a 8,4 metros de altura, con una velocidad horizontal  $V_0 = V_X = 6,4 \text{ m/seg}$ .

**Cuanto tiempo tarda en llegar al suelo la madera.**

Datos del problema

$$Y = 8,4 \text{ metros} \quad V_0 = V_X = 6,4 \text{ m/seg}$$

A  **$V_0 = 6,4 \text{ m/seg}$**



$V_0 = V_x = 20 \text{ m/seg}$

Hallamos el tiempo de vuelo

$Y = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 2Y = g * t^2$

$\frac{2Y}{g} = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2Y}{g}}$

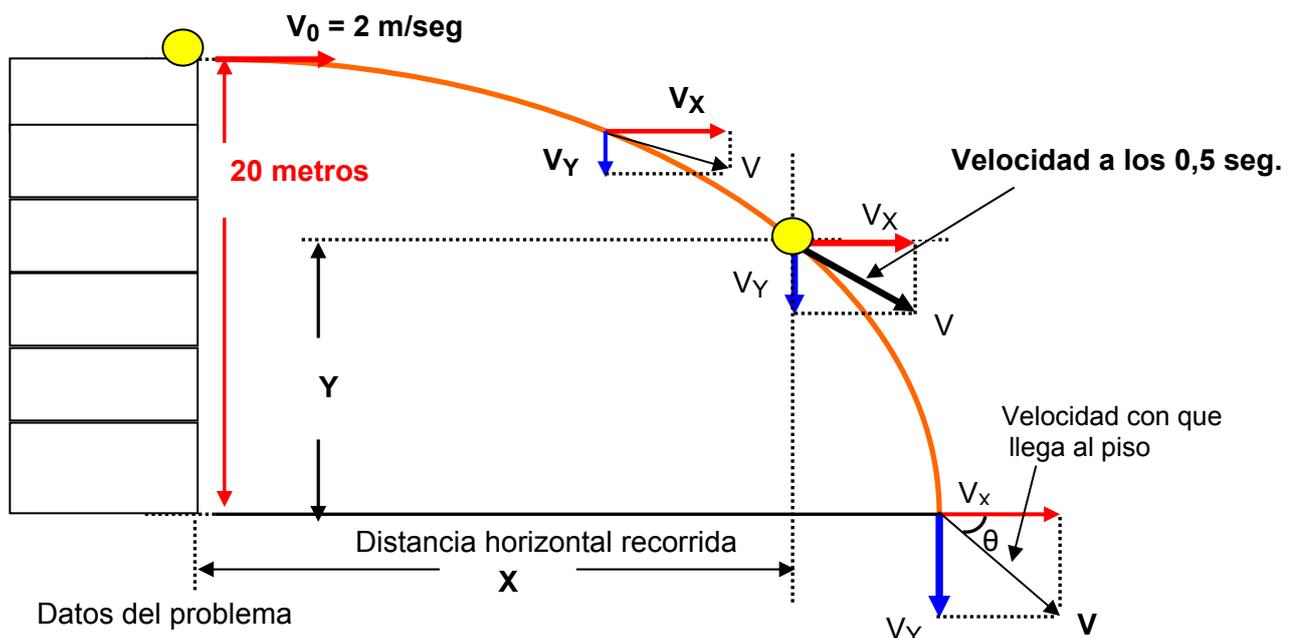
$t = \sqrt{\frac{2Y}{g}} = \sqrt{\frac{2 * 8.4}{10}} = \sqrt{\frac{16.8}{10}} = \sqrt{1.68} = 1.29 \text{ seg.}$

**t = 1,29 seg.**

**PROBLEMA 25**

Desde lo alto de un edificio de 20 metros de altura se lanza horizontalmente una pelota con una velocidad  $V_0 = V_x = 2 \text{ m/seg}$

Cual es la posición de la pelota 0,5 seg. después de ser lanzada.



$$Y = 20 \text{ metros} \quad V_O = V_X = 2 \text{ m/seg}$$

Hallamos la altura que lleva a los 0,5 seg. de vuelo.

$$Y = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} * 10 * 0,5^2 = \frac{10 * 0,25}{2} = 1,25 \text{ metros}$$

$$Y = 1,25 \text{ metros}$$

Hallamos el desplazamiento en el eje X para 0,5 seg.

