

MATEMÁTICAS**EJERCICIOS RESUELTOS DE FUNCIONES**

Estudia el dominio de cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \frac{1}{x+2}$

Solución:

El $\text{Dom}(f)$ está dado por el conjunto de los valores de x para los que $f(x)$ existe. Esta función no tiene sentido cuando el denominador es cero. Dicho de otro modo, la función existe para todos los valores de x para los que el denominador es distinto de cero. En notación matemática:

$\text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / x + 2 \neq 0 \Rightarrow \text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / x \neq -2$, en donde el símbolo “/” significa “tal que”

2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

Solución:

El $\text{Dom}(f)$ está dado por el conjunto de los valores de x para los que $f(x)$ existe. Esta función existe para los valores de x que hacen que el radicando sea mayor o igual que cero. En notación matemática:

$\text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / x^2 - 4 \geq 0$, en donde el símbolo “/” significa “tal que”.

Tenemos que resolver la inecuación $x^2 - 4 \geq 0$.

- Resolvemos la ecuación correspondiente:

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

- Llevamos las raíces sobre la recta de los números reales:



- Ahora estudiamos el comportamiento de $x^2 - 4 \geq 0$ en las tres zonas que determinan las dos raíces:

Zona 1:

Tomamos un x cualquiera de $\mathbb{R}$ comprendido entre $-\infty$ y -2 , incluido éste, o lo que es lo mismo en notación matemática: elegimos un $x \in (-\infty, 2]$.

Así, para $x=-3$ tenemos que $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow (-3)^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow 5 \geq 0$, lo cual es cierto. Entonces en este intervalo tenemos una solución.

Zona 2:

Tomamos un $x \in (-2, 2)$, por ejemplo el cero. Así, para $x=0$ tenemos que $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow 0^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow -4 \geq 0$, lo cual no es cierto. Entonces en este intervalo no hay solución.

Zona 3:

Tomamos un $x \in [2, \infty)$, por ejemplo $x=3$. Así, $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow 3^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow 5 \geq 0$, lo cual si es cierto. Ello quiere decir que el intervalo estudiado es una solución de la inecuación.

Conclusión final:

$\text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / x \leq -2 \text{ y } x \geq 2$,
y gráficamente:



3. $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+x-2}}$

Solución:

El $\text{Dom}(f)$ está dado por el conjunto de los valores de x para los que $f(x)$ existe. Esta función no tiene sentido cuando el denominador es cero o cuando el radicando es menor que cero.

Así:

$$\text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 2 \geq 0$$

La solución de $x^2 + x - 2 \geq 0$ viene dada por $(-\infty, -2] \cup [1, \infty)$

Entonces,

$$\text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 2 \geq 0 \Rightarrow \text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / (-\infty, -2] \cup [1, \infty)$$

$$4. f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{x^2 + x + 18}$$

Solución:

El Dom(f) está dado por el conjunto de los valores de x para los que f(x) existe. Esta función no tiene sentido en los siguientes casos:

- a) El radicando que aparece en el numerador es negativo.
- b) El denominador es cero.

Es decir:

$$\text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / 2 - x \geq 0 \cup x^2 + x + 18 \neq 0,$$

tal que:

$$\begin{aligned} \bullet \quad 2 - x \geq 0 &\Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow (-\infty, 2] \\ \bullet \quad x^2 + x + 18 \neq 0 &\Rightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -9 \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusión:

$$\text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / (-\infty, -9) \cup (-9, -1) \cup (-1, 2)$$

B.2. Halla la inversa de cada una de las siguientes funciones

$$5. f(x) = 5x - 2$$

Solución:

Primero comprobamos que la función es inyectiva:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 5x_1 - 2 = 5x_2 - 2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Así que es inyectiva, por lo que tendrá inversa.

Escribimos la función como $y = 5x - 2$ y cambiamos x por y :
 $x = 5y - 2$

Ahora despejamos y :
 $x = 5y - 2 \Rightarrow y = \frac{x+2}{5}$

Por último, hacemos el cambio $y \equiv f^{-1}(x)$:
 $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{5}$

6. $f(x) = x^2 - 2$

Solución:

Primero comprobamos que la función es inyectiva:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 - 2 = x_2^2 - 2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Así que es inyectiva, por lo que tendrá inversa.

