

EJERCICIOS RESUELTOS FUNCIONES ELEMENTALES

Cuestión 1.- Dadas las siguientes funciones, se pide:

- | | | | |
|-----------------|---------------------------|-----------------------|--------------|
| a) Dominio | b) Representación gráfica | c) Imagen o recorrido | d) Monotonía |
| e) Acotación | f) Extremos relativos | g) Extremos absolutos | h) Simetría |
| i) Periodicidad | | | |

$$1^{\circ}) f(x) = \begin{cases} -2x^2 + x + 3 & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ \ln x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$2^{\circ}) g(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \in (-\infty, 2) \\ 2 & \text{si } x \in [2, +\infty) \end{cases}$$

$$3^{\circ}) h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2} & \text{si } x < 0 \\ 3^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

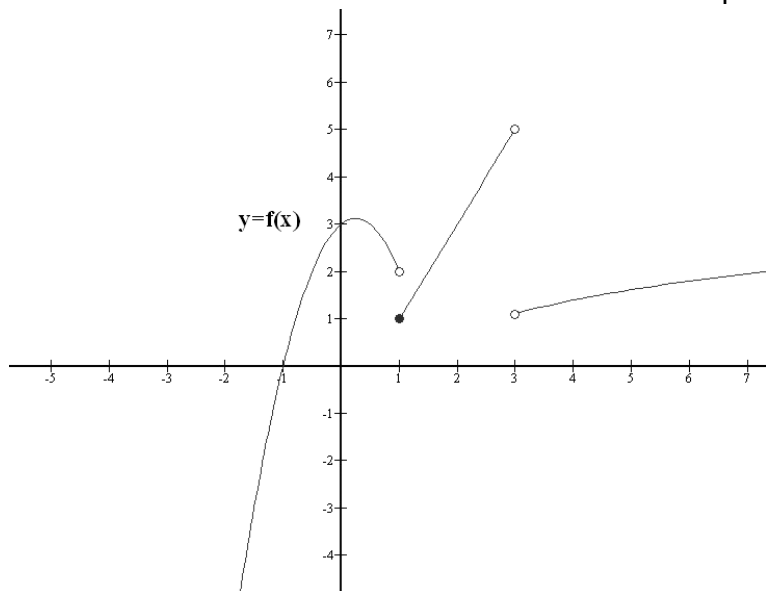
$$4^{\circ}) m(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2\pi \\ \sin x & \text{si } -2\pi < x < 2\pi \\ -2 & \text{si } x > 2\pi \end{cases}$$

$$5^{\circ}) n(x) = \begin{cases} \left| \frac{1}{x^3} \right| & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$6^{\circ}) r(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & \text{si } -5 \leq x < -1 \\ 2 & \text{si } x = -1 \\ -2x^2 + 2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si } 1 < x \leq 5 \end{cases}$$

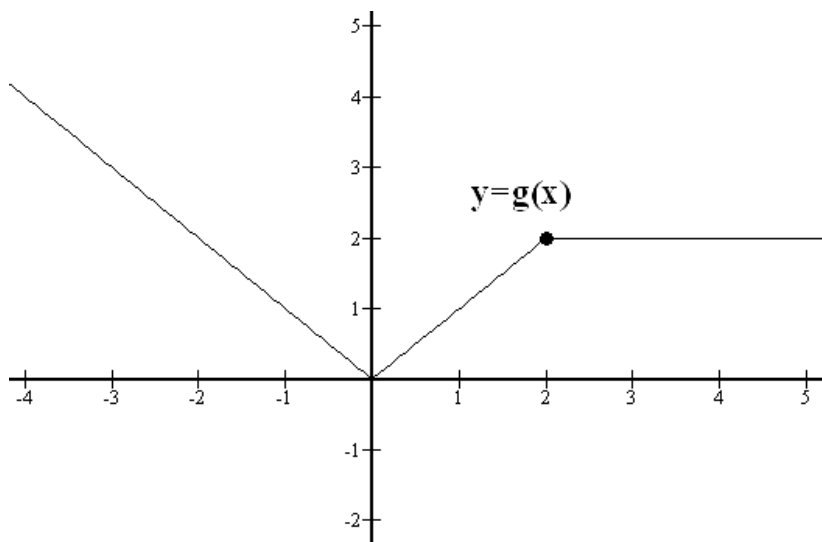
SOLUCIONES

- 1^o) a) Dom f = $\mathbb{R} - \{3\}$ c) Im f = $\mathbb{R}$ d) f creciente en $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$; f decreciente en $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$
 e) No está acotada f) Máximo relativo en $x_0 = \frac{1}{4}$ g) No tiene h) e i) No hay

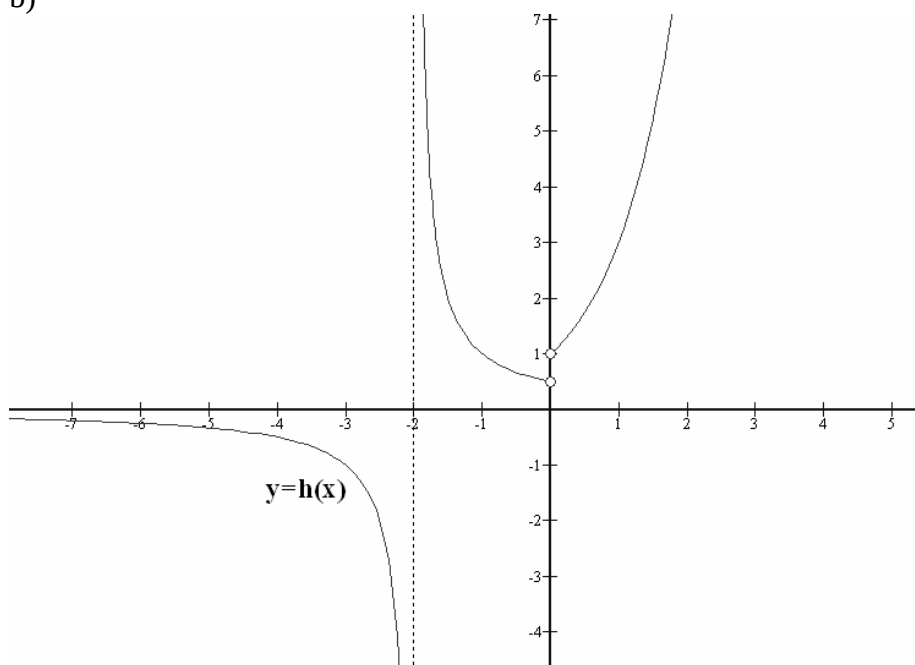


b)

