Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Problema 1 Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & -7 & 7 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 2 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & 3 & -m \\ 2 & m & 2 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Calcular los valores de m para los que la matriz A es inversible.
2. Calcular A^{-1} para $m = 0$.

Problema 3 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular A^n y en particular A^{1000}

Problema 4 Calcular todas las matrices X que cumplan $AX = XA$ donde $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 1 Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & -7 & 7 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & -7 & 7 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \ |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -7 & 8 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \ |A_4| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -7 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Luego Rango$(A) < 3$, buscamos menores de orden dos

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

Concluimos con que el Rango$(A) = 2$.

Problema 2 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & 3 & -m \\ 2 & m & 2 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Calcular los valores de m para los que la matriz A es inversible.
2. Calcular A^{-1} para $m = 0$.

Solución:

1.

$$\begin{vmatrix} m & 3 & -m \\ 2 & m & 2 \\ 4 & -3 & 8 \end{vmatrix} = 12(m^2 + m - 2) = 0 \Longrightarrow m = 1, \ \ m = -2$$

Si $m = 1$ o $m = -2 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ no existe A^{-1}.

Si $m \neq 1$ y $m \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ existe A^{-1}.

2.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1 & -1/4 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular A^n y en particular A^{1000}

Solución:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{1000} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1000 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 4 Calcular todas las matrices X que cumplan $AX = XA$ donde $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

LLamamos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$AX = XA \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2a - c & 2b - d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & -a + b \\ 2c & -c + d \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2a - c = 2a \Longrightarrow c = 0 \\ 2b - d = -a + b \Longrightarrow a = d - b \\ c = 2c \Longrightarrow c = 0 \\ d = -c + d \Longrightarrow c = 0 \end{array} \right.$$

Luego $X = \begin{pmatrix} d-b & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$