Escribimos la función como $y = x^2 - 2$ y cambiamos x por y :
 $x = y^2 - 2$

Ahora despejamos y :
 $x = y^2 - 2 \Rightarrow y = \sqrt{x+2}$

Por último, hacemos el cambio $y \equiv f^{-1}(x)$:
 $f^{-1}(x) = \sqrt{x+2}$

7. $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

Solución:

Primero comprobamos que la función es inyectiva:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1+3}{x_1-1} = \frac{2x_2+3}{x_2-1} \Rightarrow x_1 = x_2$. Así que es inyectiva, por lo que tendrá inversa.

Escribimos la función como $y = \frac{2x+3}{x-1}$ y cambiamos x por y :

$$x = \frac{2y+3}{y-1}$$

Ahora despejamos y:

$$x = \frac{2y+3}{y-1} \Rightarrow y = \frac{x+3}{x-2}$$

Por último, hacemos el cambio $y \equiv f^{-1}(x)$:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{x-2}$$

8. $f(x) = \sqrt[3]{x-4}$

Solución:

Primero comprobamos que la función es inyectiva:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt[3]{x_1-4} = \sqrt[3]{x_2-4} \Rightarrow x_1 = x_2$. Así que es inyectiva, por lo que tendrá inversa.

Escribimos la función como $y = \sqrt[3]{x-4}$ y cambiamos x por y:

$$x = \sqrt[3]{y-4}$$

Ahora despejamos y:

$$x = \sqrt[3]{y-4} \Rightarrow y = x^3 + 4$$

Por último, hacemos el cambio $y \equiv f^{-1}(x)$:

$$f^{-1}(x) = x^3 + 4$$

B.3. Halla la variación y la tasa de variación media de cada una de las siguientes funciones

9. $f(x) = 5x - 2$ en el intervalo $[-3, 0]$

Solución:

a) La variación viene dada por :

$$f(b) - f(a) = f(0) - f(-3) = 5 \cdot 0 - 2 - (5(-3) - 2) = -19$$

b) La tasa de variación media viene dada por $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{-19}{3} = -\frac{19}{3}$

10. $f(x) = x^2 - 2$ en el intervalo $[-1, 2]$

Solución:

a) La variación viene dada por

$$f(b) - f(a) = f(2) - f(-1) = 0^2 - 2 - (2^2 - 2) = -4$$

b) La tasa de variación media viene dada por:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{-4}{2 - (-1)} = -\frac{4}{3}$$

11. $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ en el intervalo $[0, 4]$

Solución:

a) La variación viene dada por :

$$f(b) - f(a) = f(4) - f(0) = \frac{2 \cdot 4 + 3}{4 - 1} - \frac{0 + 3}{0 - 1} = \frac{20}{3}$$

b) La tasa de variación media viene dada por $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\frac{20}{3}}{4} = \frac{5}{3}$

12. $f(x) = \sqrt{x-4}$ en el intervalo $[4, 5]$

Solución:

a) La variación viene dada por:

$$f(b) - f(a) = f(5) - f(4) = \sqrt{5-4} - \sqrt{4-4} = 1$$

b) La tasa de variación media viene dada por $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{1}{1} = 1$

B.4. Estudia la simetría de cada una de las siguientes funciones

13. $f(x) = x^4 + x^2$

Solución:

• La simetría de una función puede ser:

b) Par o simétrica respecto al eje OY, cuando se cumple que $f(x) = f(-x)$

- c) Impar o simétrica respecto al origen, cuando se cumple que $-f(x) = f(-x)$
- d) No tener simetría, si no se dan ninguno de los dos casos anteriores.

- Estudio de la simetría par:

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow x^4 + x^2 = (-x)^4 + (-x)^2 \Rightarrow x^4 + x^2 = x^4 + x^2.$$

Conclusión:

La simetría es par. No hace falta seguir con el estudio, ya que las funciones no pueden tener dos tipos de simetría.