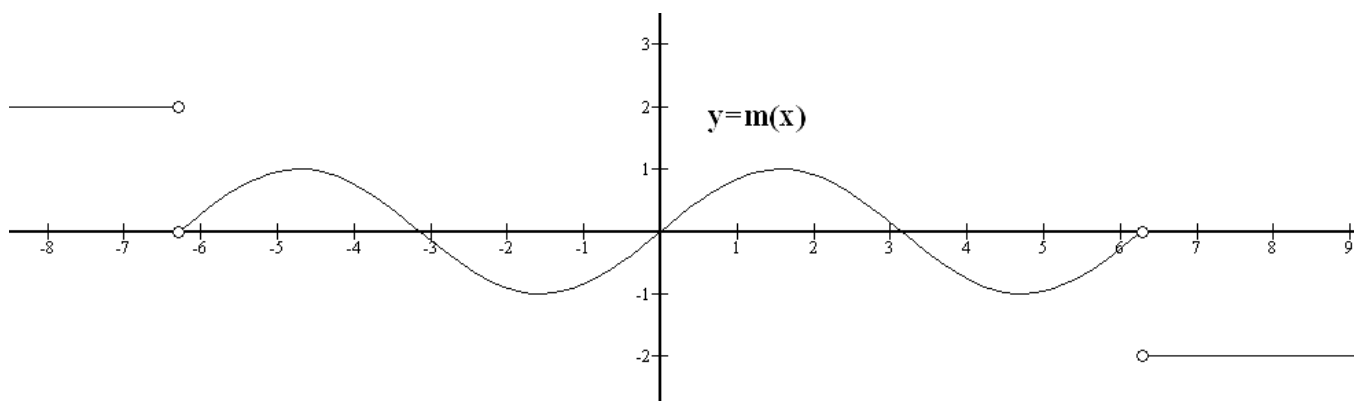
- 2^o) a) Dom g = $\mathbb{R}$ c) Recorr (g) = $[0, +\infty)$ d) f creciente en $(0, 2)$; f decreciente en $(-\infty, 0)$; f constante en $(2, +\infty)$ e) Acotada inferiormente con ínfimo 0 f) y g) Mínimo relativo y absoluto en $(0, 0)$ h) e i) No hay
 b)



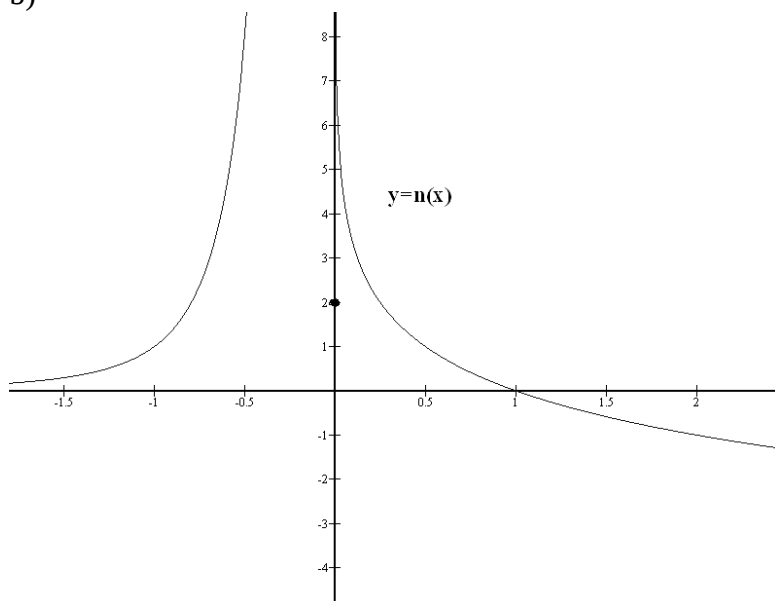
3º) a) $\text{Dom } h = \mathbb{R} - \{-2, 0\}$ c) $\text{Im } h = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ d) f creciente en $(0, +\infty)$; f decreciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ e) No está acotada f) y g) No tiene h) e i) No tiene b)



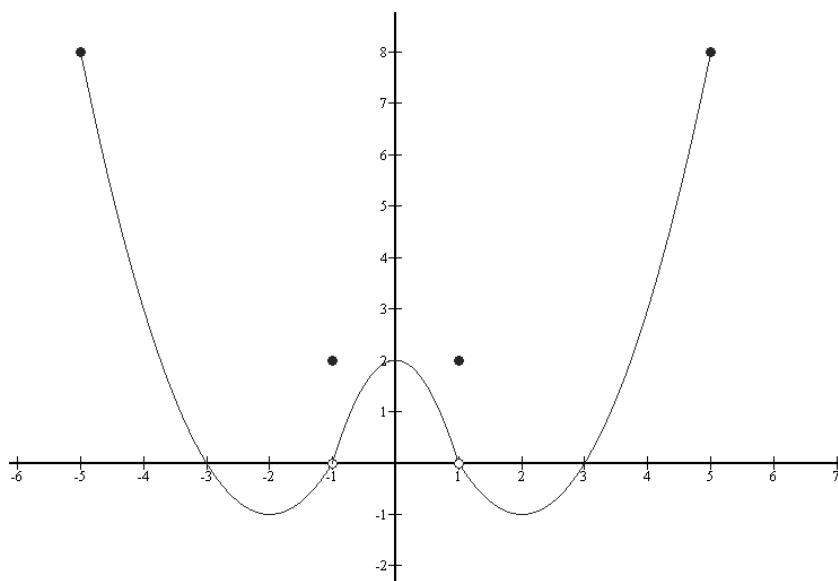
4º) a) $\text{Dom } m = \mathbb{R} - \{2\pi, -2\pi\}$ c) $\text{Im } h = [-1, 1] \cup \{2, -2\}$ d) f creciente en $\left(-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$; f decreciente en $\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$; f constante en $(-\infty, -2\pi)$; f constante en $(2\pi, +\infty)$ e) Acotada con supremo 2 e ínfimo -2 f) Máximos relativos en $\left(-\frac{3\pi}{2}, 1\right)$ y en $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$; Mínimos relativos en $\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$ g) Infinitos máximos absolutos para todo $x_0 < -2\pi$;) Infinitos mínimos absolutos para todo $x_0 > 2\pi$ h) Impar i) No tiene b)



5º) a) Dom $n = \mathbb{R}$ c) Im $h = \mathbb{R}$ d) f creciente en $(-\infty, 0)$; f decreciente en $(0, +\infty)$ e) No está acotada f) y g) No tiene h) e i) No tiene b)



6º) a) Dom $n = [-5, 5]$ c) Im $h = [-1, 8]$ d) f creciente en $(-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (2, 5)$; f decreciente en $(-5, -2) \cup (0, 1) \cup (1, 2)$ e) Acotada con supremo 8 e ínfimo -1 f) y g) Máximo relativo en $(0, 2)$ y mínimos relativos y absolutos en $(-2, -2)$ y $(2, -1)$. Máximos absolutos y relativos en $(-5, 8)$ y $(5, 8)$ en h) Par i) No tiene



