

Problemas de continuidad y límites resueltos

Razona de manera justificada el dominio de la siguientes funciones.

a) $f(x) = \ln(\sqrt{x} - 1)$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}}$

c) $f(x) = \frac{x}{\cos(x)}$

a) La raíz cuadrada solo admite discriminantes nulos o positivos. Mientras que el logaritmo solo admite argumentos positivos. Por lo tanto:

$$\text{Dom}(\sqrt{x} - 1) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \text{Dom}(\ln(\sqrt{x} - 1)) = (1, +\infty)$$

b) La raíz cuadrada solo admite discriminantes nulos o positivos. Y un cociente de polinomios no está definido en aquellos puntos que anulan el denominador. Por lo tanto:

$$\text{Dom}\left(\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}\right) = \mathbb{R} - \{2, 3\}$$

$$\frac{x-1}{(x-2)(x-3)} \geq 0 \text{ si } x \geq 1 \text{ y } x \notin [2, 3] \rightarrow \text{Dom}\left(\sqrt{\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}}\right) = [1, 2) \cup (3, +\infty)$$

c) La función coseno se anula periódicamente en $x = \dots, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$. Por lo tanto:

$$\text{Dom}\left(\frac{x}{\cos(x)}\right) = \mathbb{R} - (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Estudia la continuidad de la siguiente función en los puntos $x=1$ y $x=5$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ 2x - 4 & \text{si } 1 \leq x \leq 5 \\ \ln(x-5) & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

Estudiemos la continuidad en $x=1$.

$$\exists f(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 4x + 3}{x-1} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 4x + 3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-3) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 4) = -2$$

$$f(1) = -2 = L$$

La función es continua en $x=1$.

Estudiemos la continuidad en $x=5$.

$$\exists f(5) = 2 \cdot 5 - 4 = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} (2x - 4) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \ln(x-5) = -\infty$$

La función presenta una discontinuidad no evitable de salto infinito en $x=5$.

Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2}$

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} = \frac{\infty - \infty}{\infty} \rightarrow \text{Indeterminación}$

Multiplicamos y dividimos por conjugado del numerador.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - x - 1}{x + x + 1 + 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{2x + 1 + 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1}} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0} = \infty \rightarrow \text{Estudiamos límites laterales}$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Sea la función $f(x) = a + \frac{bx+c}{x^2+1}$, donde a, b y c son números reales. Calcula los valores de a, b y c sabiendo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$, la gráfica de $f(x)$ corta al eje OY en el punto de ordenada $y=2$ y que la gráfica pasa por el punto $(1, \frac{3}{2})$.

Expresamos la función como una única fracción.

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + a + c}{x^2 + 1}$$

Interpretamos analíticamente cada una de las frases del enunciado.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + a + c}{x^2 + 1} = \frac{a}{1} = a \rightarrow a = 3$$

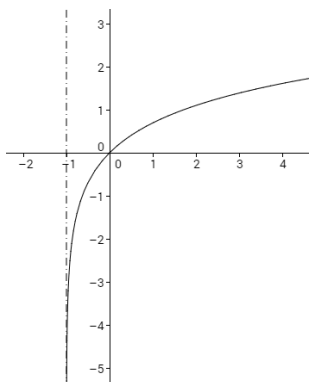
$$\text{Corte eje } OY \text{ en } y=2 \rightarrow f(0)=2 \rightarrow \frac{a+c}{1}=2 \rightarrow \frac{3+c}{1}=2 \rightarrow c=-1$$

$$f(x) \text{ pasa por } (1, \frac{3}{2}) \rightarrow f(1)=\frac{3}{2} \rightarrow \frac{a+b+a+c}{1+1}=\frac{3}{2} \rightarrow \frac{b+5}{2}=\frac{3}{2} \rightarrow b=-2$$

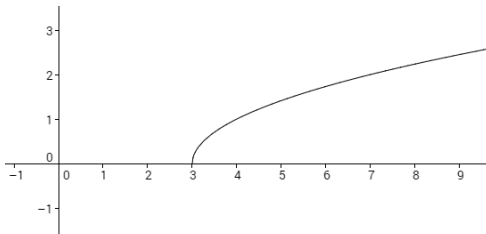
Relaciona de manera justificada las siguientes funciones con sus respectivas gráficas. Debes razonar con el máximo detalle posible.

- $f(x) = \ln(x+1)$
- $g(x) = \frac{x}{x-1}$
- $h(x) = \sqrt{x-3}$

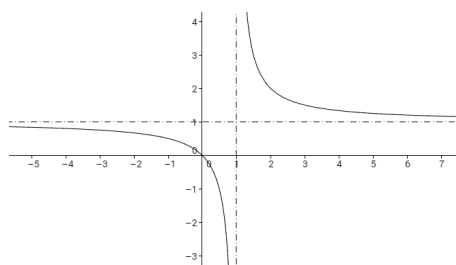
a)



b)



c)



$f(x) = \ln(x+1)$ se corresponde con la gráfica **a)** ya que la función está definida siempre que el argumento del logaritmo sea positivo, por lo que presenta una asíntota vertical para valores a la derecha de $x = -1$.

Además, la función logaritmo es una función estrictamente creciente y se dispara a infinito cuando $x \rightarrow \infty$.

Por último si $x=0 \rightarrow f(0) = \ln(0+1) = 0 \rightarrow$ La función corta a los ejes cartesianos en el origen de coordenadas $(0,0)$.

$g(x) = \frac{x}{x-1}$ se corresponde con la gráfica **c)**, ya que posee una asíntota vertical en $x=1$ (donde no está definida la función, por anularse el denominador) y una asíntota horizontal en $y=1$ que se corresponde con el límite $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$.

Además, la gráfica corta a los ejes cartesianos en el origen de coordenadas $(0,0)$, que se corresponde con el valor $g(0) = 0$.

$h(x) = \sqrt{x-3}$ se corresponde con la gráfica **b)**, ya que la función no está definida para discriminantes negativos, por lo que su dominio es $x \geq 3$.

Además, la función raíz cuadrada es estrictamente creciente y se dispara a infinito cuando $x \rightarrow \infty$.

Sea $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4x - 5}$.

a) Estudia la continuidad en $x = -1$ y en $x = 5$.

b) Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

Estudiemos la continuidad de la función en $x = -1$.

$$\nexists f(-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4x - 5} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 7x + 10}{(x+1)(x-5)} = \frac{18}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4x - 5} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 7x + 10}{(x+1)(x-5)} = \frac{18}{0^-} = -\infty$$

Discontinuidad no evitable de primera especie de salto infinito en $x = -1$.

Estudiemos la continuidad de la función en $x = 5$.

$$\nexists f(5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{(x-2)(x-5)}{(x+1)(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x-2}{x+1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4x - 5} = \frac{1}{2}$$

Discontinuidad evitable en $x = 5$.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$

Ya que tenemos un cociente de polinomios de grado dos, donde los coeficientes que acompañan a x^2 en el numerador y en el denominador es 1.

Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x - 5\sqrt{x})$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x} - \frac{2+x}{1+x} \right)$

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x - 5\sqrt{x}) = \infty - \infty \rightarrow \text{Indeterminación}$

Multipliquemos y dividimos por el conjugado.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x - 5\sqrt{x})(3x + 5\sqrt{x})}{3x + 5\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 - 25x}{3x + 5\sqrt{x}} = \infty$$

El límite en el infinito va a infinito por tener un cociente de polinomios, con el grado del numerador mayor que el grado del denominador.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x} - \frac{2+x}{1+x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x} \right) - \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2+x}{1+x} \right) = 1 - 1 = 0$

El límite de la diferencia es la diferencia de los límites. Y en cada término tenemos un cociente de polinomios del mismo grado en numerador y denominador.