14. $f(x) = x^3 - x$

Solución:

- Estudio de la simetría par:

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow x^3 - x = (-x)^3 - (-x) \Rightarrow x^3 - x \neq -x^3 + x. \text{ Conclusión: La simetría no es par.}$$

- Estudio de la simetría impar:

$$-f(x) = f(-x) \Rightarrow -x^3 + x = (-x)^3 - (-x) \Rightarrow -x^3 + x = -x^3 + x. \text{ Conclusión: La simetría es impar.}$$

15. $f(x) = \frac{1}{2x-1}$

Solución:

- Estudio de la simetría par:

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow \frac{1}{2x-1} = \frac{1}{2(-x)-1} \Rightarrow \frac{1}{2x-1} \neq \frac{1}{-2x-1}, \text{ luego la simetría no es par.}$$

- Estudio de la simetría impar:

$$-f(x) = f(-x) \Rightarrow -\frac{1}{2x-1} = \frac{1}{2(-x)-1} \Rightarrow \frac{1}{-2x+1} \neq \frac{1}{-2x-1}, \text{ luego la simetría no es impar.}$$

- conclusión final: La función no tiene simetría.

B.5. Representa cada una de las siguientes funciones

16. $y = 2x$

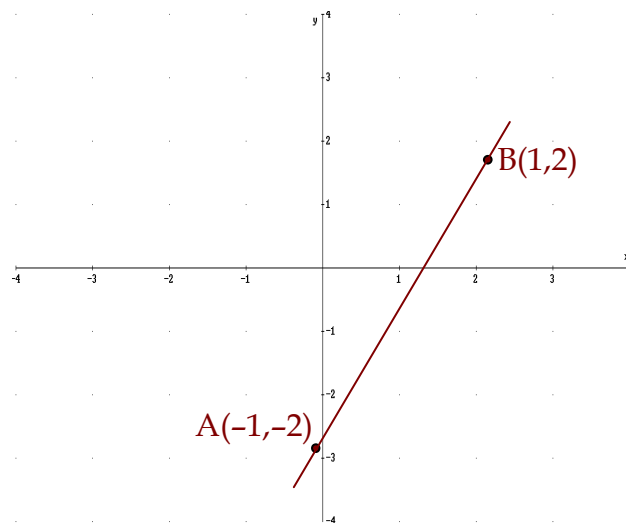
Solución:

La función dada se trata de una línea recta, ya que es de la forma $y = mx + n$, en donde m es la pendiente. En nuestro caso, $m=2$ y $n=0$. Como $n=0$ ello quiere decir que la recta cortará al eje y en $y=0$.

Hacemos una tabla de valores para $y=2x$

x	y=2x
-1	$2(-1)=-2 \Rightarrow A(-1,-2)$
1	$2 \cdot 1=2 \Rightarrow B(1,2)$

Ahora representamos los dos puntos sobre el plano cartesiano:



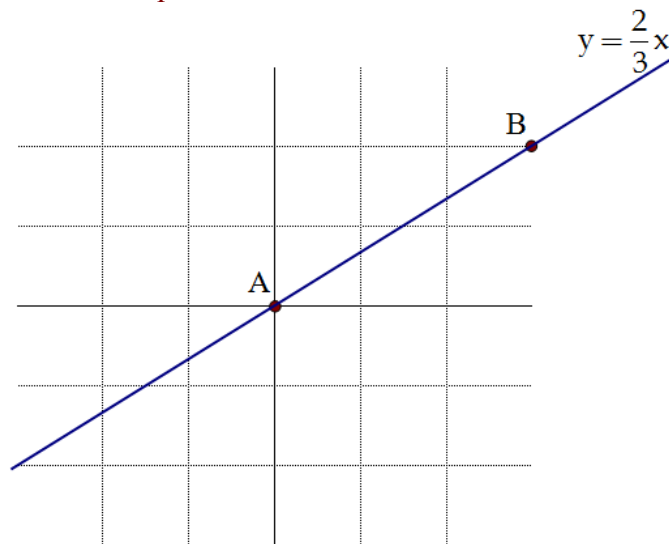
17. $y = \frac{2x}{3}$

Solución:

- La función $y = \frac{2x}{3}$ se puede escribir también así: $y = \frac{2}{3}x$, o si lo prefieres de esta otra forma: $y = 0,67x$
- Ahora, como siempre en estos casos, construimos una tabla de valores para obtener dos puntos (para dibujar una línea recta no hacen falta más puntos):

x	$y = \frac{2}{3}x$	
0	0	$\Rightarrow A(0,0)$
3	2	$\Rightarrow B(3,2)$

- Por último, representamos los dos puntos en un plano cartesiano y por ellos trazamos la línea recta que buscamos:



18. $y = -2x + 3$

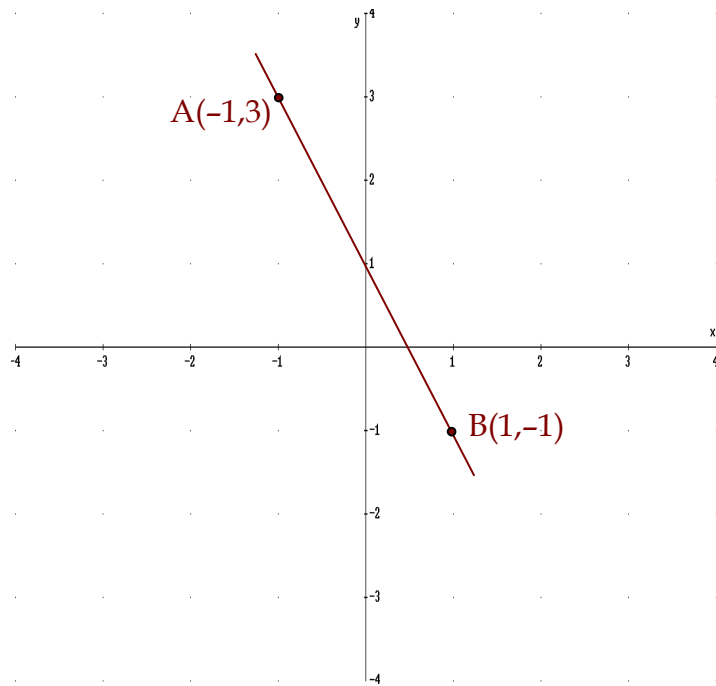
Solución:

La función dada es una línea recta, ya que es de la forma $y = mx + n$, en donde m es la pendiente. En nuestro caso, $m = -2$ y $n = 3$. Como $n = 3$ ello quiere decir que la recta cortará al eje y en $y = 3$.

Hacemos una tabla de valores para $y = -2x + 3$

x	$y = -2x + 3$	
-1	$-2(-1) + 3 = 5$	$\Rightarrow A(-1,5)$
1	$-2 \cdot 1 + 3 = 1$	$\Rightarrow B(1,1)$

Ahora representamos los dos puntos sobre el plano cartesiano:



19. Representa la siguiente función definida a trozos. Estudia también la continuidad, el crecimiento, decrecimiento y los máximos y mínimos de cada una de ellas.

$$f(x) = \begin{cases} x - 3, & -\infty < x \leq 0 \\ 2, & 0 < x < 3 \\ -x, & 3 \leq x < \infty \end{cases}$$

Solución:

El dominio de $f(x)$ tiene tres zonas, para una de las cuales corresponde un trazado distinto:

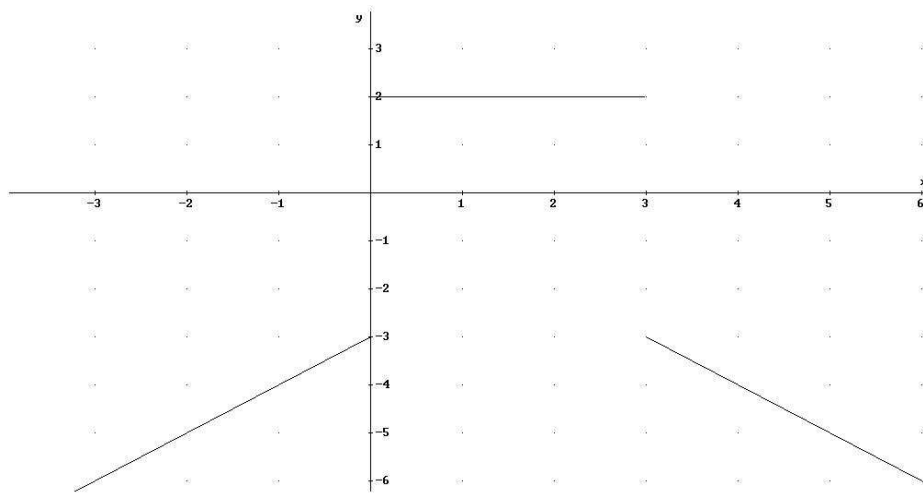
- Para la primera zona, $-\infty < x \leq 0$, construimos una tabla de valores con el fin de obtener dos puntos. No necesitamos más puntos, ya que en el presente tramo la función es una línea recta, $f_1(x) = x - 3$