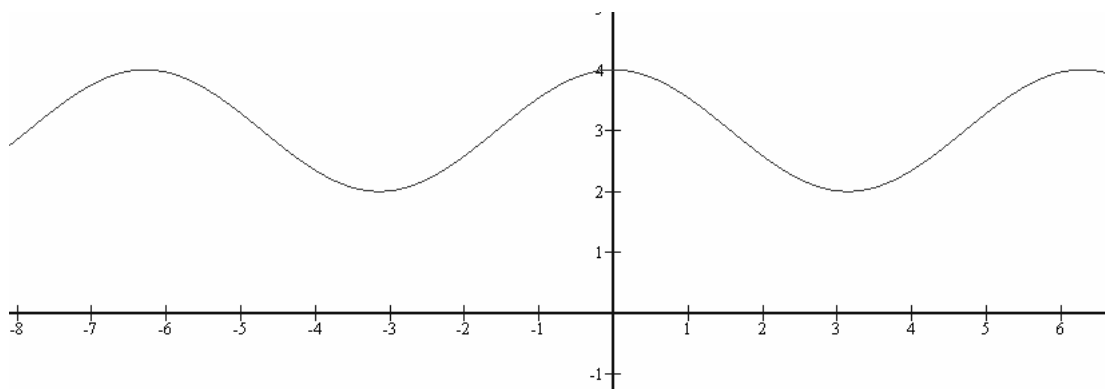
b)

Cuestión 2.- Representar gráficamente las siguientes funciones:

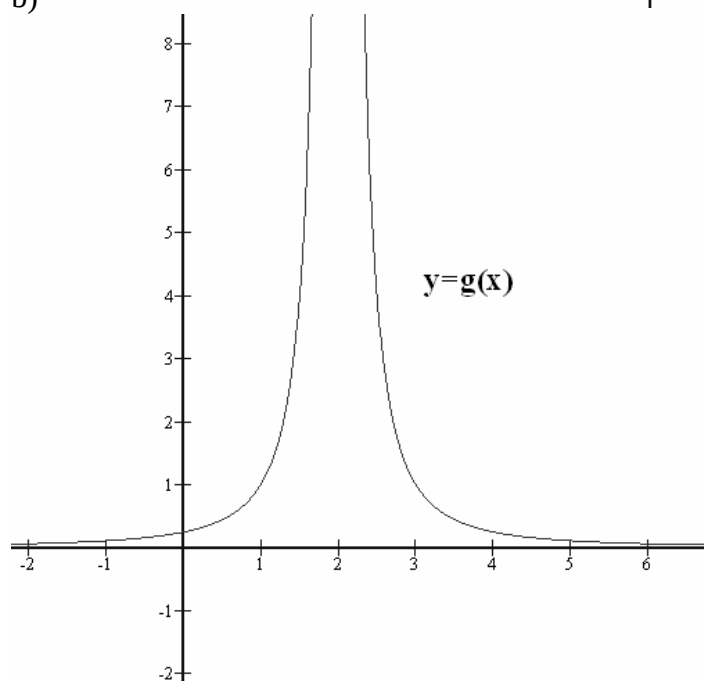
a) $f(x) = 3 + \cos x$ b) $g(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ c) $h(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

SOLUCIONES

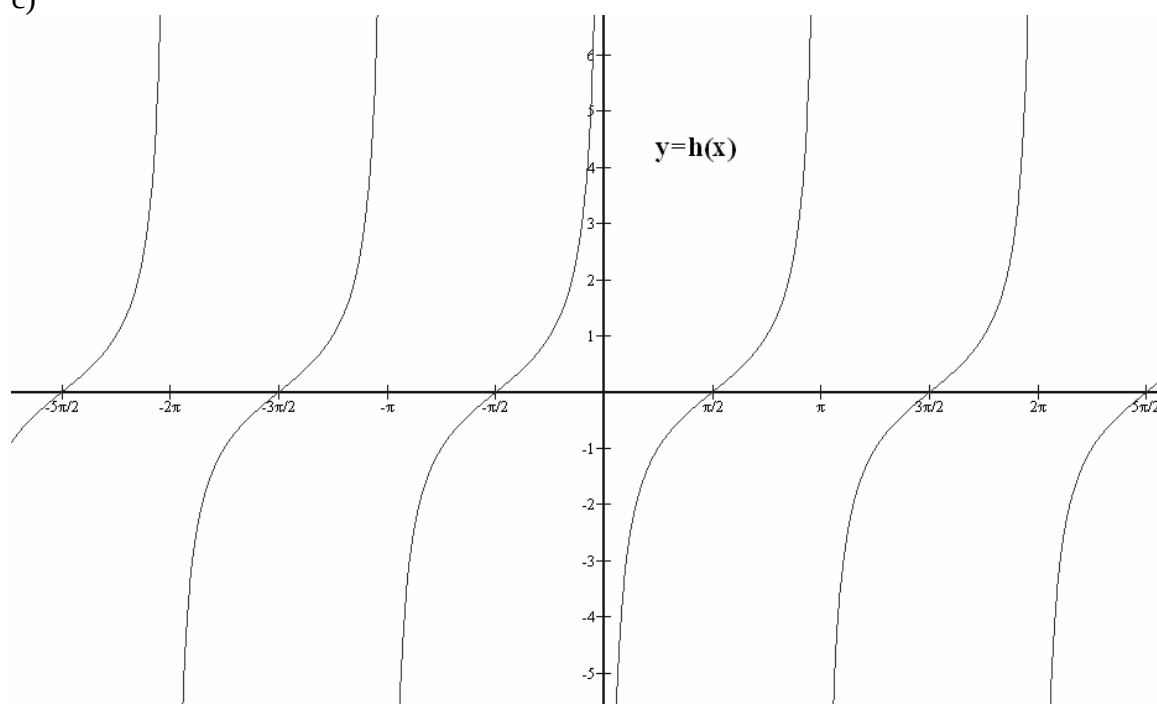
a)



b)



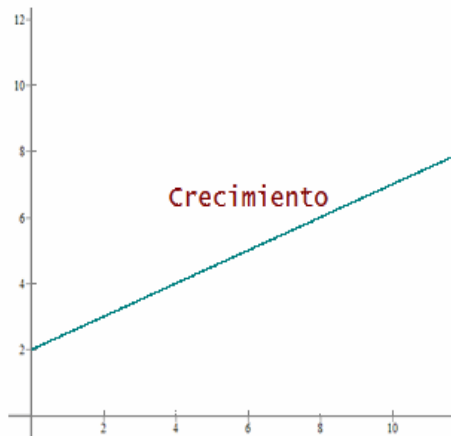
c)



Cuestión 3.-

En las 10 primeras semanas de cultivo de una planta, que medía 2 cm, se ha observado que su crecimiento es directamente proporcional al tiempo, viendo que en la primera semana ha pasado a medir 2.5 cm. Establecer una función a fin que dé la altura de la planta en función del tiempo y representar gráficamente.

- Altura inicial = 2cm
- Crecimiento semanal = $2.5 - 2 = 0.5$
- $y = 0.5 x + 2$



Cuestión 4.-

Representa la función constante:

$$y = -2$$



Cuestión 5.-

Representa la siguiente función, sabiendo que:

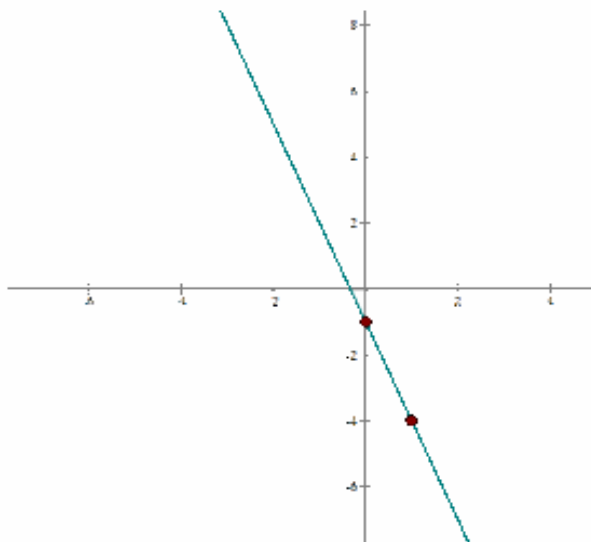
Tiene pendiente -3 y ordenada en el origen -1.