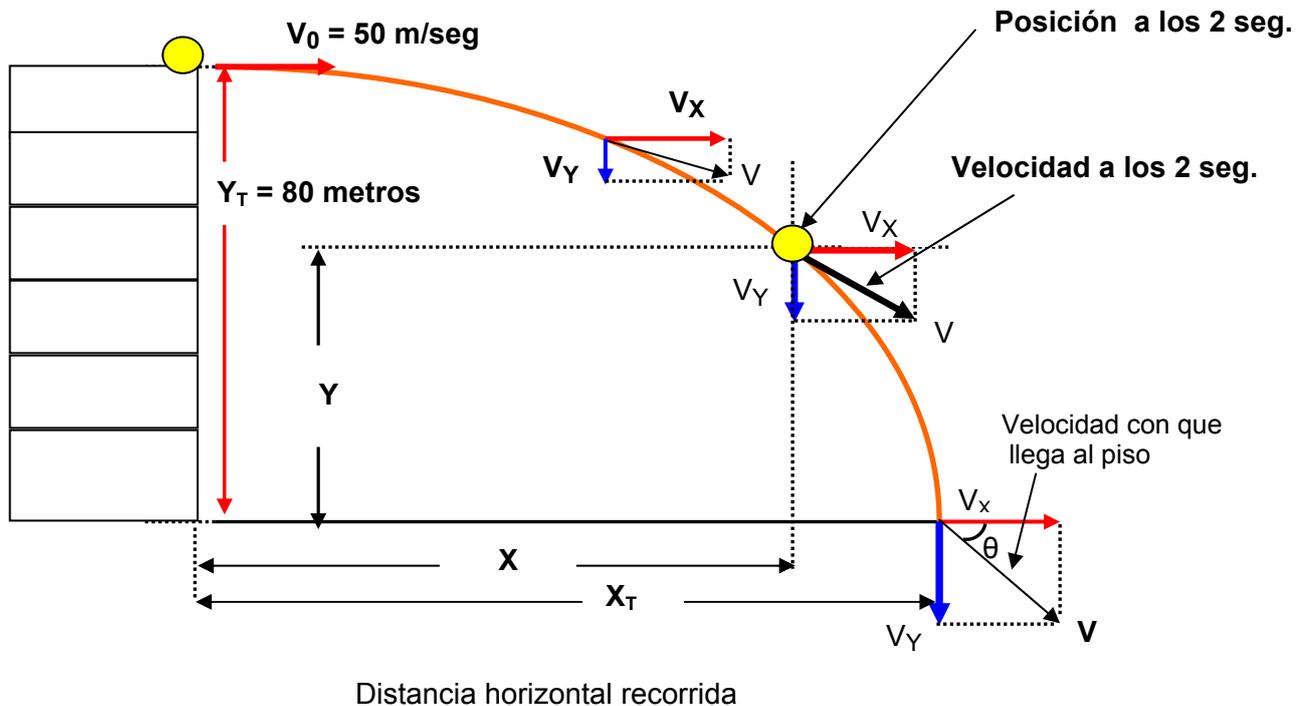
$$X = V_X * t = 2 \text{ m/seg} * 0,5 \text{ seg} = 1 \text{ metros}$$

$$X = 1 \text{ metro}$$

### PROBLEMA 26

Desde lo alto de un acantilado de 80 metros sobre el nivel del mar, se dispara horizontalmente un proyectil con velocidad de 50 m/seg. Determinar:

- La posición del proyectil 2 seg. Después del disparo.
- La ecuación de la trayectoria que describe el proyectil
- La velocidad y la posición del proyectil al incidir en el agua.