Determina a y b para que la función sea continua en $x=0$ y en $x=3$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x < 0 \\ ax+b & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{x^2-9}{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

La función es continua en $x=0$ si se cumplen los siguientes requisitos.

$$\exists f(0) = a \cdot 0 + b = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2+1) = 0+1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax+b) = b$$

Límites laterales iguales $\rightarrow b=1 \rightarrow$ Existe el límite y vale $L=1$

$$f(0) = 1 = L$$

La función es continua en $x=3$ si se cumplen los siguientes requisitos.

$$\exists f(3) = a \cdot 3 + b = 3a+1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} (ax+b) = 3a+1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x+3) = 6$$

Límites laterales iguales $\rightarrow 3a+1=6 \rightarrow a=\frac{5}{3}$

$$f(3) = 6 = L$$

Calcula el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 1 + \sqrt{\frac{3-x}{5-x}}$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2x+3)}}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{2x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) $f(x) = 1 + \sqrt{\frac{3-x}{5-x}}$

El argumento de la raíz debe ser mayor o igual a cero. Además, el denominador de la fracción no puede anularse.

$$\frac{3-x}{5-x} \geq 0 \rightarrow \text{Raíz del numerador } x=3 ; \text{Raíz del denominador } x=5$$

Evaluamos la inecuación en los siguientes intervalos.

$$(-\infty, 3) \rightarrow x=0 \rightarrow \frac{3}{5} > 0 \rightarrow \text{Intervalo perteneciente al dominio}$$

$$(3, 5) \rightarrow x=4 \rightarrow \frac{3-4}{5-4} < 0 \rightarrow \text{Intervalo no perteneciente al dominio}$$

$$(5, \infty) \rightarrow x=10 \rightarrow \frac{3-10}{5-10} > 0 \rightarrow \text{Intervalo perteneciente al dominio}$$

La solución será la unión de los intervalos permitidos, además de las raíces del numerador. Es decir:

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, 3] \cup (5, \infty)$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2x+3)}}$$

Nuevamente imponemos la condición de que el argumento de la raíz no pueda anularse. Y tampoco puede ser cero, ya que la raíz está dividiendo en la fracción.

$$(x+1)(2x+3) > 0 \rightarrow \text{Raíces } x=-1, \quad x=-\frac{3}{2}$$

Evaluamos el argumento en los siguientes intervalos.

$$(-\infty, -\frac{3}{2}) \rightarrow x=-10 \rightarrow (-10+1)(2(-10)+3) > 0 \rightarrow \text{intervalo perteneciente al dominio}$$

$$(-\frac{3}{2}, -1) \rightarrow x=-\frac{5}{4} \rightarrow (-\frac{5}{4}+1)(2(-\frac{5}{4})+3) < 0 \rightarrow \text{intervalo no perteneciente al dominio}$$

$$(-1, \infty) \rightarrow x=0 \rightarrow (0+1)(2(0)+3) > 0 \rightarrow \text{intervalo perteneciente al dominio}$$

$$\text{Solución final} \rightarrow \text{Dom}(f) = (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (-1, \infty)$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{2x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Debemos estudiar el dominio de la función en cada tramo, además de la continuidad en el punto frontera.

Para $x < 0 \rightarrow f(x) = \frac{2x}{x-1}$ es una función continua salvo en $x=1$. Pero ese valor no pertenece al intervalo $x < 0 \rightarrow$ La función es continua para todo valor $x < 0$.

Para $x > 0 \rightarrow f(x) = \sqrt{2x+1}$ es una función con discriminante positivo, ya que para $x > 0$ el argumento $2x+1$ siempre es positivo $\rightarrow$ La función es continua para todo valor $x > 0$.