- $y = -3x - 1$

x $y = -3x - 1$

0 **-1**

1 **-4**

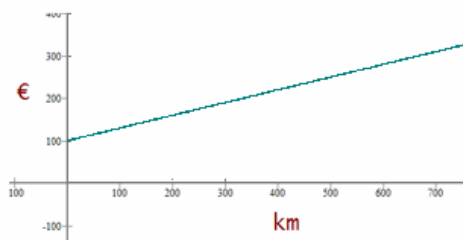


Cuestión 6.-

Por el alquiler de un coche cobran 100 € diarios más 0.30 € por kilómetro. Encuentra la ecuación de la recta que relaciona el coste diario con el número de kilómetros y represéntala. Si en un día se ha hecho un total de 300 km, ¿qué importe debemos abonar?

- $y = 0.3x + 100$

- $y = 0.3 \cdot 300 + 100 = 190 \text{ €}$



Cuestión 7.- Representa gráficamente la función cuadrática:

$$y = -x^2 + 4x - 3$$

1. Vértice

$$x_v = -4 / -2 = 2 \quad y_v = -2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = -1 \quad \mathbf{V(2, 1)}$$

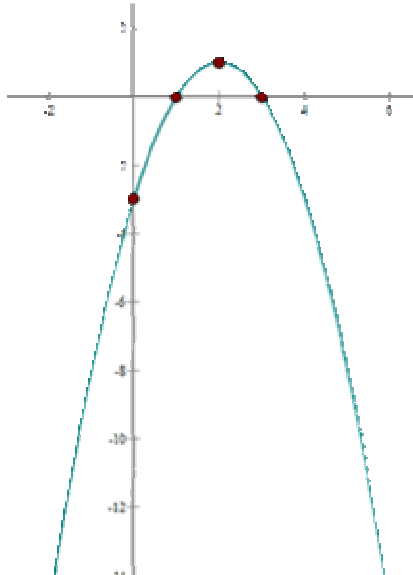
2. Puntos de corte con el eje OX.

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \quad \begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{matrix} \quad (3, 0) \quad (1, 0)$$

3. Punto de corte con el eje OY.

(0, -3)



Cuestión 8.-

Representa gráficamente la función cuadrática:

$$y = x^2 + x + 1$$

SOLUCIÓN:

1. Vértice

$$x_v = -1/2 \quad y_v = (-1/2)^2 + (-1/2) + 1 = 3/4$$

V(-1/2, 3/4)

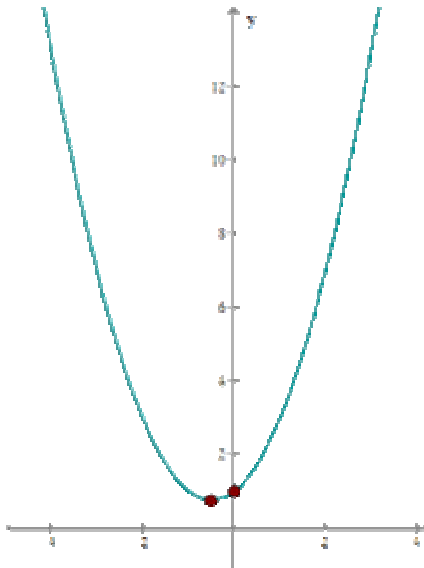
2. Puntos de corte con el eje OX.

$$x^2 + x + 1 = 0$$

No hay puntos de corte con OX.

3. Punto de corte con el eje OY.

(0, 1)



Cuestión 9.-

Una función cuadrática tiene una expresión de la forma $y = x^2 + ax + a$ y pasa por el punto (1, 9). Calcular el valor de a.

SOLUCIÓN:

$$9 = 1^2 + a \cdot 1 + a \rightarrow a = 4$$

Cuestión 10.-

Una parábola tiene su vértice en el punto V(1, 1) y pasa por el punto (0, 2). Halla su ecuación.

La coordenada x del vértice es 1.

$$1 = -b / 2a \quad b = -2a$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$f(0) = 2$$

$$2 = c$$

$$f(1) = 1$$

$$1 = a + b + 2 \quad 1 = a - 2a + 2$$

$$a = 1 \quad b = -2$$

$$y = x^2 - 2x + 2$$

Cuestión 11.-

Partiendo de la gráfica de la función $f(x) = x^2$, representa:

1. $y = x^2 + 2$

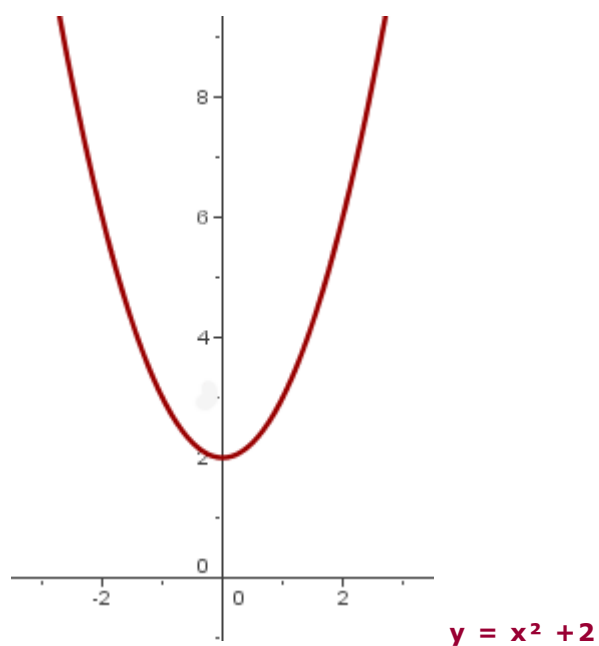
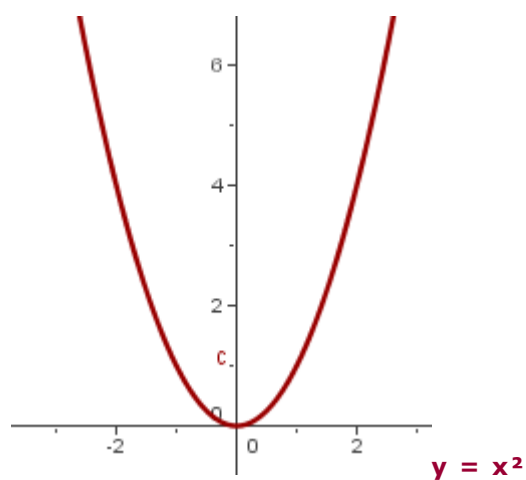
2. $y = x^2 - 2$

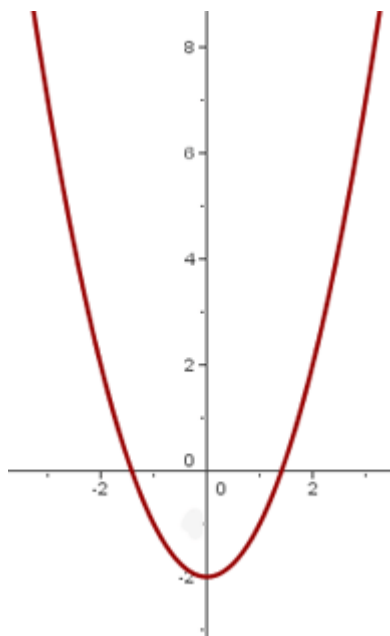
3. $y = (x + 2)^2$

4. $y = (x - 2)^2$

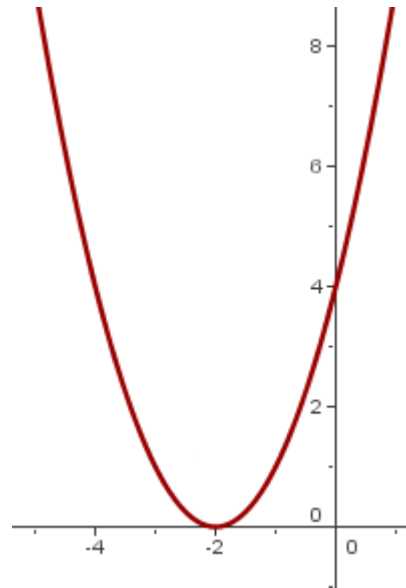
5. $y = (x - 2)^2 + 2$

6. $y = (x + 2)^2 - 2$

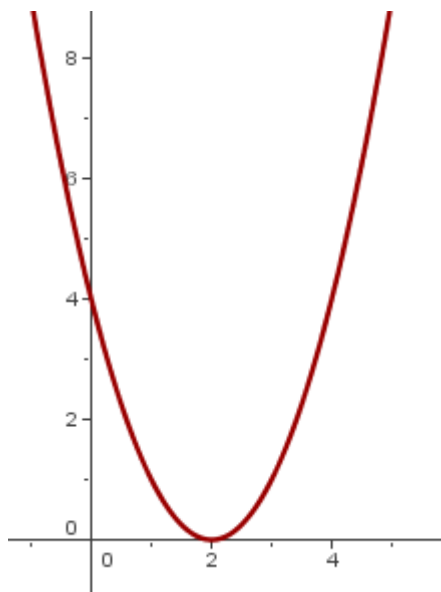




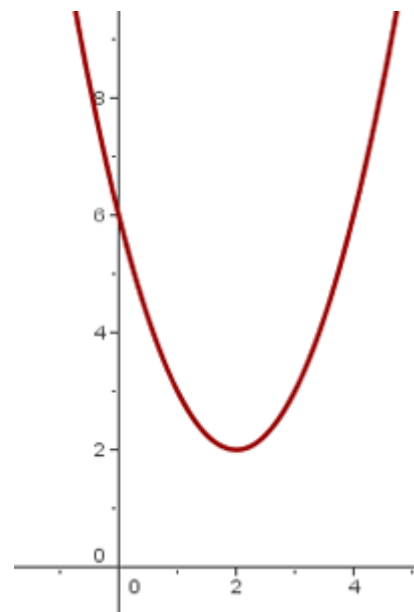
$$y = x^2 - 2$$



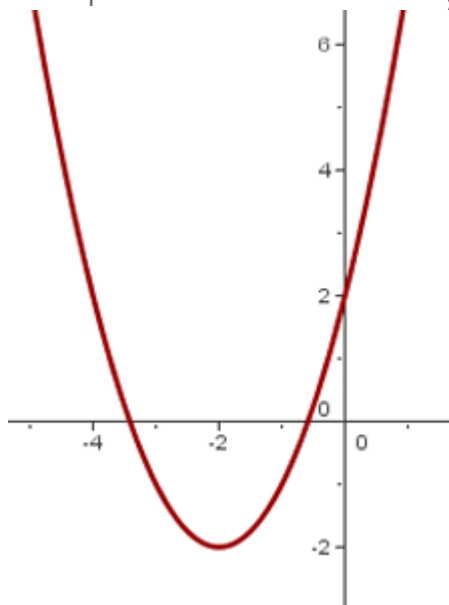
$$y = (x + 2)^2$$



$$y = (x - 2)^2$$



$$y = (x - 2)^2 + 2$$

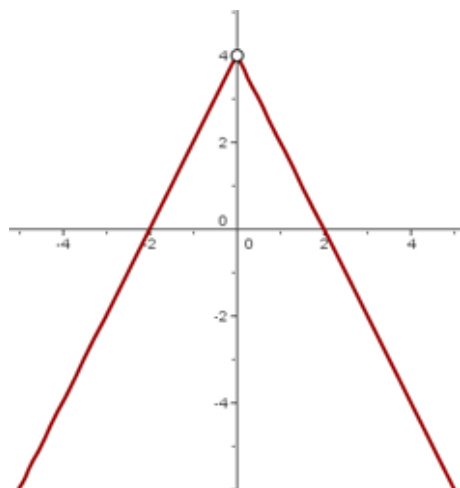


$$y = (x + 2)^2 - 2$$

Cuestión 12.- Representa las función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x > 0 \\ 4 - 2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

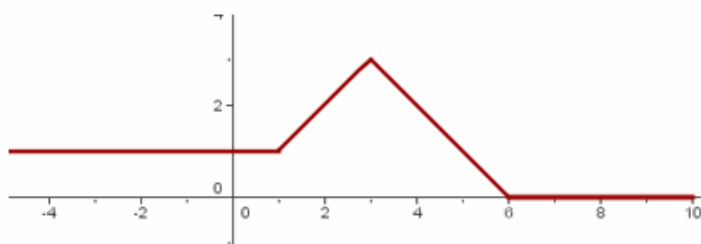
SOLUCIÓN:



Cuestión 13.-

Representa la función definida a trozos:

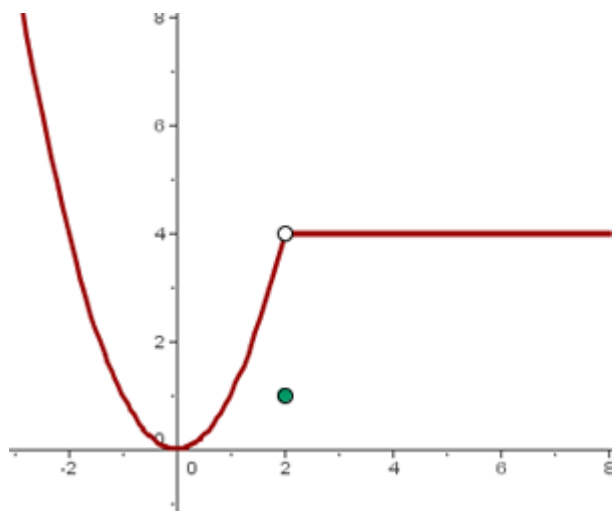
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ -x + 6 & \text{si } 3 < x \leq 6 \\ 0 & \text{si } 6 < x \end{cases}$$