- 2 seg. Después del disparo, la posición del proyectil es:

$$V_O = V_X = 50 \text{ m/seg} \quad t = 2 \text{ seg}$$

$$X = V_X * t = 50 \text{ m/seg} * 2 \text{ seg} = 100 \text{ metros}$$

$$X = 100 \text{ metros}$$

Hallamos la altura que lleva a los 2 seg. de vuelo.

$$Y = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} * 9,8 * 2^2 = \frac{9,8 * 4}{2} = 19,6 \text{ metros}$$

$$Y = 19,6 \text{ metros}$$

- La ecuación de la trayectoria que describe el proyectil

$$X = V_X * t \Rightarrow t = \frac{X}{V_X} = \frac{X}{50}$$

$$t = \frac{X}{50} \quad \text{(Ecuacion 1)}$$

$$Y = \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{(Ecuacion 2)}$$

Reemplazando (Ecuacion 1) en la (Ecuacion 2)

$$Y = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} g \left( \frac{X}{50} \right)^2 = \frac{1}{2} * 9,8 * \frac{X^2}{2500}$$

$$Y = 9,8 * \frac{X^2}{5000} = 0,00196 X^2$$

$$Y = 0,00196 X^2$$

a) La velocidad y la posición del proyectil al incidir en el agua.  $Y = 80$  metros  $g = 10 \text{ m/seg}^2$

$$Y = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 2Y = g * t^2$$

$$\frac{2Y}{g} = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2Y}{g}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2Y}{g}} = \sqrt{\frac{2 * 80}{10}} = \sqrt{\frac{160}{10}} = \sqrt{16} = 4 \text{ seg.}$$

La velocidad en el eje X, es igual en todos los puntos de la trayectoria  $V_O = V_X = 50 \text{ m/seg}$

La velocidad en el eje Y, esta dada por:  $t = 4 \text{ seg.}$   $g = 10 \text{ m/seg}^2$

$$V_Y = g * t$$

$$V_Y = 10 * 4 = 40 \text{ m/seg.}$$

$$V = \sqrt{(V_X)^2 + (V_Y)^2}$$

$$V = \sqrt{(50)^2 + (40)^2} = \sqrt{2500 + 1600}$$

$$V = \sqrt{4100} = 64,03 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

La posición al caer el proyectil al agua es:

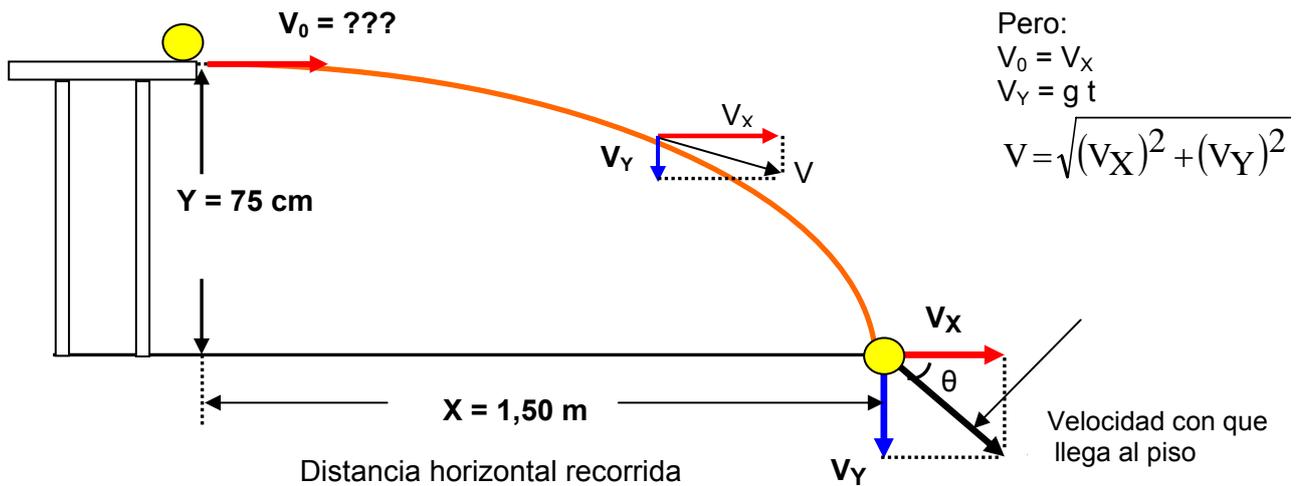
$$X_T = V_X * t = 50 \text{ m/seg} * 4 \text{ seg} = 200 \text{ metros}$$

$$X_T = 200 \text{ metros}$$

$$Y_T = 80 \text{ metros.}$$

**Problema 27** Una bola que rueda sobre una mesa horizontal de 75 cm de altura cae tocando el suelo en un punto situado a una distancia horizontal de 1,5 metros del borde de la mesa. Cual era la velocidad de la bola en el momento de abandonar la mesa?

