Límites - Propiedades

Existencia única de límite

Si los límites laterales de una función $f(x)$ en un punto $x=x_0$ son diferentes, la función $f(x)$ no tiene límite en $x=x_0$ (**unicidad del límite**).

Una función $f(x)$ posee límite en $x=x_0$ si y solo si sus límites laterales son iguales. Y este límite es único.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$$

Si los límites laterales coinciden en $(+\infty)$, se dice que el límite de la función es $(+\infty)$. Y si los límites laterales coinciden en $(-\infty)$, se dice que el límite de la función es $(-\infty)$.

No debemos confundir esto con el hecho de que el límite no exista. Es decir, una cosa es que el límite valga $(+\infty)$ ó $(-\infty)$, y otra cosa distinta es que el límite no exista.

Un límite no existe cuando sus límites laterales no coinciden (ya sean valores finitos o infinitos), **o cuando no esté definido su valor** (por ejemplo, si estudiamos una raíz cuadrada o un logaritmo en valores negativos: $\lim_{x\to -1}\sqrt{x}\to\nexists$, $\lim_{x\to -1}\ln x\to\nexists$).

Propiedades de los límites

Si $\lim_{x\to x_0} f(x)=L,\ L\neq 0$, existe un entorno de x_0 en el que los valores que toma la función tiene el mismo signo que L. Es decir:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L,\ L\neq 0 \implies \exists\delta>0/\, signo(f(x_0-\delta))=signo(f(x_0+\delta))=signo(L)$$

Para las siguientes propiedades vamos a considerar dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ con límites finitos en un punto x_0.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L,\ L\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=M,\ M\in\mathbb{R}$$

El límite de la suma de funciones es igual a la suma de los límites de cada función. Es decir:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)=L+M$$

Igualmente, el límite de la diferencia de funciones es la diferencia de los límites:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)-\lim_{x\to x_0} g(x)=L-M$$

El límite del producto de funciones es el producto de los límites:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = L \cdot M$$

El límite de una constante multiplicada por una función es igual a la constante por el límite de la función:

$$\lim_{x \to x_0} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = k \cdot L ,\ k \in \mathbb{R}$$

El límite de un cocientes de funciones es el cociente de los límites, siempre que el límite del denominador sea distinto de cero.

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{L}{M} ,\ M \neq 0$$

El límite de una función elevada a otra función, es el límite de la base elevado al límite del exponente, siempre y cuando el límite de la base sea positivo.

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} f(x)^{\lim_{x \to x_0} g(x)} = L^M ,\ L > 0$$

Operaciones básicas con factores infinitos

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

$k \pm \infty = \pm\infty ,\ k \in \mathbb{R}$

$(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$

$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$

$k \cdot (\pm\infty) = \pm\infty ,\ k \in \mathbb{R} \quad y \quad k > 0$

$k \cdot (\pm\infty) = \mp\infty ,\ k \in \mathbb{R} \quad y \quad k < 0$

$\frac{k}{\infty} = 0 ,\ k \in \mathbb{R} \quad y \quad k \neq 0$

$\frac{k}{0} = +\infty ,\ k \in \mathbb{R} \quad y \quad k > 0$

$\frac{k}{0} = -\infty ,\ k \in \mathbb{R} \quad y \quad k < 0$

Límites en el infinito

Hasta ahora, al calcular límites, estamos estudiando el comportamiento de la función en los alrededores de un valor x_0 finito. Por ejemplo:

$$\lim_{x \to 3} (x^2+2x-2)=13$$

¿Qué ocurre si deseamos estudiar el comportamiento de la función en puntos tremendamente positivos ($+\infty$) o tremendamente negativos ($-\infty$)?

Es lo que se conoce como límites en el infinito que, según casos, generan los conceptos de asíntota horizontal y asíntota oblícua (como aquellos valores a los que la gráfica se acerca indefinidamente, cada vez más, para valores en el infinito de la variable x).

La notación es la siguiente:

$\lim_{x \to \infty} f(x)$ $\rightarrow$ Límite de la función cuando x tiende a $+\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x)$ $\rightarrow$ Límite de la función cuando x tiende a $-\infty$

No tiene sentido preguntarnos por límites laterales en el infinito (es decir, a la izquierda y derecha de $\pm\infty$). Directamente estudiamos el límite, siguiendo una serie de reglas (algunas ya son conocidas de clases anteriores, y otras iremos presentándolas conforme realicemos ejemplos más complicados).