Cuestión 14.- Representa la función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

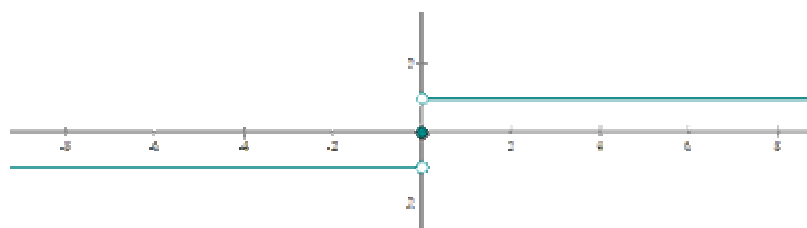
SOLUCIÓN:



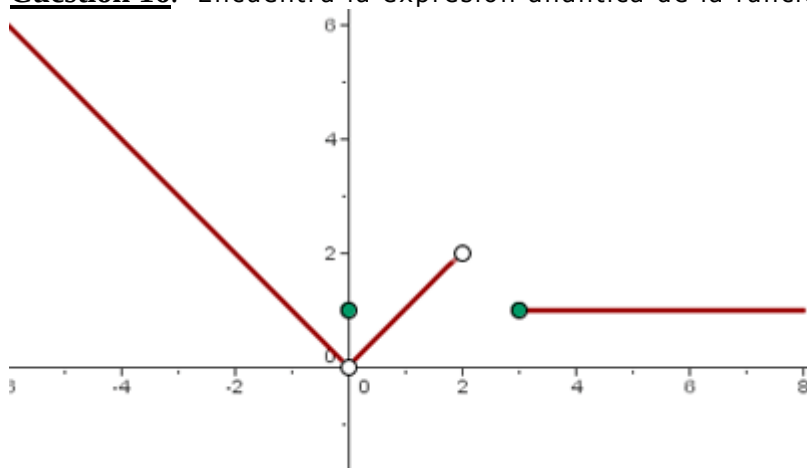
Cuestión 15.- Representa la función definida a trozos: $f(x) = \text{sgn}(x)$

SOLUCIÓN:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



Cuestión 16.- Encuentra la expresión analítica de la función



SOLUCIÓN:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

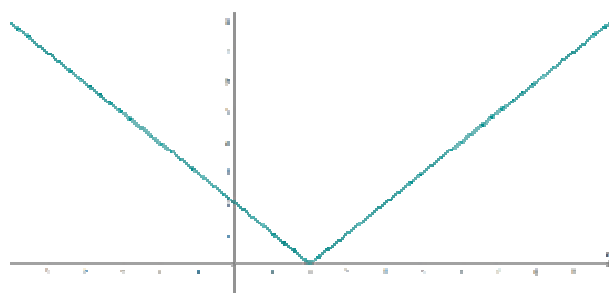
Cuestión 17.- Representa la función valor absoluto: $f(x) = |x - 2|$

SOLUCIÓN:

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

$$f(x) = \begin{cases} -(x - 2) & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$



Cuestión 18.- Representa la función valor absoluto.

$$f(x) = |x - 3|$$

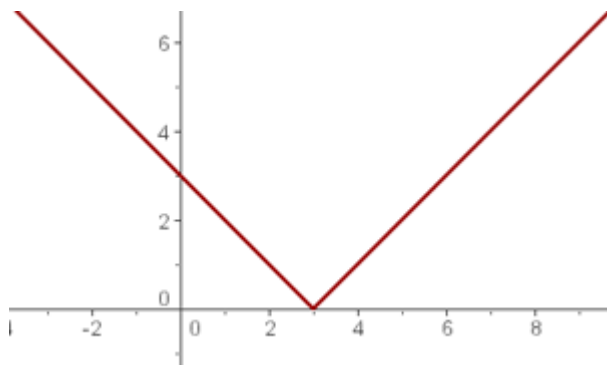
SOLUCIÓN:

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$



$$f(x) = \begin{cases} -(x - 3) & \text{si } x < 3 \\ x - 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$



Cuestión 19.- Representa la función valor absoluto e indica su dominio:

$$f(x) = |x^2 - 5x + 6|$$

SOLUCIÓN:

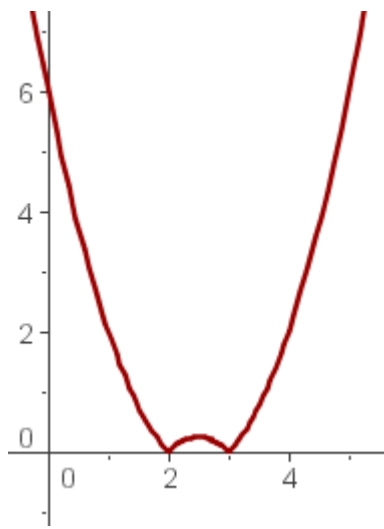
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = 2$$

$$x = 3$$



$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 & \text{si } x < 2 \\ -(x^2 - 5x + 6) & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ x^2 - 5x + 6 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

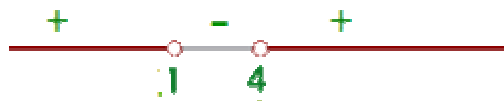


Dom = $\mathbb{R}$

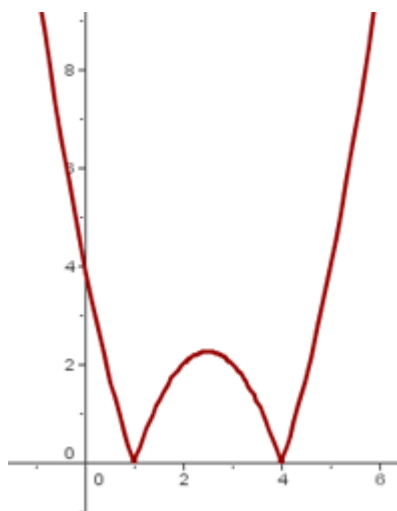
Cuestión 20.- Representa la función valor absoluto: $f(x) = |-x^2 + 5x - 4|$

SOLUCIÓN:

$$-x^2 + 5x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ó } x = 4$$



$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 4 & \text{si } x < 1 \\ -(x^2 - 5x + 4) & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ x^2 - 5x + 4 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

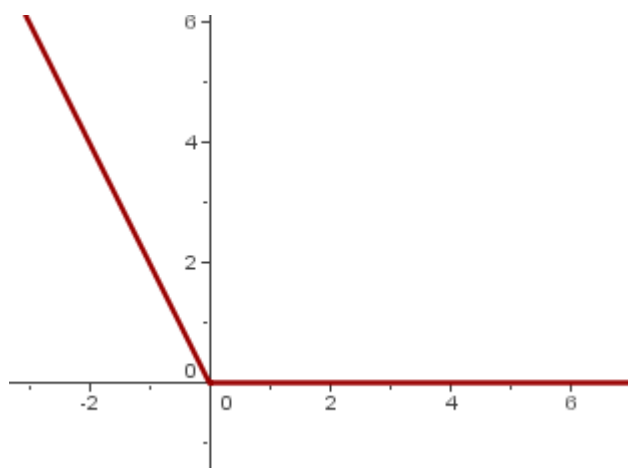


Cuestión 21.- Representa la función valor absoluto: $f(x) = |x| - x$

SOLUCIÓN:

$$f(x) = \begin{cases} -x - x & \text{si } x < 0 \\ x - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