Datos del problema  $Y = 75 \text{ cm} = 0,75 \text{ metros}$   $X = 1,5 \text{ m}$



Hallamos el tiempo de vuelo

$$Y = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 2Y = g * t^2 \quad \frac{2Y}{g} = t^2 \quad \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2Y}{g}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2Y}{g}} = \sqrt{\frac{2 * 0,75}{9,8}} = \sqrt{\frac{1,5}{9,8}} = \sqrt{0,153} = 0,39 \text{ seg.}$$

**t = 0,39 seg.**

Hallamos la velocidad horizontal

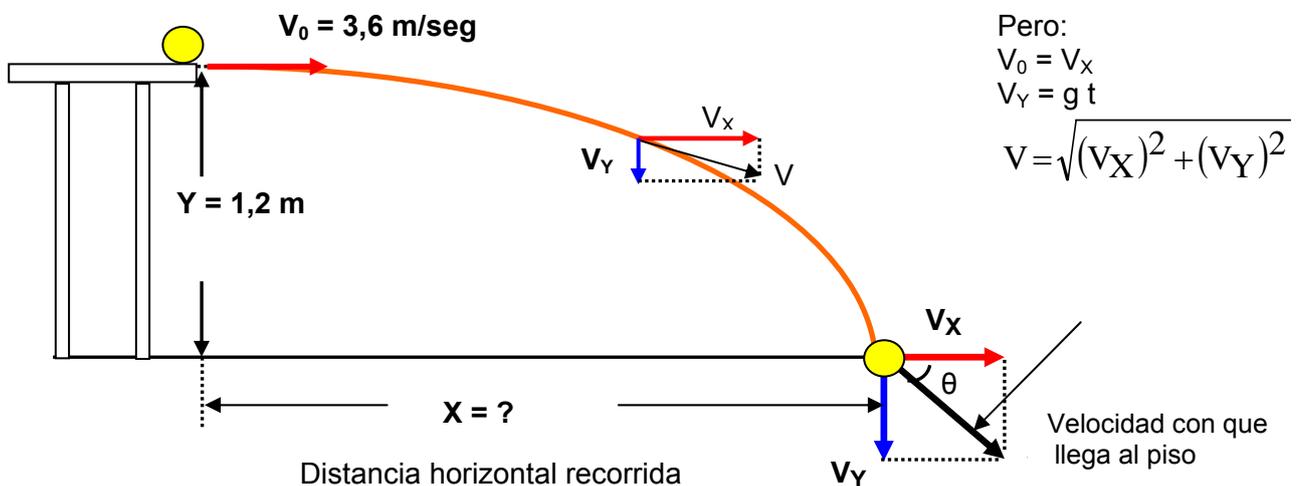
$$X = V_x * t \Rightarrow$$

$$V_x = \frac{X}{t} = \frac{1,5}{0,39} = 3,84 \text{ m/seg} \quad V_0 = V_x = 3,84 \text{ m/seg}$$

**Problema 28** Un bloque cae desde el tablero horizontal de una mesa de 1,2 metros de altura, sobre la cual se desliza con una velocidad de 3,6 m/seg.

- La distancia horizontal desde la mesa al punto en el cual el bloque golpea el suelo?
- Las componentes horizontal y vertical de su velocidad cuando llega a este.