Algunos ejemplos

Una función puede dispararse cuando x tiende a infinito, como por ejemplo la parábola $f(x)=x^2$.

$$\lim_{x \to +\infty} x^2=+\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^2=+\infty$$

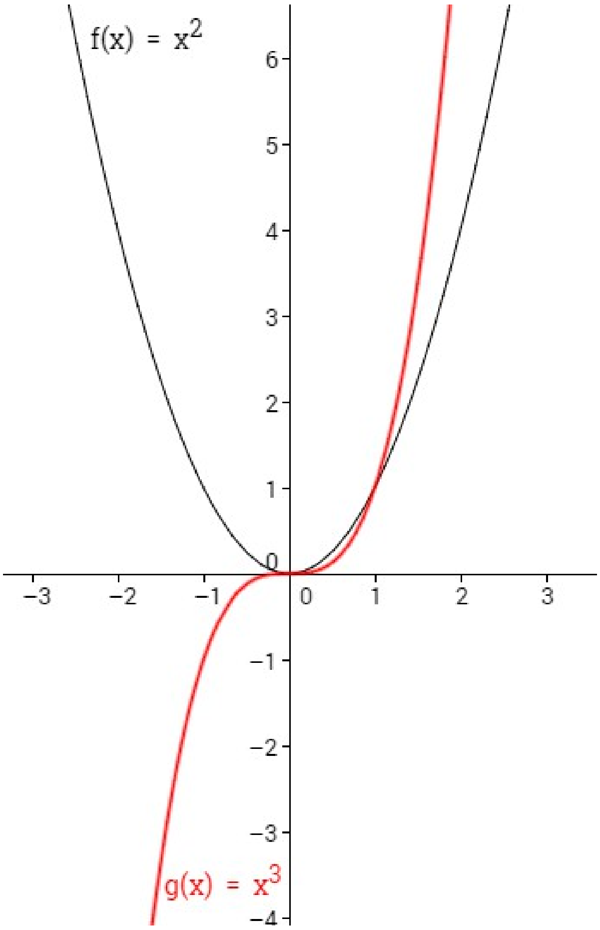
Ambos límites tienden a $+\infty$.

La función $g(x)=x^3$, por su parte, presenta los siguientes valores en el infinito.

$$\lim_{x \to +\infty} x^3=+\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^3=-\infty$$

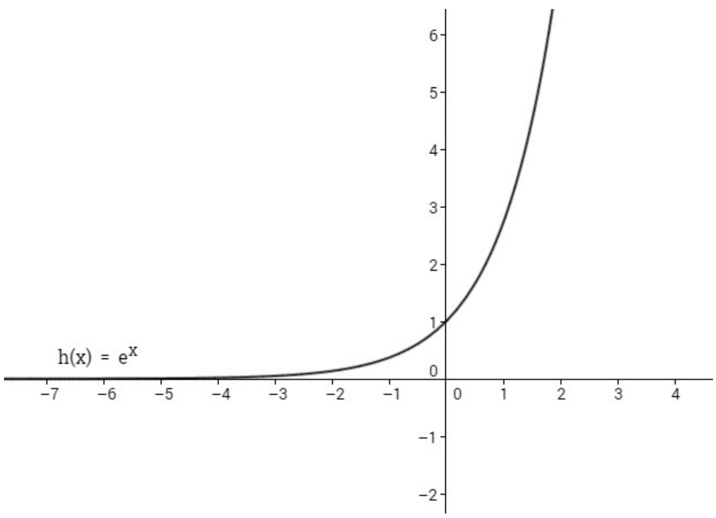
Las gráficas siguiente ratifican los resultados analíticos obtenidos.



La siguiente función $h(x)=e^x$ va a converger en valores de la x tremendamente negativos pero se dispara para valores de x tremendamente positivos.

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ → Asíntota horizontal $y=0$ para valores de $x \to -\infty$



La función $i(x)=\frac{\ln(x)}{e^x}$, además de poseer una asíntota vertical en $x=0$, posee una asíntota horizontal $y=0$ para valores tremendamente positivos de x .

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = 0$$ → Asíntota horizontal $y=0$ para valores de $x \to +\infty$

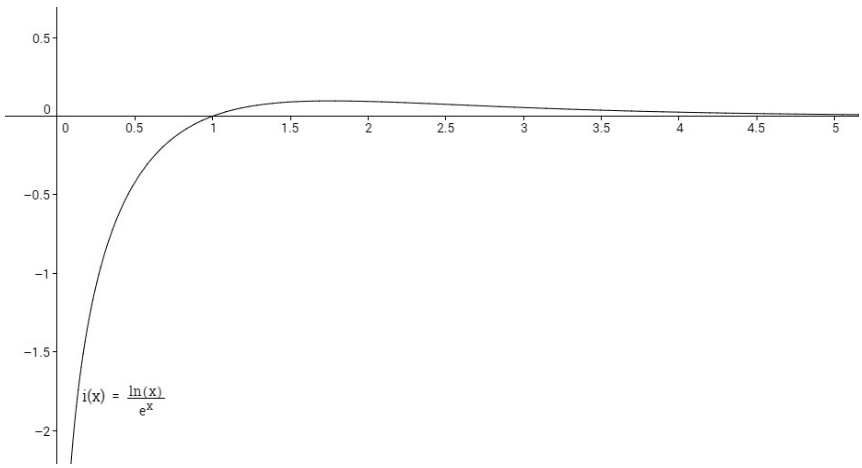
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = \nexists$$

El límite $\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = \nexists$ es un ejemplo de que una cosa significa que el límite no exista, y otra cosa bien distinta implica que el límite valga infinito. Como ya hemos repetido varias veces en este tema, es importante no confundir ambos conceptos.

En la siguiente gráfica mostramos la curva $i(x) = \frac{\ln(x)}{e^x}$, donde podrás apreciar que la asíntota horizontal $y=0$ es cortada por la función en el punto $x=1$.

¿Cómo es posible, si es una asíntota? Porque el comportamiento de acercarse cada vez

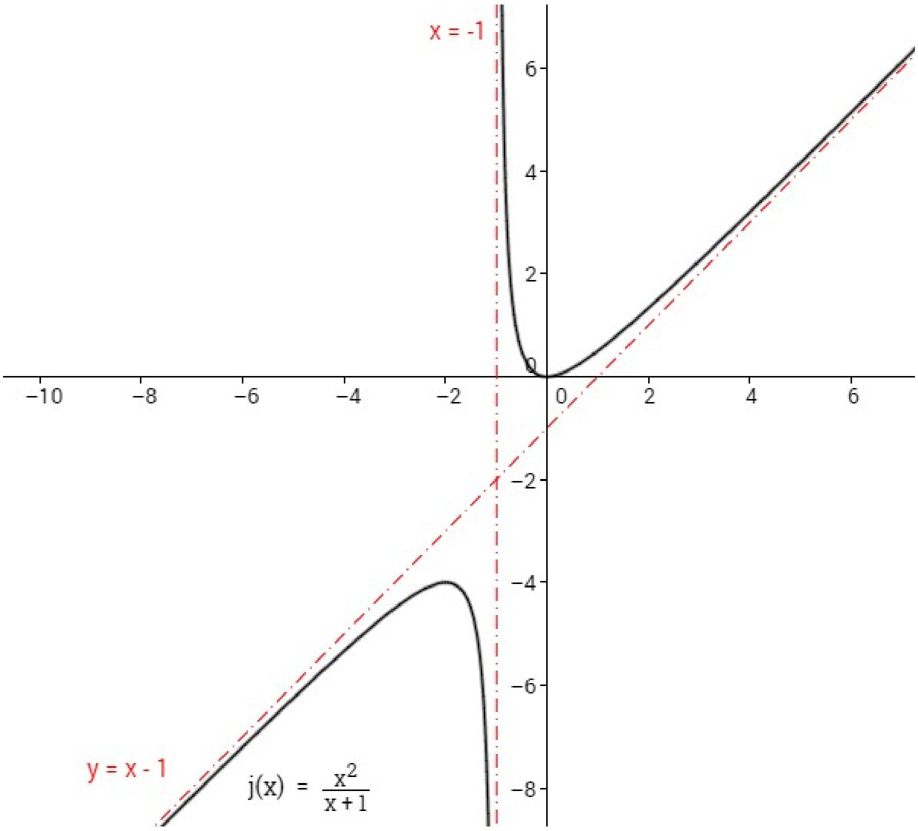
más y más a la asíntota, sin tocarla, se da para valores enormes $x \to +\infty$.



Por último presentamos un ejemplo de gráfica con asíntota oblicua con la función $j(x) = \frac{x^2}{x+1}$, que posee además una asíntota vertical en $x=-1$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x+1} = x-1$$ → Asíntota oblicua $y=x-1$ para valores $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x+1} = x-1$$ → Asíntota oblicua $y=x-1$ para valores $x \to -\infty$



Poco a poco aprenderemos a resolver por nosotros solos, analíticamente, estos límites. ¡Paciencia, todo llegará!