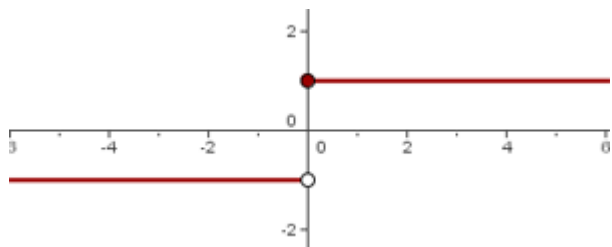


Cuestión 22.- Representa la función valor absoluto: $f(x) = |x| / x$

SOLUCIÓN:

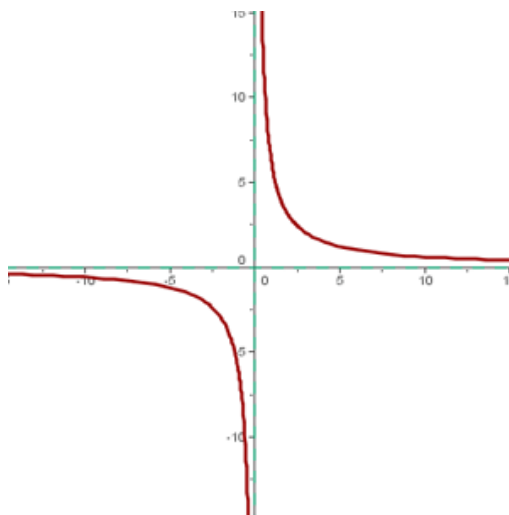
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



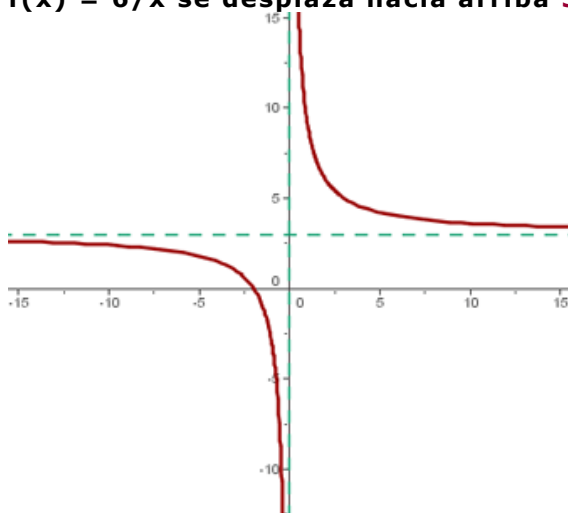
Cuestión 23.- Representa la función racional $f(x) = 6/x$:

x	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
$f(x) = 6/x$	-1	-2	-3	-6	6	3	2	1



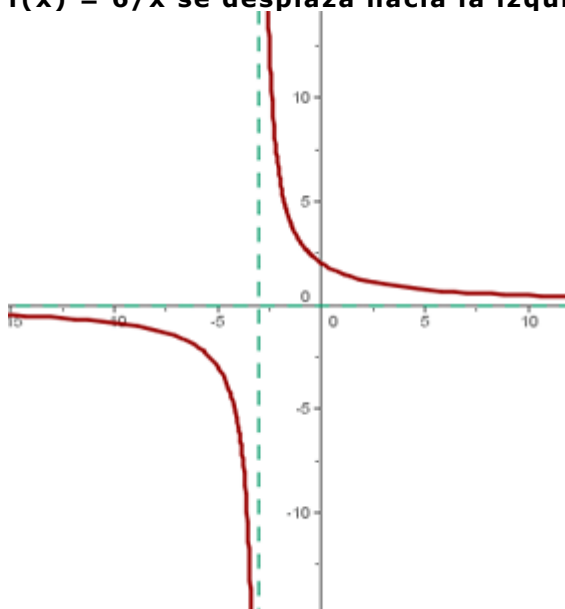
Cuestión 24.- Representa la funcion racional $f(x) = \frac{6}{x} + 3$

$f(x) = 6/x$ se desplaza hacia arriba 3 unidades.



Cuestión 25.- Representa la funcion racional $f(x) = \frac{6}{x+3}$

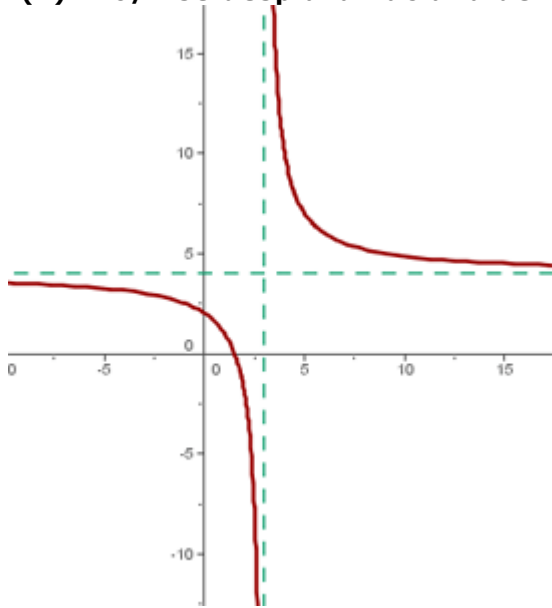
$f(x) = 6/x$ se desplaza hacia la izquierda 3 unidades.



$$f(x) = \frac{6}{x-3} + 4$$

Cuestión 26.- Representa la función racional

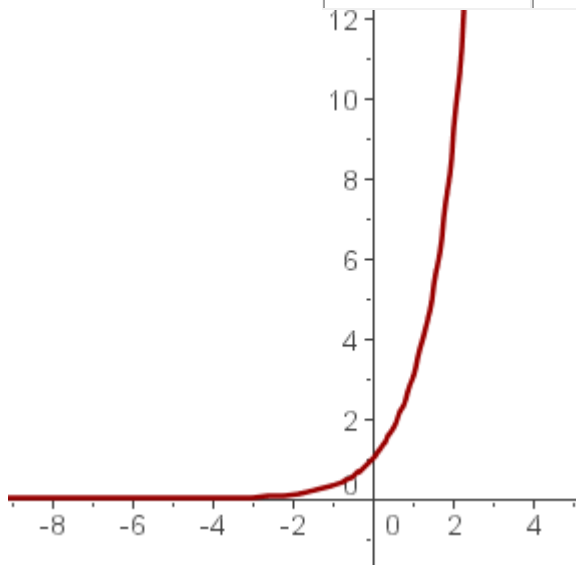
$f(x) = 6/x$ se desplaza hacia la derecha **3** unidades y **4** hacia arriba.