Debemos estudiar la continuidad en el punto frontera $x=0$, aplicando las tres condiciones de continuidad de una función en un punto.

$$\exists f(0)=\frac{0}{0-1}=0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x-1}=0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{2x+1}=1 \rightarrow \text{Los límites laterales no coinciden}$$

La función no continua en $x=0 \rightarrow \text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{0\}$

4. Realiza la composición $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ de la siguiente pareja de funciones.

a) $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{x-2}$

b) $f(x)=x^2-x-2$, $g(x)=\sqrt{2x-4}$

c) $f(x)=\frac{x+3}{x-3}$, $g(x)=\frac{x^2-1}{x}$

a) $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{x-2}$

$$(f \circ g)(x)=f\left(\frac{1}{x-2}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x-2}}=x-2 \quad , \quad (g \circ f)(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x}-2}=\frac{x}{1-2x}$$

b) $f(x)=x^2-x-2$, $g(x)=\sqrt{2x-4}$

$$(f \circ g)(x)=f(\sqrt{2x-4})=(\sqrt{2x-4})^2-\sqrt{2x-4}-2=2x-4-\sqrt{2x-4}-2=2x-\sqrt{2x-4}-6$$

$$(g \circ f)(x)=g(x^2-x-2)=\sqrt{2(x^2-x-2)-4}=\sqrt{2x^2-2x-8}$$

c) $f(x)=\frac{x+3}{x-3}$, $g(x)=\frac{x^2-1}{x}$

$$(f \circ g)(x)=f\left(\frac{x^2-1}{x}\right)=\frac{\frac{x^2-1}{x}+3}{\frac{x^2-1}{x}-3}=\frac{x^2+3x-1}{x^2-3x-1}$$

$$(g \circ f)(x)=g\left(\frac{x+3}{x-3}\right)=\frac{\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^2-1}{\frac{x+3}{x-3}}=\frac{\frac{(x+3)^2-(x-3)^2}{(x-3)^2}}{\frac{x+3}{x-3}}=\frac{12x}{(x-3)(x+3)}=\frac{12x}{x^2-9}$$

Rompe a trozos la función $f(x)=|x^2+1|+|x-1|$

Obtenemos las raíces de los polinomios de cada argumento de los valores absolutos.

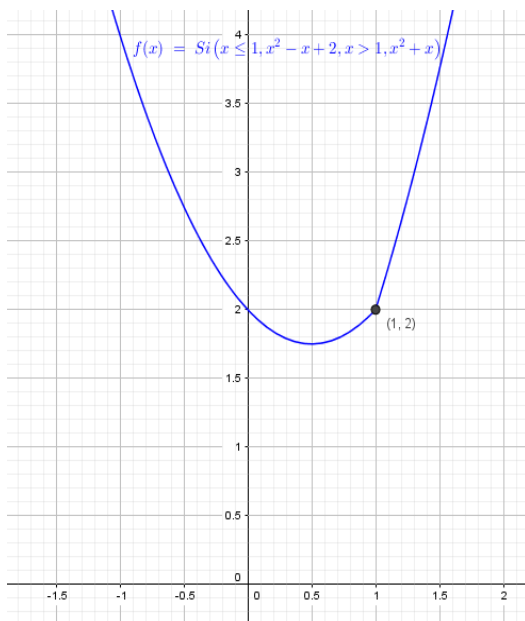
$$x^2+1=0 \rightarrow \nexists \text{ solución} \in \mathbb{R} \rightarrow x^2+1>0 \forall x \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto, podemos quitar las barras de valor absoluto de $|x^2+1|$ para cualquier valor real.

$x-1=0 \rightarrow x=1 \rightarrow$ Estudiamos el signo de $x-1$ en los siguientes intervalos:

$$(-\infty, 1) \rightarrow x-1 < 0 \rightarrow |x-1| = -(x-1)$$

$$(1, \infty) \rightarrow x-1 > 0 \rightarrow |x-1| = x-1$$



Por lo que la función a trozos queda:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1-(x-1) & \text{si } x \leq 1 \\ x^2+1+x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2-x+2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2+x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calcula los siguientes límites en el infinito.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-x+3}{2-x^2-2x^3}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x+6}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-x+3}{2-x^2-2x^3} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow$ Indeterminación $\rightarrow$ Cociente de polinomios de igual grado

El límite coincide con el cociente de los coeficientes que acompañan a la máxima potencia (x^3) .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-x+3}{2-x^2-2x^3} = \frac{1}{-2}$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x+6} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow$ Indeterminación

El numerador lo podemos ver, en el infinito, como un polinomio de grado $\frac{1}{2}$. Y el denominador como un polinomio de grado 1. Como el grado del denominador es mayor que el del numerador, el cociente tiende a 0 cuando la variable tiende a infinito.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x+6} = 0$$

1. Calcula las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-9}$

b) $f(x) = \frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}$

c) $f(x) = \frac{2x+5}{3x}$

a) Las asíntotas verticales aparecen en los valores que anulan al denominador.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x-1}{x^2-9} = \frac{5}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-1}{x^2-9} = \frac{5}{0^+} = +\infty \rightarrow x=3$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x-1}{x^2-9} = \frac{5}{0^+} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x-1}{x^2-9} = \frac{5}{0^-} = -\infty \rightarrow x=-3$$

La asíntota horizontal se obtiene estudiando el comportamiento de la función en el infinito.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{x^2-9} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

Grado numerador < Grado denominador $\rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{x^2-9} = 0 \rightarrow y=0$

Al existir asíntota horizontal, no tendremos oblicua.

b) Las asíntotas verticales aparecen en los valores que anulan al denominador.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2} = \frac{2}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2} = \frac{2}{0^+} = +\infty \rightarrow x=-1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2} = \frac{-13}{0^+} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2} = \frac{-13}{0^-} = +\infty \rightarrow x=-2$$

La asíntota horizontal se obtiene estudiando el comportamiento de la función en el infinito.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\text{Grado numerador} > \text{Grado denominador} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x^2 + 3}{x^2 + 3x + 2} = \infty$$

Al no existir asíntota horizontal, estudiamos la oblicua $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x^2 + 3}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\text{Grado numerador} = \text{Grado denominador} \rightarrow m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x^2 + 3}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \frac{3}{1} = 3$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^3 + 2x^2 + 3}{x^2 + 3x + 2} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7x^2 - 6x + 3}{x^2 + 3x + 2} = \frac{-7}{1} = -7$$

$$\text{Asíntota oblicua} \rightarrow y = 3x - 7$$

c) Las asíntotas verticales aparecen en los valores que anulan al denominador.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x-1}{x^2-9} = \frac{5}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+5}{3x} = \frac{5}{0^+} = +\infty \rightarrow x=0$$

La asíntota horizontal se obtiene estudiando el comportamiento de la función en el infinito.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+5}{3x} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\text{Grado numerador} = \text{Grado denominador} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+5}{3x} = \frac{2}{3} \rightarrow y = \frac{2}{3}$$

Al existir asíntota horizontal, no tendremos oblicua.

5. Calcula el valor de k para que la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} & \text{si } x \neq 1 \text{ y } x \neq 2 \\ -\sqrt{2k+1} & \text{si } x = 1 \end{cases}$ sea continua en $x=1$.

Aplicamos las tres condiciones de continuidad de una función en un punto.

$$\exists f(1) = -\sqrt{2k+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{Indeterminación} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+1)}{(x-2)} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (-\sqrt{2k+1}) = -\sqrt{2k+1}$$

$$\text{Igualamos los límites laterales} \rightarrow L = -2 = -\sqrt{2k+1} \rightarrow 4 = 2k+1 \rightarrow k = \frac{3}{2}$$

$$\text{Y con este valor también se cumple} \rightarrow f(1) = L = -2$$

Calcula el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$

b) $f(x) = \frac{3x-7}{x-6}$

c) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$

Necesitamos un argumento de la raíz mayor o igual a cero. Por lo tanto.

$$x^2 + 2x - 3 \geq 0$$

Resolvemos la inecuación obteniendo las soluciones del polinomio de grado dos

$$P(x) = x^2 + 2x - 3 \rightarrow x = -3, x = 1$$

Evaluamos el signo del polinomio en los siguientes intervalos.

$$(-\infty, -3) \rightarrow P(-10) > 0$$

$$(-3, 1) \rightarrow P(0) < 0$$

$$(1, \infty) \rightarrow P(20) > 0$$

Nos quedamos con los intervalos donde el polinomio es positivo. El dominio de la función resulta:

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, -3] \cup [1, \infty)$$

b) $f(x) = \frac{3x-7}{x-6}$

En un cociente de polinomios, el dominio son todos los reales menos los valores que anulan al denominador $\rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{6\}$

c) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

El dominio son todos los reales, por ser una función polinómica.

Calcula a, b, c en $f(x) = a + \frac{bx+c}{x^2+1}$ sabiendo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$, la gráfica corta al eje de ordenadas en $y=2$ y la función pasa por el punto $(1, \frac{3}{2})$.

Aplicamos tres condiciones para obtener los tres parámetros.

Primera condición: límite en el infinito (condición de asíntota horizontal)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(a + \frac{bx+c}{x^2+1} \right) = 3 \rightarrow a+0=3 \rightarrow a=3$$

Segunda condición: para $x=0$ la ordenada vale $y=2$

$$f(0)=2 \rightarrow 3+\frac{0+c}{0+1}=2 \rightarrow c=-1$$

Tercera condición: para $x=1$ la ordenada vale $y=\frac{3}{2}$

$$f(1)=\frac{3}{2} \rightarrow 3+\frac{b-1}{1+1}=\frac{3}{2} \rightarrow \frac{b-1}{2}=\frac{-3}{2} \rightarrow b=-2$$

2. Por el alquiler de un coche cobran 100 € diarios más 0.30 € por kilómetro. Encuentra la ecuación de la recta que relaciona el coste diario con el número de kilómetros y represéntala. Si en un día se ha hecho un total de 300 km, ¿qué importe debemos abonar?

En la recta a representar tenemos:

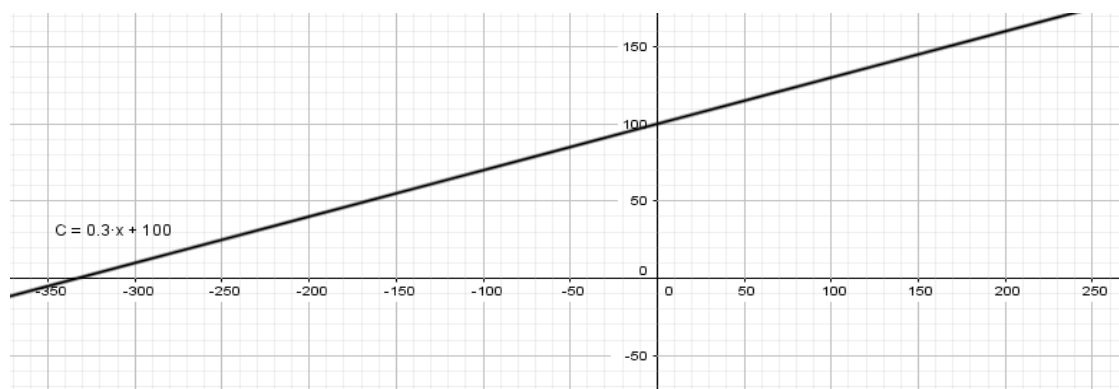
Variable independiente $\rightarrow$ número de kilómetros $\rightarrow x$

Variable dependiente $\rightarrow$ coste $\rightarrow C(x)$

Valor mínimo de un día $\rightarrow 100\text{€}$

Ecuación de la recta $\rightarrow C(x)=0,3 \cdot x+100$

Si recorremos en un día un total de 300 kilómetros $\rightarrow C(300)=0,3 \cdot 300+100=190\text{€}$



3. Se sabe que la función cuadrática de ecuación $y=ax^2+bx+c$ pasa por los puntos (1,1), (0, 0) y (-1,1). Calcula a, b y c.

Imponemos las condiciones de los tres puntos, y tendremos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas.

$$(1,1) \rightarrow 1=a+b+c \rightarrow 1=a+b$$

$$(0,0) \rightarrow 0=c$$

$$(-1,1) \rightarrow 1=a-b+c \rightarrow 1=a-b$$

Sumamos las dos ecuaciones finales $\rightarrow 2=2a \rightarrow a=1 \rightarrow b=0$

10. Representa gráficamente $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ tomando como referencia la gráfica de $g(x) = x^2$.

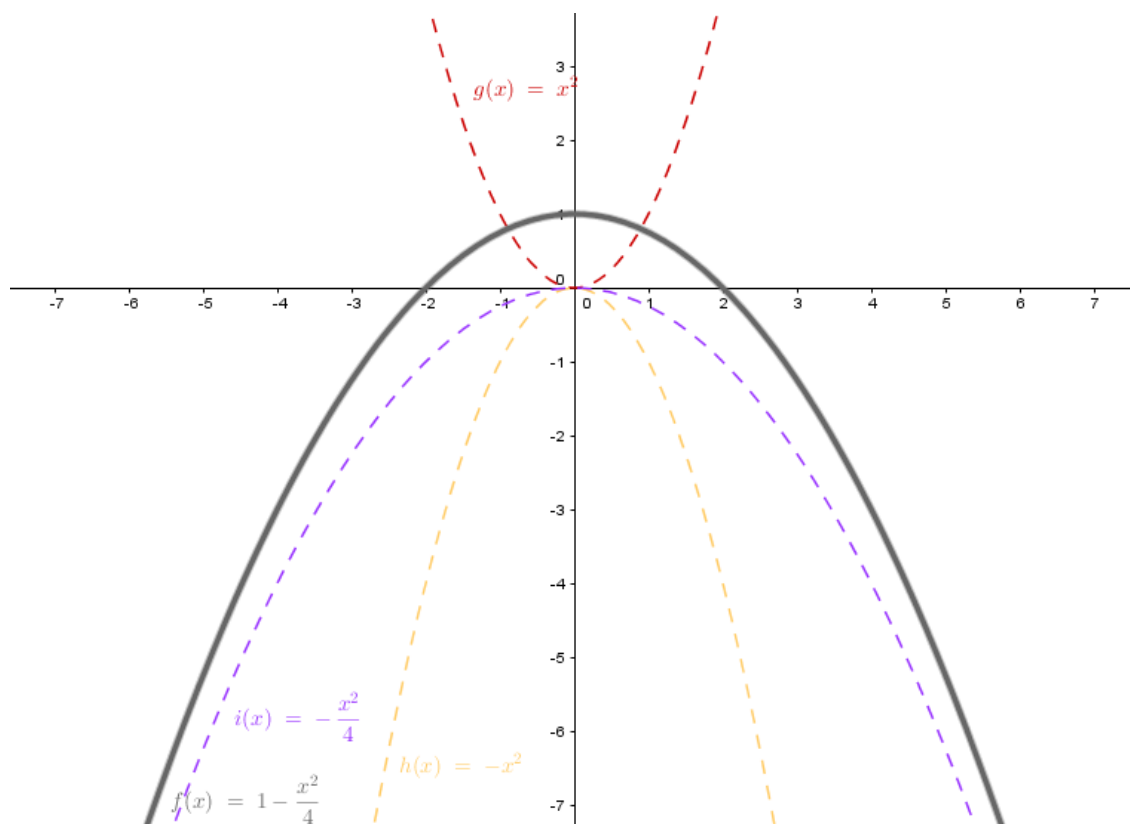
Mostramos en un mismo sistema de coordenadas las funciones:

$g(x) = x^2 \rightarrow$ parábola cóncava hacia arriba, con vértice en $(0,0)$

$h(x) = -x^2 \rightarrow$ reflejamos la parábola $g(x)$ respecto al eje horizontal

$i(x) = \frac{-x^2}{4} \rightarrow$ abrimos las ramas de las parábolas $h(x)$ al multiplicar por un número inferior a 1

$f(x) = 1 - \frac{x^2}{4} \rightarrow$ subimos verticalmente una unidad la gráfica de $i(x)$



3. Una barra de hierro dulce de 30 cm de larga a 0°C se calienta, y su dilatación viene dada por una función lineal $L = a + bt$, donde L es la longitud en cm y t es la temperatura $^\circ\text{C}$.

a) Halla la expresión analítica de L , sabiendo que $L(1) = 30,0005 \text{ cm}$ y que $L(3) = 30,0015 \text{ cm}$.

b) Representa gráficamente la función obtenida.

a) El crecimiento de la barra depende linealmente de la temperatura $\rightarrow L = a + bt \rightarrow$ Si representamos en el eje horizontal la variable tiempo y en el eje vertical la variable longitud, tendremos una recta. Y una recta queda definida si conocemos dos puntos.