Datos del problema  $Y = 1,2 \text{ m}$   $V_0 = 3,6 \text{ m/seg}$



Hallamos el tiempo de vuelo

$$Y = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 2Y = g * t^2$$

$$\frac{2Y}{g} = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2Y}{g}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2Y}{g}} = \sqrt{\frac{2 * 1,2}{9,8}} = \sqrt{\frac{2,4}{9,8}} = \sqrt{0,24} = 0,494 \text{ seg.}$$

**t = 0,494 seg.**

Hallamos la distancia horizontal

$$X = V_X * t \Rightarrow$$

$$X = 3,6 * 0,494$$

**X = 1,78 metros**

**b) Las componentes horizontal y vertical de su velocidad cuando llega a este.**

$$V_O = V_X = 3,6 \text{ m/seg}$$

$$V_Y = g * t$$

$$V_Y = 9,8 * 0,494$$

**V<sub>Y</sub> = 4,84 m/seg.**

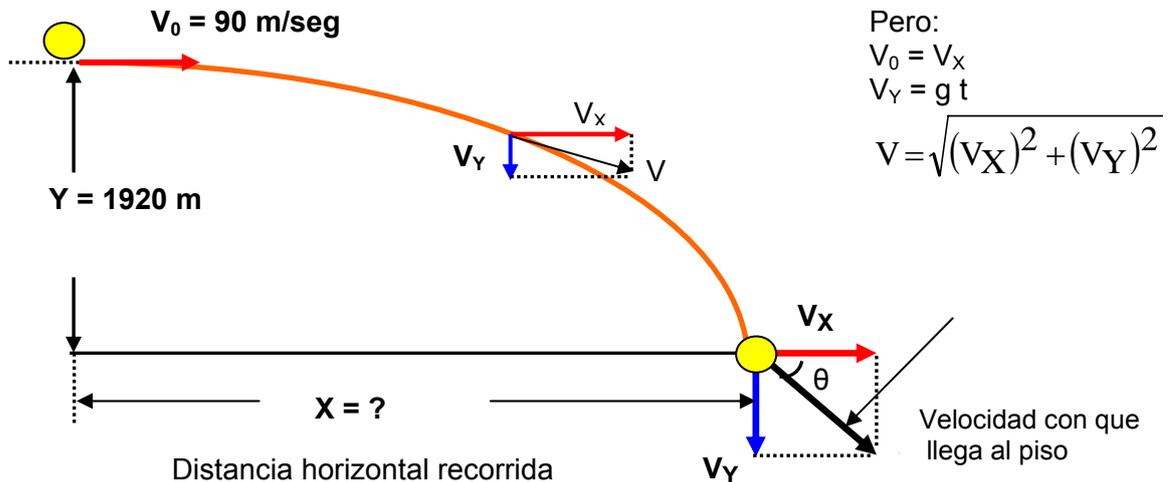
**Problema 29** un bombardero que vuela horizontalmente a 90 m/seg. deja caer una bomba desde una altura de 1920 m.

a) Cuanto tarda la bomba en llegar a tierra?

b) Cuanto recorre horizontalmente?

c) Calcular las componentes horizontal y vertical de su velocidad cuando llega al suelo?

Datos del problema Y = 1,2 m V<sub>0</sub> = 3,6 m/seg



Hallamos el tiempo de vuelo

$$Y = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 2Y = g * t^2$$

$$\frac{2Y}{g} = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2Y}{g}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 Y}{g}} = \sqrt{\frac{2 * 1920}{9,8}} = \sqrt{\frac{3840}{9,8}} = \sqrt{391,83} = 19,79 \text{ seg.}$$