Cuestión 27.- Representa las funciones exponenciales:

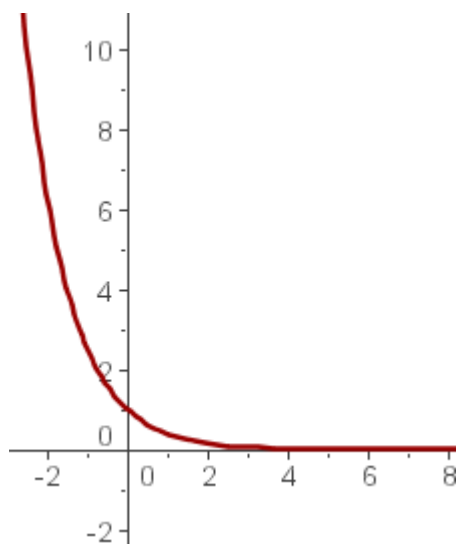
a) $f(x) = 3^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = 3^x$	1/27	1/9	1/3	1	3	9	27



b) $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$

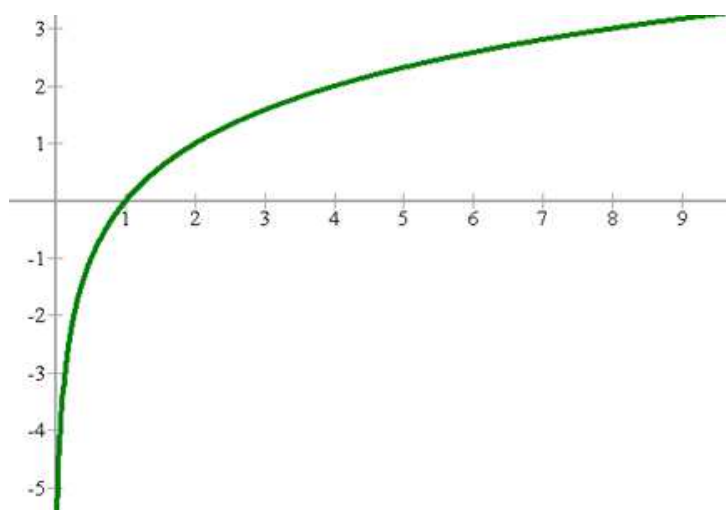
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$	15.625	6.25	2.5	1	0.4	0.16	0.064



Cuestión 28.- Representa la funciones logarítmicas:

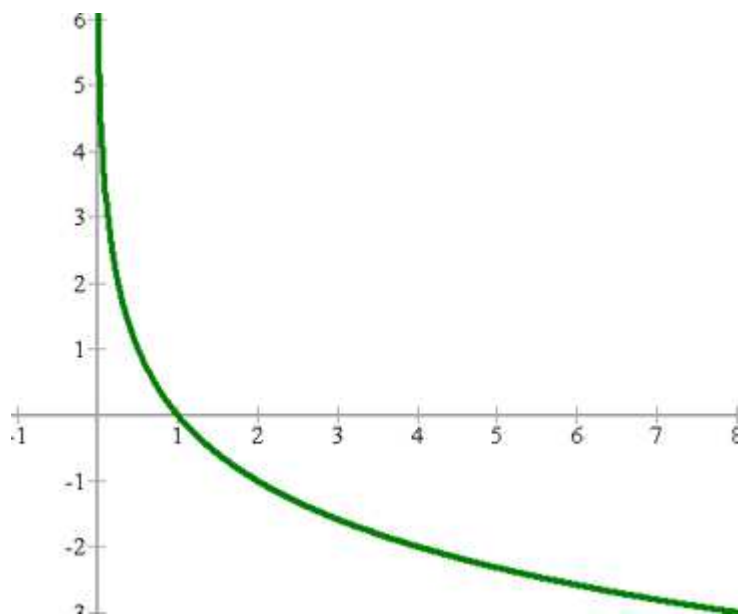
a) $f(x) = \log_2 x$

x	$1/8$	$1/4$	$1/2$	1	2	4	8
$f(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3



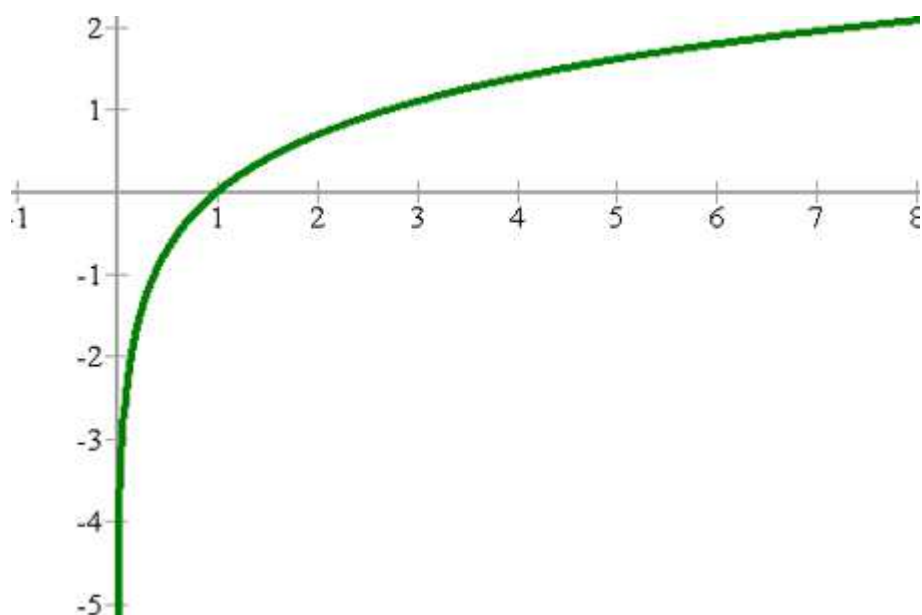
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

x	$1/8$	$1/4$	$1/2$	1	2	4	8
$f(x)$	3	2	1	0	-1	-2	-3



c) $f(x) = \ln x$

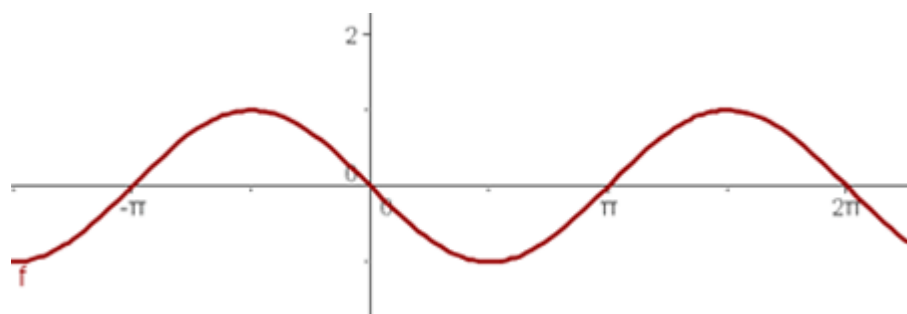
x	0.1	0.5	1	2	3	4	5
f(x)	-2.3	-0.7	0	0.7	1.1	1.4	1.6



Cuestión 29.- Representa las funciones trigonométricas:

a) $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
f(x)	0	-0.7	-1	-0.7	0	0.7	1	0.7	0



b) $f(x) = \text{sen } 2x$

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
$f(x)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

