Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Febrero 2010

Problema 1 Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{4 - x^2}$, determina

1. Dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
2. Ecuación de sus asíntotas.
3. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
4. Máximos y mínimos relativos.
5. Utiliza la información anterior para representarla gráficamente.

(Comunidad Valenciana Junio-2008)

Problema 2 Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ una función que pasa por el punto $(0, 0)$ y tiene un extremo en $(2, 3)$ y un punto de inflexión en $x = 1$. Encontrar los parámetros a, b, c y d.

Problema 3 Cacúlense las derivadas de las siguientes funciones reales de variable real

1. $f(x) = x^2 \ln(1 - x)$
2. $g(x) = \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{8}{x^2}$
3. $h(x) = e^{2x-1}$
4. $t(x) = 7x - x^2 + \dfrac{9}{x}$
5. $u(x) = (1 - x^2)e^x$
6. $v(x) = \dfrac{1}{(x + 1)^{20}}$

Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Febrero 2010

Problema 1 Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{4 - x^2}$, determina

1. Dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
2. Ecuación de sus asíntotas.
3. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
4. Máximos y mínimos relativos.
5. Utiliza la información anterior para representarla gráficamente.

(Comunidad Valenciana Junio-2008)

Solución:

1. $Dom(f) = R - \{-2, 2\}$. Los puntos de corte serán los siguientes:

   Si $x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$ y si $f(x) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$. Luego el único punto de corte es el $(0, 0)$.

2. Asíntotas:

   - Verticales: Las únicas posibles son $x = -2$ y $x = 2$

   $$\lim_{x\longrightarrow -2^-} \frac{x^2}{4 - x^2} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty \qquad \lim_{x\longrightarrow -2^+} \frac{x^2}{4 - x^2} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$$

   $$\lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{x^2}{4 - x^2} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty \qquad \lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{x^2}{4 - x^2} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty$$

   - Horizontales: $y = -1$

   $$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2}{4 - x^2} = -1$$

   - Oblicuas: No hay al haber horizontales.

3. Monotonía:

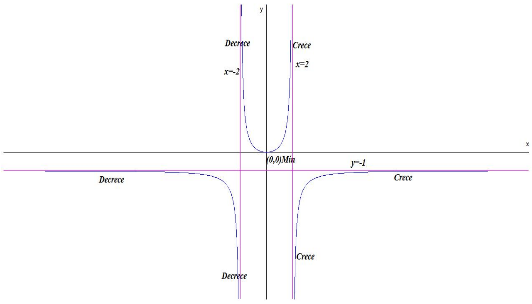
   $$f'(x) = \frac{8x}{(4 - x^2)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Decrece	Crece

   La función crece en el intervalo: $(0, 2) \cup (2, \infty)$ y decrece en el intervalo: $(\infty, -2) \cup (-2, 0)$

4. Máximos y mínimos relativos: A la vista del apartado anterior, la función presenta un Mínimo en el punto $(0,0)$.

5. Representación gráfica:



Problema 2 Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ una función que pasa por el punto $(0,0)$ y tiene un extremo en $(2,3)$ y un punto de inflexión en $x = 1$. Encontrar los parámetros a, b, c y d.

Solución:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 0 \Longrightarrow d = 0 \\ f(2) = 3 \Longrightarrow 8a + 4b + 2c + d = 3 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow 12a + 4b + c = 0 \\ f''(1) = 0 \Longrightarrow 6a + 2b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -3/4 \\ b = 9/4 \\ c = 0 \end{array}\right.$$

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2$$

Problema 3 Calcúlense las derivadas de las siguientes funciones reales de variable real

1. $f(x) = x^2 \ln(1 - x)$

2. $g(x) = \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{8}{x^2}$

3. $h(x) = e^{2x-1}$

4. $t(x) = 7x - x^2 + \dfrac{9}{x}$

5. $u(x) = (1 - x^2)e^x$

6. $v(x) = \dfrac{1}{(x+1)^{20}}$

Solución:

1. $f'(x) = 2x\ln(1-x) - \dfrac{x^2}{1-x}$
2. $g'(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{16}{x^3}$
3. $h'(x) = 2e^{2x-1}$
4. $t(x) = 7 - 2x - \dfrac{9}{x^2}$
5. $u(x) = -2xe^x + (1-x^2)e^x$
6. $v(x) = -\dfrac{20}{(x+1)^{19}}$