**t = 19,79 seg.**

**b) Cuanto recorre horizontalmente?**

$$X = V_X * t \Rightarrow$$

$$X = 90 * 19,79$$

**X = 1781,53 metros**

**b) Las componentes horizontal y vertical de su velocidad cuando llega a este.**

$$V_O = V_X = 90 \text{ m/seg}$$

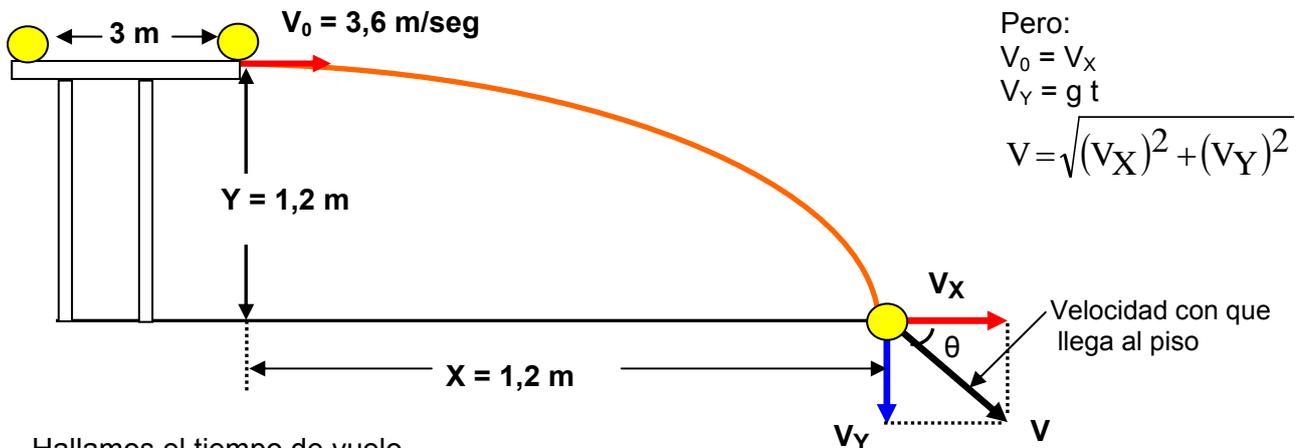
$$V_Y = g * t$$

$$V_Y = 9,8 * 19,79$$

**V<sub>Y</sub> = 193,94 m/seg.**

**Problema 30** Un bloque pasa por un punto, distante 3 metros del borde de una mesa, con una velocidad de 3,6 m/seg. Abandona la mesa que tiene 1,2 metros de altura y golpea el suelo en un punto situado a 1,2 metros del borde de la mesa. Cual es el coeficiente cinético de rozamiento entre el bloque y la mesa

Datos del problema Y = 1,2 m X = 1,2 m/seg



Hallamos el tiempo de vuelo

$$Y = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 2Y = g * t^2$$

$$\frac{2Y}{g} = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2Y}{g}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 Y}{g}} = \sqrt{\frac{2 * 1,2}{9,8}} = \sqrt{\frac{2,4}{9,8}} = \sqrt{0,244} = 0,49 \text{ seg.}$$

**t = 0,49 seg.**

Con los datos del tiempo de vuelo y el alcance horizontal, se halla la velocidad horizontal con la cual el bloque sale de la mesa.

$$X = V_X * t \Rightarrow$$

$$V_X = \frac{X}{t} = \frac{1,2}{0,49} = 2,44 \text{ m/seg}$$

$$V_O = V_X = 2,44 \text{ m/seg}$$

Con la velocidad inicial del bloque y la velocidad final se puede hallar la aceleración del bloque en la mesa.

$$V_0 \text{ del bloque} = 3,6 \text{ m/seg.}$$

$$V_F \text{ del bloque} = 2,44 \text{ m/seg.}$$

$$d = 3 \text{ metros}$$

$(V_F)^2 = (V_0)^2 - 2 a d$  es negativo por que el bloque va perdiendo velocidad

$$(2,44)^2 = (3,6)^2 - 2 a 3$$

$$(5,95) = (12,96) - 6 a$$

$$6 a = (12,96) - (5,95)$$

$$6 a = 7,01$$

$$a = \frac{7,01}{6} = 1,16 \text{ m/seg}^2$$

$$a = 1,16 \text{ m/seg}^2$$

**Ahora aplicando la segunda ley de Newton.**

$$F = m * a$$

pero la única fuerza que se opone al movimiento es la fuerza de rozamiento

$$F = F_R$$

$$F = m * a$$

$$F_R = m * a$$

$$F_R = \mu N$$

El movimiento del bloque es en el eje X.

**En el eje Y no hay desplazamiento.**

$$\Sigma F_Y = 0$$

$$N - m g = 0$$

$$N = m g$$

$$F_R = \mu N$$

$$F_R = \mu m g$$

$$F_R = m * a$$

$$\cancel{m} * a = \mu \cancel{m} g$$

$$a = \mu * g$$

$$\mu = \frac{a}{g} = \frac{1,16}{9,8} = 0,119$$

$$\mu = 0,119$$