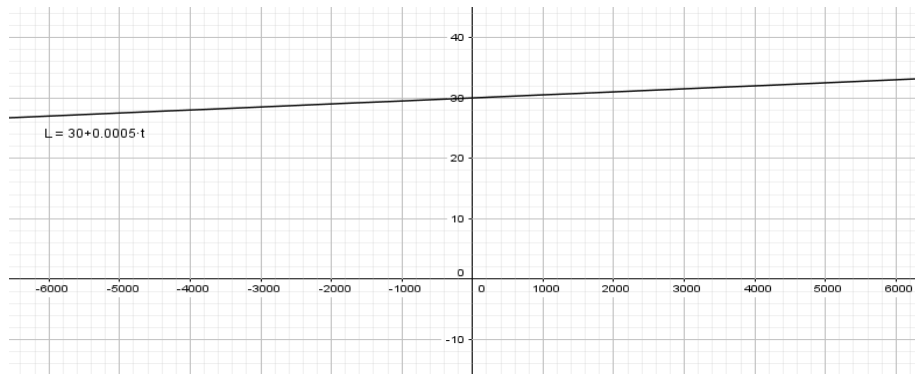
$$L(1) = 30,0005 \text{ cm} \rightarrow 30,0005 = a + b \cdot 1$$

$$L(3) = 30,0015 \text{ cm} \rightarrow 30,0015 = a + b \cdot 3$$

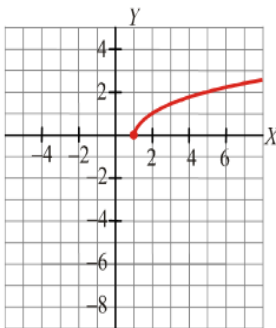
Si restamos ambas ecuaciones $\rightarrow -0,001 = -2b \rightarrow b = 0,0005 \rightarrow a = 30$

La expresión analítica queda $\rightarrow L = 30 + 0,0005 \cdot t$

b) Pintamos la gráfica con Geogebra, ajustando adecuadamente la división de los ejes para apreciar el crecimiento de la longitud en función de la temperatura.



Dada la gráfica de $f(x)$ obtener los valores de $f^{-1}(0)$ y $f^{-1}(2)$.



Dos funciones inversas $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ cumplen que la imagen de $f(x)$ es el dominio de $f^{-1}(x)$. Por lo tanto, si $f(x_0) = y_0 \rightarrow f^{-1}(y_0) = x_0$

$$f^{-1}(0) \rightarrow \text{¿Qué valor } x_0 \text{ cumple } f(x_0) = 0 ? \rightarrow f(1) = 0 \rightarrow x_0 = 1 \rightarrow f^{-1}(0) = 1$$

$$f^{-1}(2) \rightarrow \text{¿Qué valor } x_0 \text{ cumple } f(x_0) = 2 ? \rightarrow f(4) = 2 \rightarrow x_0 = 4 \rightarrow f^{-1}(2) = 4$$

Halla la inversa de:

a) $f(x) = \frac{2x-1}{3}$

b) $f(x) = \frac{-x+3}{2}$

a) Despejamos la variable $x \rightarrow 3y = 2x - 1 \rightarrow \frac{3y+1}{2} = x$

Intercambiamos el nombre de las variables $\rightarrow \frac{3x+1}{2} = y$

La función inversa resulta $\rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{2}$

b) Despejamos la variable $x \rightarrow 2y = -x + 3 \rightarrow 3 - 2y = x$

Intercambiamos el nombre de las variables $\rightarrow 3 - 2x = y$

La función inversa resulta $\rightarrow f^{-1}(x) = 3 - 2x$