x	x-3
0	$0-3=-3 \Rightarrow A(0,-3)$
-2	$-2-3=-5 \Rightarrow B(-2,-5)$

- Para la segunda zona, $0 < x < 3$, el valor de la función es constante, $f_2(x) = 2$
- Para la tercera zona, $3 \leq x < \infty$, construimos una tabla de valores con el fin de obtener dos puntos. No necesitamos más puntos ya que este tercer tramo se trata de otra recta, $f_3(x) = -x$

x	-x
3	-3 $\Rightarrow D(3,-3)$
5	-5 $\Rightarrow E(5,-5)$

- Sólo nos queda representar los puntos obtenidos:



20. Representa la siguiente función cuadrática: $y = x^2 - 5x + 6$

Solución:

- **Los puntos de corte con el eje x:**

Se obtienen a partir de la condición $y=0$. En ese caso:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

- **Las coordenadas del vértice:**

Están dadas por $x = -\frac{b}{2a}$; $y = \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}$. Sustituyendo los valores de a y b en estas expresiones obtenemos:

$$x = -\frac{(-5)}{2}; y = \frac{-(-5)^2 + 4 \cdot 1 \cdot 6}{4 \cdot 1^2} \Rightarrow x = \frac{5}{2}; y = -\frac{1}{4}, \quad \text{que vamos a expresar como } V\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

▪ **Orientación de la parábola:**

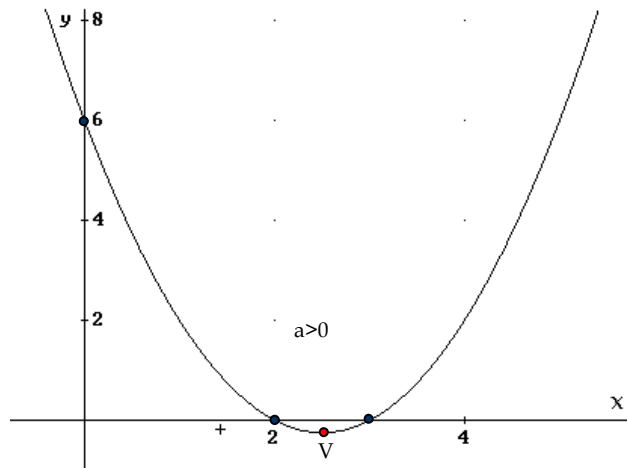
Como $a > 0$, entonces la parábola es cóncava hacia arriba.

▪ **El punto de corte con el eje y:**

Está dado por la condición $x=0$. En nuestro caso, cuando $x=0$ se tiene que $y=6$.

▪ **Representación gráfica:**

plano cartesiano los puntos que hemos conseguido y unirlos.



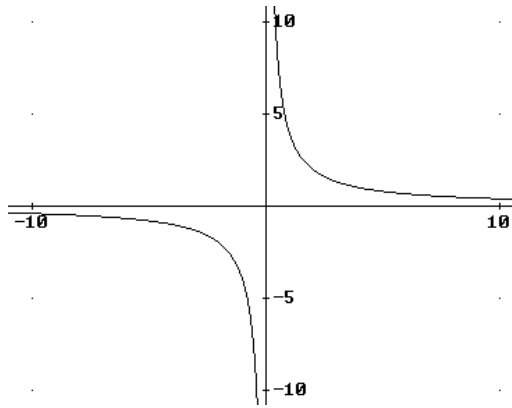
21. $y = \frac{4}{x} + 3$

Solución:

Para representar esta parábola hay que dar los siguientes pasos:

a) Paso uno:

Tenemos que saber dibujar $f(x) = \frac{4}{x}$, que es una función de proporcionalidad inversa cuya forma es la que sigue:



b) Paso dos:

$y = \frac{4}{x} + 3$, es la anterior función pero desplazada 3 unidades verticales positivas:

