

# TRIGONOMETRÍA

## UNIDADES DE MEDIDAS DE ÁNGULOS

### EJERCICIO 1

a) Pasa a radianes los siguientes ángulos:  $210^\circ$  y  $70^\circ$  b) Pasa a grados los ángulos:  $\frac{7\pi}{6}$  rad y  $3,5$  rad

Solución:

$$a) 210^\circ = 210 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$$

$$70^\circ = 70 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{7\pi}{18} \text{ rad}$$

$$b) \frac{7\pi}{6} \text{ rad} = \frac{7\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 210^\circ$$

$$3,5 \text{ rad} = 3,5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 200^\circ 32' 7''$$

### EJERCICIO 2 : Completa la tabla:

GRADOS	$130^\circ$		$330^\circ$	
RADIANES		$4\pi / 3$		$1,5$

Solución:

$$130^\circ = 130 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{13\pi}{18} \text{ rad}$$

$$\frac{4\pi}{3} \text{ rad} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 240^\circ$$

$$330^\circ = 330 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{11\pi}{6} \text{ rad}$$

$$1,5 \text{ rad} = 1,5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 85^\circ 56' 37''$$

Por tanto:

GRADOS	$130^\circ$	$240^\circ$	$330^\circ$	$85^\circ 56' 37''$
RADIANES	$13\pi / 18$	$4\pi / 3$	$11\pi / 6$	$1,5$

## CÁLCULO DE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

**EJERCICIO 3 :** Sabiendo que  $\alpha$  es un ángulo agudo y que el  $\cos \alpha = 1/5$ , calcula  $\sin \alpha$  y  $\text{tg } \alpha$ .

Solución:

$$\text{Como } \cos \alpha = \frac{1}{5} \rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \sin^2 \alpha = 1 \rightarrow \frac{1}{25} + \sin^2 \alpha = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{24}{25} \rightarrow \rightarrow \sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\text{Luego, } \text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2\sqrt{6}}{5} : \frac{1}{5} = 2\sqrt{6} \rightarrow \text{tg } \alpha = 2\sqrt{6}$$

**EJERCICIO 4 :** Completa la siguiente tabla haciendo uso de las relaciones fundamentales y sabiendo que  $\alpha$  es un ángulo agudo:

$\sin \alpha$		
$\cos \alpha$	<b>0,25</b>	
$\text{tg } \alpha$		<b>0,6</b>

Solución:

$$\bullet \text{ Si } \cos \alpha = 0,25 \rightarrow (0,25)^2 + \sin^2 \alpha = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha = 0,9375$$

$$\text{Luego, } \sin \alpha \approx 0,97 \text{ y } \text{tg } \alpha = \frac{0,97}{0,25} \approx 3,88.$$

- Si  $tg \alpha = 0,6 \rightarrow sen \alpha = 0,6 \cos \alpha \rightarrow (0,6 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1$   
 $0,36 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow 1,36 \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \cos^2 \alpha \approx 0,74 \rightarrow \cos \alpha \approx 0,86$   
 Luego,  $sen \alpha = 0,6 \cdot 0,86 \approx 0,52$  y la tabla queda:

<b>sen <math>\alpha</math></b>	0,97	0,52
<b>cos <math>\alpha</math></b>	<b>0,25</b>	0,86
<b>tg <math>\alpha</math></b>	3,88	<b>0,6</b>

**EJERCICIO 5 :** Calcula  $sen \alpha$  y  $cos \alpha$  de un ángulo agudo,  $\alpha$ , sabiendo que la  $tg \alpha = \frac{4}{3}$ .

Solución:

$$\begin{aligned} \text{Si } tg \alpha = \frac{4}{3} &\rightarrow \frac{sen \alpha}{cos \alpha} = \frac{4}{3} &\rightarrow sen \alpha = \frac{4}{3} cos \alpha \\ sen^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1 &\rightarrow \left(\frac{4}{3} cos \alpha\right)^2 + cos^2 \alpha = 1 &\rightarrow \frac{16}{9} cos^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1 \\ \frac{25}{9} cos^2 \alpha = 1 &\rightarrow cos^2 \alpha = \frac{9}{25} &\rightarrow cos \alpha = \frac{3}{5} \\ \text{Luego, } sen \alpha = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} &\rightarrow sen \alpha = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

**EJERCICIO 6 :** Sabiendo que  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ , completa la siguiente tabla usando las relaciones fundamentales:

<b>sen <math>\alpha</math></b>		<b>0,8</b>
<b>cos <math>\alpha</math></b>		
<b>tg <math>\alpha</math></b>	<b>0,75</b>	

Solución:

- Si  $tg \alpha = 0,75 \rightarrow \frac{sen \alpha}{cos \alpha} = 0,75 \rightarrow sen \alpha = 0,75 \cdot cos \alpha$   
 $sen^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1 \rightarrow (0,75 cos \alpha)^2 + cos^2 \alpha = 1 \rightarrow 0,5625 cos^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1$   
 $1,5625 cos^2 \alpha = 1 \rightarrow cos^2 \alpha = 0,64 \rightarrow cos \alpha = 0,8$   
 Luego,  $sen \alpha = 0,75 \cdot 0,8 = 0,6$ .
- Si  $sen \alpha = 0,8 \rightarrow sen^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1 \rightarrow (0,8)^2 + cos^2 \alpha = 1 \rightarrow$   
 $\rightarrow 0,64 + cos^2 \alpha = 1 \rightarrow cos^2 \alpha = 0,36 \rightarrow cos \alpha = 0,6$   
 Luego,  $tg \alpha = \frac{0,8}{0,6} = 1,3$ .

Completamos la tabla:

<b>sen <math>\alpha</math></b>	0,6	<b>0,8</b>
<b>cos <math>\alpha</math></b>	0,8	0,6
<b>tg <math>\alpha</math></b>	<b>0,75</b>	1,3

**EJERCICIO 7 :** De un ángulo agudo,  $\alpha$ , conocemos que  $sen \alpha = \frac{3}{5}$ . Halla  $cos \alpha$  y  $tg \alpha$ .

Solución:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \frac{9}{25} + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{cos}^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} \rightarrow \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{16}{25} \rightarrow \operatorname{cos} \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$$

**EJERCICIO 8 :** Completa la tabla sin usar calculadora ( $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ ):

$\alpha$		$90^\circ$		
$\operatorname{sen} \alpha$	<b>0</b>			
$\operatorname{cos} \alpha$				$\sqrt{3}/2$
$\operatorname{tg} \alpha$			$\sqrt{3}$	

Solución:

$\alpha$	0	$90^\circ$	$60^\circ$	$30^\circ$
$\operatorname{sen} \alpha$	<b>0</b>	1	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\operatorname{cos} \alpha$	1	0	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\operatorname{tg} \alpha$	0	NO EXISTE	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$

**EJERCICIO 9 :** Sin hacer uso de la calculadora, halla el valor exacto de las razones trigonométricas que faltan o del ángulo  $\alpha$ , sabiendo que  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ :

$\operatorname{sen} \alpha$			<b>1</b>	
$\operatorname{cos} \alpha$	$1/2$			
$\operatorname{tg} \alpha$		$\sqrt{3}/3$		
$\alpha$				<b><math>45^\circ</math></b>

Solución:

$\operatorname{sen} \alpha$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	<b>1</b>	$\sqrt{2}/2$
$\operatorname{cos} \alpha$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	0	$\sqrt{2}/2$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$	NO EXISTE	1
$\alpha$	$60^\circ$	$30^\circ$	$90^\circ$	<b><math>45^\circ</math></b>

**EJERCICIO 10 :** Sin usar calculadora, completa la siguiente tabla ( $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ ):

$\alpha$		$60^\circ$		
$\operatorname{sen} \alpha$				$\sqrt{2}/2$
$\operatorname{cos} \alpha$			<b>1</b>	
$\operatorname{tg} \alpha$	NO EXISTE			

Solución:

$\alpha$	$90^\circ$	$60^\circ$	$0^\circ$	$45^\circ$
$\text{sen } \alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	0	$\sqrt{2}/2$
$\text{cos } \alpha$	0	1/2	1	$\sqrt{2}/2$
$\text{tg } \alpha$	NO EXISTE	$\sqrt{3}$	0	1

**EJERCICIO 11 :** Calcula el valor exacto de las razones trigonométricas que faltan o del ángulo  $\alpha$ , sin usar calculadora ( $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$ ):

$\text{sen } \alpha$	$\sqrt{3}/2$			
$\text{cos } \alpha$				$\sqrt{2}/2$
$\text{tg } \alpha$		0		
$\alpha$			$30^\circ$	

Solución:

$\text{sen } \alpha$	$\sqrt{3}/2$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$
$\text{cos } \alpha$	1/2	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\text{tg } \alpha$	$\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}/3$	1
$\alpha$	$60^\circ$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$

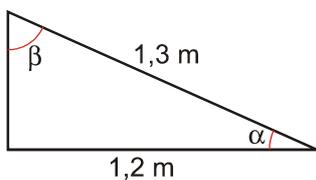
**EJERCICIO 12 :** Completa la tabla sin usar calculadora ( $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ ):

$\alpha$	$0^\circ$			
$\text{sen } \alpha$		1/2		
$\text{cos } \alpha$				0
$\text{tg } \alpha$			1	

Solución:

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$
$\text{sen } \alpha$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	1
$\text{cos } \alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	0
$\text{tg } \alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	NO EXISTE

**EJERCICIO 13 :** Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo rectángulo siguiente:



Solución:

Llamamos  $x$  a la longitud del otro cateto y calculamos su valor usando el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + 1,2^2 = 1,3^2 \rightarrow x^2 + 1,44 = 1,69 \rightarrow x^2 = 0,25 \rightarrow x = 0,5 \text{ m}$$

Calculamos las razones trigonométricas de  $\alpha$  y  $\beta$ :

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{0,5}{1,3} \approx 0,38 \quad \operatorname{cos} \alpha = \frac{1,2}{1,3} \approx 0,92 \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{0,5}{1,2} \approx 0,42$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{1,2}{1,3} \approx 0,92 \quad \operatorname{cos} \beta = \frac{0,5}{1,3} \approx 0,38 \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{1,2}{0,5} \approx 2,4$$

**EJERCICIO 14 :**

a) Comprueba, usando el teorema de Pitágoras, que el triángulo de lados 6 cm, 8 cm y 10 cm es rectángulo.

b) Calcula las razones trigonométricas de sus dos ángulos agudos.

Solución:

a)  $10^2 = 6^2 + 8^2 \rightarrow 100 = 36 + 64 \rightarrow 100 = 100$

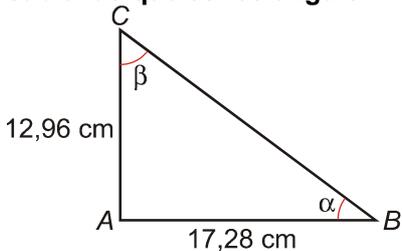
Se cumple el teorema Pitágoras. Por tanto, es rectángulo.

b) Calculamos las razones trigonométricas de  $\alpha$  y  $\beta$ :

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{6}{10} = 0,6 \quad \operatorname{cos} \alpha = \frac{8}{10} = 0,8 \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{8} = 0,75$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{8}{10} = 0,8 \quad \operatorname{cos} \beta = \frac{6}{10} = 0,6 \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{8}{6} = 1,3\bar{3}$$

**EJERCICIO 15 :** Halla las razones trigonométricas de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  del triángulo ABC sabiendo que es rectángulo.



Solución:

Sea  $x$  la longitud de la hipotenusa; por el teorema de Pitágoras:

$$12,96^2 + 17,28^2 = x^2 \rightarrow x^2 = 466,56 \rightarrow x = 21,6 \text{ cm}$$

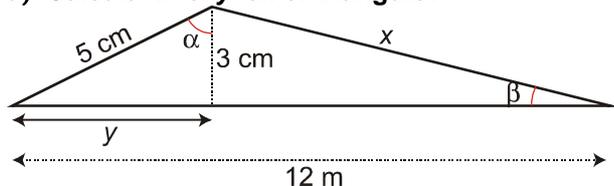
Calculamos las razones trigonométricas de  $\alpha$  y  $\beta$ :

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{12,96}{21,6} = 0,6 \quad \operatorname{cos} \alpha = \frac{17,28}{21,6} = 0,8 \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{12,96}{17,28} = 0,75$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{17,28}{21,6} = 0,8 \quad \operatorname{cos} \beta = \frac{12,96}{21,6} = 0,6 \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{17,28}{12,96} = 1,3\bar{3}$$

**EJERCICIO 16 :**

a) Calcula  $x$  e  $y$  en el triángulo:

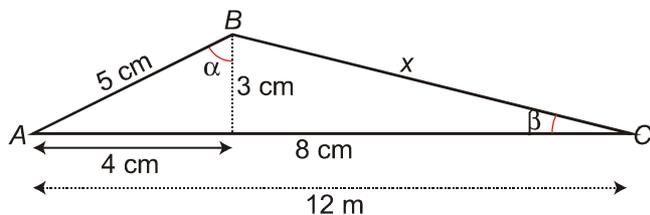


b) Halla el seno, el coseno y la tangente de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ .

Solución:

a) Calculamos  $y$  aplicando el teorema de Pitágoras:

$$5^2 = 3^2 + y^2 \rightarrow 25 = 9 + y^2 \rightarrow 16 = y^2 \rightarrow y = 4 \text{ cm}$$



Calculamos  $x$  sabiendo que la longitud de los catetos del triángulo  $BDC$  miden 3 cm y  $12 - 4 = 8$  cm:

$$x^2 = 3^2 + 8^2 \rightarrow x^2 = 9 + 64 \rightarrow x^2 = 73 \rightarrow x \approx 8,54$$

b) Calculamos las razones trigonométricas de  $\alpha$  y  $\beta$ :

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5} = 0,8 \quad \cos \alpha = \frac{3}{5} = 0,6 \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3} = 1,3\bar{3}$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{3}{8,54} \approx 0,35 \quad \cos \beta = \frac{8}{8,54} \approx 0,94 \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{3}{8} \approx 0,375$$

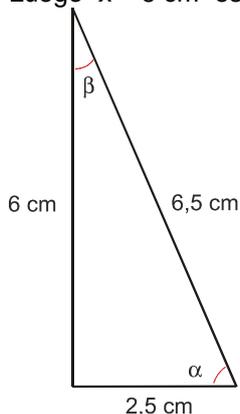
**EJERCICIO 17 :** Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo en el que uno de sus catetos mide 2,5 cm y la hipotenusa, 6,5 cm.

*Solución:*

Llamamos  $x$  a la longitud del otro cateto y calculamos su valor aplicando el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + 2,5^2 = 6,5^2 \rightarrow x^2 + 6,25 = 42,25 \rightarrow x^2 = 36$$

Luego  $x = 6$  cm es la longitud del otro cateto.



• Calculamos las razones trigonométricas de  $\alpha$ :

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{6}{6,5} \approx 0,92 \quad \cos \alpha = \frac{2,5}{6,5} \approx 0,38 \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{2,5} \approx 2,4$$

• Calculamos las razones trigonométricas de  $\beta$ :

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{2,5}{6,5} \approx 0,38 \quad \cos \beta = \frac{6}{6,5} \approx 0,92 \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{2,5}{6} \approx 0,42$$

**EJERCICIO 18 :** De un ángulo  $\alpha$  sabemos que la  $\operatorname{tag} \alpha = 3/4$  y  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ . Calcula  $\operatorname{sen} \alpha$  y  $\cos \alpha$ .

*Solución:*

$$\text{Como } \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{4} \cos \alpha$$

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\ \operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{4} \cos \alpha \end{array} \right\} \frac{19}{6} \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \frac{25}{16} \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5} \text{ por estar } \alpha \text{ en el tercer cuadrante.}$$

$$\text{Así, } \operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\frac{3}{5}$$

**EJERCICIO 19 :** Si  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$  y  $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ , calcula  $\operatorname{sen} \alpha$  y  $\operatorname{tg} \alpha$ .

Solución:

En el cuarto cuadrante,  $\operatorname{sen} \alpha < 0$  y  $\operatorname{tg} \alpha < 0$ .

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{2}{9} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right) : \frac{\sqrt{2}}{3} = -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{14}}{2} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{14}}{2}$$

**EJERCICIO 20 :**

Sabiendo que  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$  y que  $\alpha$  es un ángulo del tercer cuadrante, calcula  $\operatorname{sen} \alpha$  y  $\operatorname{tg} \alpha$ .

Solución:

$$\text{Como } \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5} \rightarrow \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 \rightarrow \frac{5}{25} + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{20}{25} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad (\text{elegimos el signo } - \text{ por estar } \alpha \text{ en el tercer cuadrante}).$$

$$\text{Así, } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) : \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = 2 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 2$$

**EJERCICIO 21 :** Si  $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$  y  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ , ¿Cuánto valen  $\cos \alpha$  y  $\operatorname{tg} \alpha$ ?

Solución:

$$\text{Si } \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \frac{5}{9} + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{5}{9} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4}{9} \rightarrow \cos \alpha = -\frac{2}{3}$$

donde elegimos el signo  $-$  por ser  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ .

$$\text{Así, } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3} : \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{2} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

**EJERCICIO 22 :** Calcula  $\operatorname{sen} \alpha$  y  $\cos \alpha$  sabiendo que la  $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{5}$  y  $\alpha \in 2^\circ$  cuadrante.

Solución:

$$\text{Como } \operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{5} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\sqrt{5} \cos \alpha$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow 5 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 6 \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{6} \rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{6},$$

por estar  $\alpha$  en el  $2^\circ$  cuadrante.

$$\text{Así, } \operatorname{sen} \alpha = -\sqrt{5} \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{\sqrt{30}}{6}.$$

$$\text{La solución es: } \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{6} \text{ y } \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

**EJERCICIO 23 :** Sabiendo que  $\operatorname{sen} \alpha = \frac{15}{17}$  y que  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ , calcula el valor de  $\operatorname{cos} \alpha$  y  $\operatorname{tg} \alpha$ .

*Solución:*

En el 2º cuadrante,  $\operatorname{cos} \alpha < 0$  y  $\operatorname{tg} \alpha < 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{sen} \alpha = \frac{15}{17} \\ \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \end{array} \right\} \left( \frac{15}{17} \right)^2 + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 - \frac{225}{289} \rightarrow \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{64}{289} \rightarrow \operatorname{cos} \alpha = -\frac{8}{17}$$

$$\text{Luego: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{15}{17} : \left( -\frac{8}{17} \right) = -\frac{15}{8} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = -\frac{15}{8}$$

**EJERCICIO 24 :** De un ángulo agudo,  $\alpha$ , a sabemos que  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{4}$ . Calcula  $\operatorname{sen} \alpha$  y  $\operatorname{cos} \alpha$ .

*Solución:*

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{4} \rightarrow \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{5}{4} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{5}{4} \operatorname{cos} \alpha \\ \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left( \frac{5}{4} \operatorname{cos} \alpha \right)^2 + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \frac{25}{16} \operatorname{cos}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \frac{41}{16} \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{16}{41} \rightarrow \operatorname{cos} \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}} \rightarrow \operatorname{cos} \alpha = \frac{4\sqrt{41}}{41} \approx 0,62 \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{5}{4} \cdot 0,62 \approx 0,78$$

**EJERCICIO 25 :** Sabiendo que  $\operatorname{cos} \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$  y que  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ , calcula  $\operatorname{sen} \alpha$  y  $\operatorname{tg} \alpha$ .

*Solución:*

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \\ \operatorname{cos} \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4} \end{array} \right\} \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{7}{16} = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{9}{16} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\frac{3}{4}$$

En el tercer cuadrante,  $\operatorname{sen} \alpha < 0$  y  $\operatorname{tg} \alpha > 0$ .

$$\text{Luego: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = -\frac{3}{4} : \frac{-\sqrt{7}}{4} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

**EJERCICIO 26 :** Calcula  $\operatorname{sen} \alpha$  y  $\operatorname{tg} \alpha$  de un ángulo agudo,  $\alpha$ , sabiendo que  $\operatorname{cos} \alpha = 0,6$ .

*Solución:*

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + 0,6^2 = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - 0,36 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = 0,64 \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = 0,8$$

$$\text{Luego: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{0,8}{0,6} = 1,3 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 1,3$$

**EJERCICIO 27 :** Si  $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{12}{13}$  y  $\alpha \in 4^\circ$  cuadrante, calcula  $\operatorname{cos} \alpha$  y  $\operatorname{tg} \alpha$ .

*Solución:*

En el cuarto cuadrante, el  $\operatorname{cos} \alpha$  es positivo, y la tangente, negativa.

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{sen} \alpha = -\frac{12}{13} \\ \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \end{array} \right\} \left( -\frac{12}{13} \right)^2 + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 - \frac{144}{169} \rightarrow \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{25}{169} \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{cos} \alpha = \frac{5}{13}$$

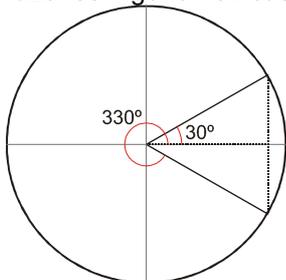
$$\text{Luego: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = -\frac{12}{13} : \frac{5}{13} = -\frac{12}{5} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = -\frac{12}{5}$$

### CAMBIO DE CUADRANTES

**EJERCICIO 28 :** Expresa, con valores comprendidos entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$ , el ángulo de  $2\ 130^\circ$ . Calcula sus razones trigonométricas dibujándolo previamente en la circunferencia goniométrica y relacionándolo con un ángulo del primer cuadrante.

*Solución:*

$2\ 130^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 330^\circ$ , luego calcular las razones trigonométricas de  $2\ 130^\circ$  equivale a calcular las razones trigonométricas de  $330^\circ$ .



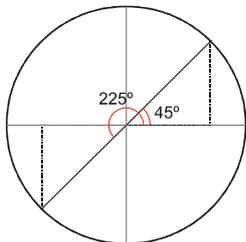
$$\operatorname{sen} 2\ 130^\circ = \operatorname{sen} 330^\circ = -\operatorname{sen} 30^\circ$$

$$\operatorname{cos} 2\ 130^\circ = \operatorname{cos} 330^\circ = \operatorname{cos} 30^\circ$$

$$\text{Así: } \operatorname{sen} 2\ 130^\circ = -\frac{1}{2}; \quad \operatorname{cos} 2\ 130^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \operatorname{tg} 2\ 130^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

**EJERCICIO 29 :** Representa en la circunferencia goniométrica las razones trigonométricas del ángulo de  $225^\circ$ , y calcula el valor de cada una de ellas relacionando el ángulo de  $225^\circ$  con uno del primer cuadrante.

*Solución:*



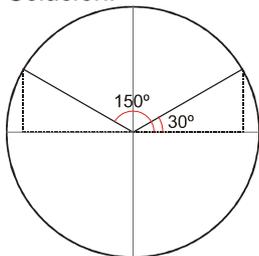
$$\operatorname{sen} 225^\circ = -\operatorname{sen} 45^\circ \rightarrow \operatorname{sen} 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Observamos que: } \operatorname{cos} 225^\circ = -\operatorname{cos} 45^\circ \rightarrow \operatorname{cos} 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 225^\circ = \operatorname{tg} 45^\circ \rightarrow \operatorname{tg} 225^\circ = 1$$

**EJERCICIO 30 :** Representa en la circunferencia goniométrica  $\operatorname{sen} 150^\circ$ ,  $\operatorname{cos} 150^\circ$  y  $\operatorname{tg} 150^\circ$ . Calcula el valor de cada una de ellas relacionando el ángulo de  $150^\circ$  con un ángulo del primer cuadrante.

*Solución:*



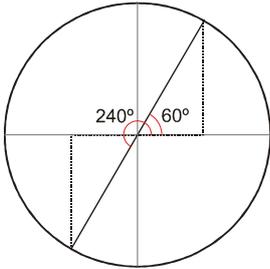
$$\text{sen } 150^\circ = \text{sen } 30^\circ \rightarrow \text{sen } 150^\circ = \frac{1}{2}$$

En la circunferencia goniométrica observamos:  $\text{cos } 150^\circ = -\text{cos } 30^\circ \rightarrow \text{cos } 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{tg } 150^\circ = -\text{tg } 30^\circ \rightarrow \text{tg } 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

**EJERCICIO 31** : Calcula las razones trigonométricas de  $240^\circ$  dibujando previamente este ángulo en la circunferencia goniométrica.

Solución:



$$\text{sen } 240^\circ = -\text{sen } 60^\circ \rightarrow \text{sen } 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

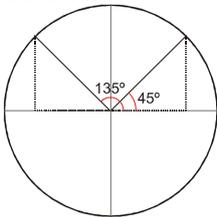
En el dibujo se observa que:

$$\text{cos } 240^\circ = -\text{cos } 60^\circ \rightarrow \text{cos } 240^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Luego: } \text{tg } 240^\circ = \frac{\text{sen } 240^\circ}{\text{cos } 240^\circ} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) : \left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} \rightarrow \text{tg } 240^\circ = \sqrt{3}$$

**EJERCICIO 32** : Sitúa sobre la circunferencia goniométrica, el ángulo de  $135^\circ$  y calcula sus razones trigonométricas relacionándolo con uno del primer cuadrante.

Solución:



$$\text{sen } 135^\circ = \text{sen } 45^\circ \rightarrow \text{sen } 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Se observa en la circunferencia goniométrica que:

$$\text{cos } 135^\circ = -\text{cos } 45^\circ \rightarrow \text{cos } 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Luego,  $\text{tg } 135^\circ = -1$ .

**EJERCICIO 33** : Relacionándolo con un ángulo del primer cuadrante, calcula las razones trigonométricas de  $210^\circ$ .

Solución:

$210^\circ$  pertenece al 3<sup>er</sup> cuadrante y  $180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$ .

Luego, las razones trigonométricas de  $210^\circ$  van a estar relacionadas con las razones trigonométricas de

$$\text{sen } 210^\circ = -\text{sen } 30^\circ \rightarrow \text{sen } 210^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$30^\circ: \text{cos } 210^\circ = -\text{cos } 30^\circ \rightarrow \text{cos } 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 210^\circ = \text{tg } 30^\circ \rightarrow \text{tg } 210^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

**EJERCICIO 34** : Sabiendo que  $\text{cos } 58^\circ = 0,53$ ,  $\text{sen } 58^\circ = 0,85$  y  $\text{tg } 58^\circ = 1,6$ , calcula las razones trigonométricas de  $122^\circ$ .

*Solución:*

$122^\circ$  pertenece al  $2^\circ$  cuadrante y  $122^\circ + 58^\circ = 180^\circ$ .

$$\text{sen } 122^\circ = \text{sen } 58^\circ \rightarrow \text{sen } 122^\circ = 0,85$$

Relacionamos las razones trigonométricas de  $122^\circ$  y  $58^\circ$ :  $\text{cos } 122^\circ = -\text{cos } 58^\circ \rightarrow \text{cos } 122^\circ = -0,53$

$$\text{tg } 122^\circ = -\text{tg } 58^\circ \rightarrow \text{tg } 122^\circ = -1,6$$

**EJERCICIO 35** : Halla las razones trigonométricas de  $315^\circ$  estableciendo una relación entre dicho ángulo y uno del primer cuadrante.

*Solución:*

Se sabe que  $315^\circ$  es un ángulo del  $4^\circ$  cuadrante, y además,  $315^\circ + 45^\circ = 360^\circ$ .

Relacionamos, pues, las razones trigonométricas de  $315^\circ$  con las razones trigonométricas de  $45^\circ$ :

$$\text{sen } 315^\circ = -\text{sen } 45^\circ \rightarrow \text{sen } 315^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{cos } 315^\circ = \text{cos } 45^\circ \rightarrow \text{cos } 315^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 315^\circ = -\text{tg } 45^\circ \rightarrow \text{tg } 315^\circ = -1$$

**EJERCICIO 36** : Calcula las razones trigonométricas de  $227^\circ$  a partir de las razones trigonométricas de  $47^\circ$ :  $\text{sen } 47^\circ = 0,73$ ;  $\text{cos } 47^\circ = 0,68$ ;  $\text{tg } 47^\circ = 1,07$

*Solución:*

$227^\circ$  es un ángulo correspondiente al  $3^\text{er}$  cuadrante. Además,  $180^\circ + 47^\circ = 227^\circ$ , luego:

$$\text{sen } 227^\circ = -\text{sen } 47^\circ \rightarrow \text{sen } 227^\circ = -0,73$$

$$\text{cos } 227^\circ = -\text{cos } 47^\circ \rightarrow \text{cos } 227^\circ = -0,68$$

$$\text{tg } 227^\circ = \text{tg } 47^\circ \rightarrow \text{tg } 227^\circ = 1,07$$

**EJERCICIO 37** : Calcula el valor del  $\text{sen } 120^\circ$ ,  $\text{cos } 120^\circ$  y  $\text{tg } 120^\circ$ , relacionándolos con un ángulo del primer cuadrante.

*Solución:*

Observamos que  $120^\circ \in 2^\circ$  cuadrante y que  $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ .

$$\text{Luego: } \operatorname{sen} 120^\circ = \operatorname{sen} 60^\circ \rightarrow \operatorname{sen} 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ \rightarrow \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

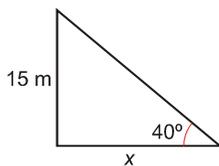
$$\operatorname{tg} 120^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ \rightarrow \operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}$$

## PROBLEMAS

**EJERCICIO 38 :** El ángulo que forma el suelo con la recta que une el extremo de la sombra de un árbol con la parte superior del árbol es de  $40^\circ$ . Calcula la longitud de la sombra sabiendo que el árbol mide 15 m de altura.

*Solución:*

Sea  $x$  la longitud de la sombra del árbol.

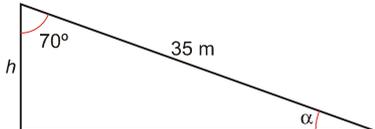


Como datos tenemos un ángulo y el cateto opuesto a ese ángulo; nos piden el cateto contiguo, luego la tangente es la razón trigonométrica a usar:  $\operatorname{tg} 40^\circ = \frac{15}{x} \rightarrow x = \frac{15}{\operatorname{tg} 40^\circ} \approx \frac{15}{0,84} \approx 17,86 \text{ m}$

La sombra del árbol mide 17,86 m.

**EJERCICIO 39 :** Carlos sube por una rampa de 35 m hasta el tejado de su casa. Estando ahí, mide la visual entre su casa y la rampa, resultando ser de  $70^\circ$ . Calcula la altura de la casa de Carlos y el ángulo que hay entre la rampa y el suelo.

*Solución:*



Llamamos  $h$  a la altura de la casa y  $\alpha$  al ángulo que hay entre la rampa y el suelo.

Calculamos  $\alpha$ :  $90^\circ + 70^\circ + \alpha = 180^\circ \rightarrow \alpha = 20^\circ$

Calculamos  $h$ :  $\cos 70^\circ = \frac{h}{35} \rightarrow h = 35 \cdot \cos 70^\circ \approx 35 \cdot 0,34 \Rightarrow$

$h = 11,9 \text{ m}$  es la altura de la casa de Carlos.

**EJERCICIO 40 :** Un tronco de 6,2 m está apoyado en una pared y forma con el suelo un ángulo de  $55^\circ$ .

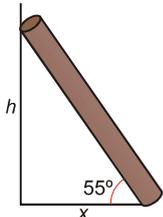
a) ¿A qué altura de la pared se encuentra apoyado?

b) Calcula la distancia desde el extremo inferior del tronco hasta la pared.

*Solución:*

$h \rightarrow$  altura que alcanza el tronco apoyado en la pared.

$x \rightarrow$  distancia desde el extremo inferior del tronco hasta la pared.



La hipotenusa del triángulo que se forma mide 6,2 m, y un ángulo agudo,  $55^\circ$ .

Así:

$$a) \operatorname{sen} 55^\circ = \frac{h}{6,2} \rightarrow h = 6,2 \cdot \operatorname{sen} 55^\circ \approx 6,2 \cdot 0,82 = 5,08 \text{ m}$$

El tronco se encuentra apoyado en la pared a 5,08 m del suelo.

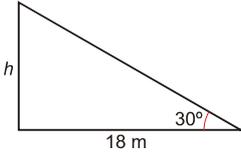
$$b) \operatorname{cos} 55^\circ = \frac{x}{6,2} \rightarrow x = 6,2 \cdot \operatorname{cos} 55^\circ \approx 6,2 \cdot 0,57 = 3,53 \text{ m}$$

La distancia entre el extremo inferior del tronco y la pared es de 3,53 m.

**EJERCICIO 41 :** Halla la altura de una antena sabiendo que a una distancia de 18 m se ve la parte superior de la antena bajo un ángulo de  $30^\circ$ .

*Solución:*

Llamamos  $h$  a la altura de la antena.

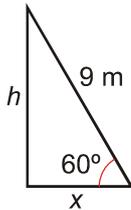


Como datos tenemos un ángulo y el cateto contiguo; nos piden el cateto opuesto al ángulo, luego la tangente será la razón trigonométrica a usar:  $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{18} \rightarrow h = 18 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3} \approx 10,39 \text{ m}$

La altura de la antena es de 10,39 m.

**EJERCICIO 42 :** Calcula la altura de una casa sabiendo que al tender un cable de 9 m desde el tejado, este forma con el suelo un ángulo de  $60^\circ$ . ¿A qué distancia de la casa cae el cable?

*Solución:*



Llamamos  $h$  a la altura de la casa; como conocemos la longitud del cable, que es la hipotenusa, y tenemos que hallar el cateto opuesto al ángulo que nos dan, debemos usar el seno como razón trigonométrica:

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{h}{9} \rightarrow h = 9 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{2} = 7,79 \text{ m} \Rightarrow \text{La altura de la casa es de 7,79 m.}$$

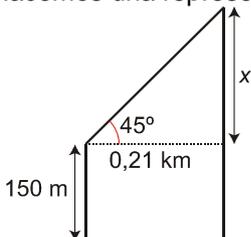
Sea  $x$  = distancia entre el pie de la casa y el cable sujeto al suelo por un extremo. En este caso, el coseno es la razón trigonométrica que debemos usar:  $\operatorname{cos} 60^\circ = \frac{x}{9} \rightarrow x = 9 \cdot \operatorname{cos} 60^\circ = 9 \cdot \frac{1}{2} = 4,5 \text{ m}$

El cable está sujeto al suelo a 4,5 m de distancia de la casa.

**EJERCICIO 43 :** Desde el tejado de un edificio de 150 m de altura, se divisa el tejado de otro edificio cercano bajo un ángulo de  $45^\circ$ . La distancia entre ambos en línea recta es de 0,21 km. Calcula la altura del otro edificio.

*Solución:*

Hacemos una representación del problema:



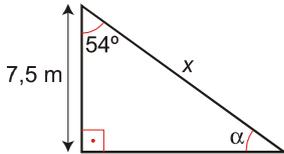
$$0,21 \text{ km} = 210 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{x}{210} \rightarrow x = 210 \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \rightarrow x = 210 \text{ m}$$

Luego, la altura del otro edificio será  $x + 150 = 210 + 150$ , es decir, 360 m.

**EJERCICIO 44 :** Un globo, sujeto al suelo por una cuerda, se encuentra a una altura de 7,5 m; entre la altura y la cuerda se forma un ángulo de  $54^\circ$ . Calcula la longitud de la cuerda y el ángulo que esta forma con el suelo.

*Solución:*



Llamamos:  $x \rightarrow$  longitud de la cuerda  $\alpha \rightarrow$  ángulo entre la cuerda y el suelo  
La razón trigonométrica a usar con los datos del problema es el coseno:

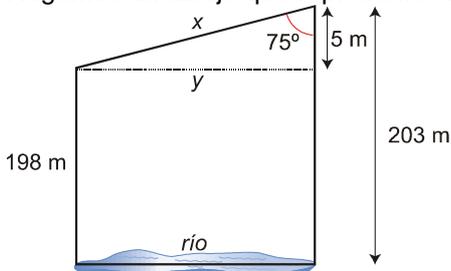
$$\cos 54^\circ = \frac{7,5}{x} \rightarrow x = \frac{7,5}{\cos 54^\circ} \approx \frac{7,5}{0,59} \approx 12,71 \Rightarrow \text{La cuerda tiene una longitud de } 12,71 \text{ m.}$$

$$\text{Calculamos } \alpha \rightarrow 54^\circ + 90^\circ + \alpha = 180^\circ \rightarrow \alpha = 36^\circ$$

**EJERCICIO 45 :** Dos torres de 198 m y 203 m de altura están unidas en sus puntos más altos por un puente bajo el cual hay un río. Calcula la longitud del puente y la anchura del río sabiendo que el ángulo que hay entre el puente y la torre más alta es de  $75^\circ$ .

*Solución:*

Hagamos un dibujo que represente el problema:



Llamamos  $x \rightarrow$  longitud del puente  $y \rightarrow$  anchura del río

Observamos que tenemos un triángulo rectángulo del cual conocemos el cateto contiguo al ángulo de  $75^\circ$ :  $203 - 198 = 5 \text{ m}$ .

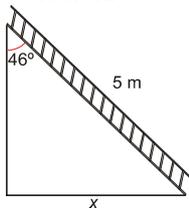
$$\cos 75^\circ = \frac{5}{x} \rightarrow x = \frac{5}{\cos 75^\circ} \approx \frac{5}{0,26} \approx 19,23 \text{ m}$$

$$\text{sen } 75^\circ = \frac{y}{x} \rightarrow y = x \cdot \text{sen } 75^\circ \approx 19,23 \cdot 0,97 \approx 18,65 \text{ m}$$

La longitud del puente es de 19,23 m, y la anchura del río, 18,65 m.

**EJERCICIO 46 :** Una escalera de 5 m está apoyada en una pared formando un ángulo de  $46^\circ$ . Calcula la distancia entre la base de la escalera y la pared. ¿Qué ángulo forma la escalera con el suelo?

*Solución:*



Llamamos:  $x \rightarrow$  distancia entre la base de la escalera y la pared

$\alpha \rightarrow$  ángulo entre la escalera y el suelo

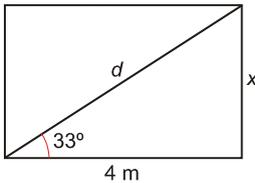
Conocemos la hipotenusa y un ángulo agudo, y nos piden calcular el cateto opuesto a ese ángulo; usamos el seno como razón trigonométrica:  $\text{sen } 46^\circ = \frac{x}{5} \rightarrow x = 5 \cdot \text{sen } 46^\circ \approx 5 \cdot 0,72 = 3,6$

La distancia entre la base de la escalera y la pared es de 3,6 m.

Calculamos  $\alpha \rightarrow 46^\circ + 90^\circ + \alpha = 180^\circ \rightarrow \alpha = 44^\circ$  es la inclinación que hay entre la escalera y el suelo.

**EJERCICIO 47 :** El lado de un rectángulo mide 4 m y la diagonal forma con dicho lado un ángulo de 33°. Calcula la longitud de la diagonal y el área del rectángulo.

Solución:



Llamamos:  $d \rightarrow$  longitud de la diagonal  $x \rightarrow$  longitud del otro lado  
Nos dan un ángulo y el lado contiguo a este ángulo. Para calcular  $d$  y  $x$ , usamos el coseno y la tangente,

$$\cos 33^\circ = \frac{4}{d} \rightarrow d = \frac{4}{\cos 33^\circ} \approx \frac{4}{0,84} \approx 4,76 \text{ m}$$

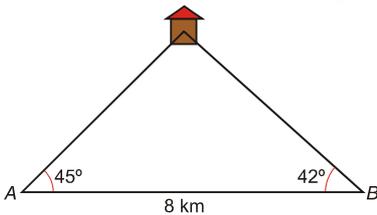
respectivamente:

$$\operatorname{tg} 33^\circ = \frac{x}{4} \rightarrow x = 4 \cdot \operatorname{tg} 33^\circ \approx 4 \cdot 0,65 = 2,6 \text{ m}$$

La longitud de la diagonal es de 4,76 m.

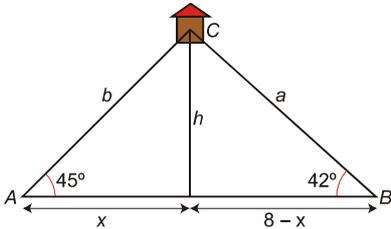
Calculamos el área:  $A = 4 \cdot 2,6 = 10,4 \rightarrow$  El área del rectángulo es 10,4 m<sup>2</sup>.

**EJERCICIO 48 :** Dos ambulancias, distanciadas 8 km en línea recta, reciben una llamada de urgencia de una casa. Observa la figura y calcula la distancia que separa a cada ambulancia de la casa:



Solución:

Trazando la altura desde la casa al lado  $AB$ , conseguimos dos triángulos rectángulos:  $CHA$  y  $CHB$ .



$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{h}{x} \rightarrow h = x \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \\ \operatorname{tg} 42^\circ = \frac{h}{8-x} \rightarrow h = (8-x) \cdot \operatorname{tg} 42^\circ \end{array} \right\}$$

$$x \operatorname{tg} 45^\circ = (8-x) \operatorname{tg} 42^\circ \rightarrow x = (8-x)0,9 \rightarrow x = 7,2 - 0,9x \rightarrow 1,9x = 7,2 \rightarrow x = 3,79 \text{ km, luego } h = 3,79 \text{ km}$$

De este modo hemos calculado el valor de los catetos en ambos triángulos rectángulos. Aplicando el teorema de Pitágoras, obtendremos la hipotenusa en cada caso:

$$b = \sqrt{h^2 + x^2} = \sqrt{2 \cdot (3,79)^2} = 3,79\sqrt{2} \approx 5,36 \text{ km}$$

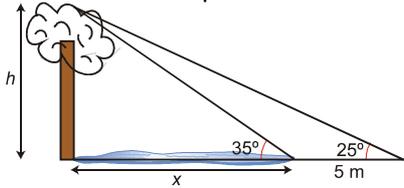
$$a = \sqrt{h^2 + (8-x)^2} = \sqrt{3,79^2 + 4,21^2} \approx 5,66 \text{ km}$$

La ambulancia  $A$  está a 5,36 km de la casa, y la ambulancia  $B$ , a 5,66 km.

**EJERCICIO 49 :** Antonio está descansando en la orilla de un río mientras observa un árbol que está en la orilla opuesta. Mide el ángulo que forma su visual con el punto más alto del árbol y obtiene 35°; retrocede 5 m y mide el nuevo ángulo, obteniendo en este caso un ángulo de 25°. Calcula la altura del árbol y la anchura de río.

Solución:

Hacemos una representación del problema y llamamos:  $h \rightarrow$  altura del árbol  $x \rightarrow$  anchura del río



$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 35^\circ &= \frac{h}{x} \rightarrow h = x \cdot \operatorname{tg} 35^\circ \\ \operatorname{tg} 25^\circ &= \frac{h}{x+5} \rightarrow h = (x+5) \operatorname{tg} 25^\circ \end{aligned} \right\}$$

$$x \operatorname{tg} 35^\circ = (x+5) \cdot \operatorname{tg} 25^\circ \rightarrow 0,7x = (x+5) \cdot 0,47 \rightarrow 0,7x = 0,47x + 2,35 \rightarrow$$

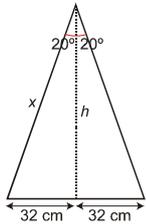
$$\rightarrow 0,23x = 2,35 \rightarrow x \approx 10,22 \text{ m}$$

$$h = 10,22 \cdot 0,7 = 7,15 \text{ m}$$

La altura del árbol es de 7,15 m, y la anchura del río, de 10,22 m.

**EJERCICIO 50 :** La base de un triángulo isósceles mide 64 cm, y el ángulo que se forma entre los lados iguales es de  $40^\circ$ . Calcula el perímetro y el área del triángulo.

Solución:



Trazamos la altura sobre la base para conseguir dos triángulos rectángulos.

Para calcular el perímetro y el área, necesitamos conocer el valor de la altura,  $h$ , y del otro lado,  $x$ .

En cada triángulo conocemos el ángulo de  $20^\circ$  y el cateto opuesto a este ángulo que mide  $\frac{64}{2} = 32$  cm.

$$\operatorname{sen} 20^\circ = \frac{32}{x} \rightarrow x = \frac{32}{\operatorname{sen} 20^\circ} \approx \frac{32}{0,34} = 94,12 \text{ cm}$$

$$h \approx 94,12 \cdot 0,94 \approx 88,47 \text{ cm}$$

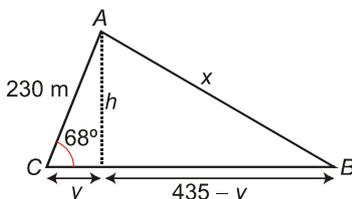
$$\operatorname{cos} 20^\circ = \frac{h}{x} \rightarrow \operatorname{cos} 20^\circ = \frac{h}{94,12} \rightarrow h = 94,12 \cdot \operatorname{cos} 20^\circ$$

$$\text{Luego: Perímetro} = 64 + 2 \cdot 94,12 = 252,24 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{64 \cdot 88,47}{2} = 2831,04 \text{ cm}^2$$

**EJERCICIO 51 :** El ángulo que se forma en la intersección de dos caminos es de  $68^\circ$ . La granja  $A$  está a 230 m de ese punto, y la granja  $B$ , a 435 m. ¿A qué distancia en línea recta está la granja  $A$  de la granja  $B$ ?

Solución:



Llamamos  $x$  a la distancia en línea recta entre la granja  $A$  y la  $B$ .

Por no ser rectángulo el triángulo  $ABC$ , trazamos la altura  $h$  que lo divide en dos triángulos rectángulos:  $AHC$  y  $AHB$ .

En el triángulo  $AHC$  conocemos  $\widehat{C} = 68^\circ$  y  $\overline{AC} = 230$ , podemos calcular  $h$  e  $y$ :

$$\cos 68^\circ = \frac{y}{230} \rightarrow y = 230 \cdot \cos 68^\circ = 230 \cdot 0,37 = 85,1 \text{ m}$$

$$\operatorname{sen} 68^\circ = \frac{h}{230} \rightarrow h = 230 \cdot \operatorname{sen} 68^\circ = 230 \cdot 0,93 = 213,9 \text{ m}$$

En el triángulo  $AHB$ , ahora conocemos  $h = 213,9 \text{ m}$  y  $435 - y = 435 - 85,1 = 349,9 \text{ m}$ . Podemos calcular  $x$  usando el teorema de Pitágoras:

$$x^2 = h^2 + (435 - y)^2 \rightarrow x^2 = (213,9)^2 + (349,9)^2 \rightarrow$$

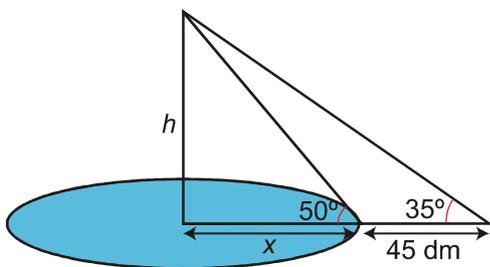
$$x = \sqrt{45753,21 + 122430,01} = \sqrt{168183,22} \approx 410,1 \text{ m}$$

La distancia entre ambas granjas es de 410,1 m.

**EJERCICIO 52 :** Se quiere medir la altura de una estatua colocada en el centro de un lago circular. Para ello, se mide la visual al extremo superior de la estatua desde el borde del lago y resulta ser de  $50^\circ$ ; nos alejamos 45 dm y volvemos a medir la visual, obteniendo un ángulo de  $35^\circ$ . Averigua la altura de la estatua y la superficie del lago.

*Solución:*

Hacemos una representación. Llamamos:  $h \rightarrow$  altura de la estatua  $x \rightarrow$  radio del lago



$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} 50^\circ = \frac{h}{x} \rightarrow h = x \cdot \operatorname{tg} 50^\circ \\ \operatorname{tg} 35^\circ = \frac{h}{x+45} \rightarrow h = (x+45) \cdot \operatorname{tg} 35^\circ \end{array} \right\} \rightarrow x \cdot \operatorname{tg} 50^\circ = (x+45) \cdot \operatorname{tg} 35^\circ \rightarrow$$

$$\rightarrow x \cdot 1,19 = (x+45) \cdot 0,7 \rightarrow 1,19x = 0,7x + 31,5 \rightarrow 0,49x = 31,5 \rightarrow x = 64,29 \text{ dm}$$

Luego  $h = 64,29 \cdot 1,19 = 76,51 \text{ dm} = 7,65 \text{ m}$

Calculamos la superficie del lago circular:  $A_{\text{CIRCULO}} = \pi \cdot x^2 \approx 3,14 \cdot (64,29)^2 \approx 12978,26 \text{ dm}^2 \approx 129,78 \text{ m}^2$

La superficie del lago es de  $129,78 \text{ m}^2$ .

## ÁNGULOS DE MEDIDAS CUALESQUIERA

### EJERCICIO 53 :

Si  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$  y  $\alpha$  es un ángulo que está en el primer cuadrante, calcula (sin hallar  $\alpha$ ):

a)  $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$       b)  $\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha)$       c)  $\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha)$       d)  $\operatorname{tg}(360^\circ + \alpha)$

*Solución:*

$$\text{a) } \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3}$$

$$\text{b) } \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\text{c) } \operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3}$$

$$\text{d) } \operatorname{tg}(360^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$$

**EJERCICIO 54 :** Si  $\operatorname{sen} \alpha = 0,35$  y  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  halla (sin calcular  $\alpha$ ):

a)  $\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha)$       b)  $\operatorname{cos}(180^\circ + \alpha)$

Solución:

a)  $\text{sen}(180^\circ - \alpha) = \text{sen} \alpha = 0,35$

b)  $\text{cos}(180^\circ + \alpha) = -\text{cos} \alpha$

Necesitamos saber cuánto vale  $\text{cos} \alpha$ :  $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow 0,35^2 + \text{cos}^2 \alpha = 1$

$0,1225 + \text{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \text{cos}^2 \alpha = 0,8775 \Rightarrow \text{cos} \alpha = 0,94$  (es positivo, pues  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ )

Por tanto:  $\text{cos}(180^\circ + \alpha) = -\text{cos} \alpha = -0,94$

## SIMPLIFICACIONES E IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

**EJERCICIO 55** : Simplifica las siguientes expresiones trigonométricas:

a)  $\frac{\text{sen}^2 x \cdot (1 + \text{cos} x)}{1 - \text{cos} x}$

b)  $\frac{\text{cos} x}{\text{tag} x \cdot (1 - \text{sen} x)}$

Soluciones:

a)  $\frac{\text{sen}^2 x \cdot (1 + \text{cos} x)}{1 - \text{cos} x} = \frac{(1 - \text{cos}^2 x) \cdot (1 + \text{cos} x)}{1 - \text{cos} x} = \frac{(1 - \text{cos} x) \cdot (1 + \text{cos} x) \cdot (1 + \text{cos} x)}{1 - \text{cos} x} = (1 + \text{cos} x)^2$

b)  $\frac{\text{cos} x}{\text{tag} x \cdot (1 - \text{sen} x)} = \frac{\text{cos} x}{\frac{\text{sen} x}{\text{cos} x} \cdot (1 - \text{sen} x)} = \frac{\text{cos}^2 x}{\text{sen} x \cdot (1 - \text{sen} x)} = \frac{1 - \text{sen}^2 x}{\text{sen} x \cdot (1 - \text{sen} x)} = \frac{(1 + \text{sen} x)(1 - \text{sen} x)}{\text{sen} x \cdot (1 - \text{sen} x)} = \frac{1 + \text{sen} x}{\text{sen} x}$

**EJERCICIO 56** : Demostrar la siguiente igualdad trigonométrica:

$$\frac{\sec^2 x}{\text{cosec}^2 x - \sec^2 x} + \frac{\text{ctg}^2 x}{\text{ctg}^2 x - 1} = \frac{1}{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}$$

Soluciones:

$$\begin{aligned} \frac{\sec^2 x}{\text{cosec}^2 x - \sec^2 x} + \frac{\text{ctg}^2 x}{\text{ctg}^2 x - 1} &= \frac{1}{\frac{1}{\text{sen}^2 x} - \frac{1}{\text{cos}^2 x}} + \frac{\frac{\text{cos}^2 x}{\text{sen}^2 x}}{\frac{\text{cos}^2 x}{\text{sen}^2 x} - 1} = \frac{1}{\frac{\text{cos}^2 x - \text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x \cdot \text{cos}^2 x}} + \frac{\frac{\text{cos}^2 x}{\text{sen}^2 x}}{\frac{\text{cos}^2 x - \text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x}} = \\ &= \frac{\text{sen}^2 x}{\text{cos}^2 x - \text{sen}^2 x} + \frac{\text{cos}^2 x}{\text{cos}^2 x - \text{sen}^2 x} = \frac{\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x}{\text{cos}^2 x - \text{sen}^2 x} = \frac{1}{\text{cos}^2 x - \text{sen}^2 x} \end{aligned}$$

## ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

**EJERCICIO 57** : Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a)  $\text{sen} x = 0$

b)  $\text{sen}(x + \pi/4) = \sqrt{3}/2$

c)  $2 \cdot \text{tag} x - 3 \cdot \text{cotag} x - 1 = 0$

d)  $3 \text{sen}^2 x - 5 \text{sen} x + 2 = 0$

e)  $\text{cos}^2 x - 3 \text{sen}^2 x = 0$

f)  $2 \text{cos} x = 3 \text{tag} x$

Solución:

a)  $\text{sen} x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 0^\circ + 180^\circ k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

b)  $\text{sen}(x + \pi/4) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x + 45^\circ = 60^\circ + 360^\circ k \Rightarrow x = 15^\circ + 360^\circ k \\ x + 45^\circ = 120^\circ + 360^\circ k \Rightarrow x = 75^\circ + 360^\circ k \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z}$

$$c) 2\operatorname{tag}x - 3 \operatorname{cotag}x - 1 = 0 \Rightarrow 2\operatorname{tag}x - \frac{3}{\operatorname{tag}x} - 1 = 0 \Rightarrow 2\operatorname{tag}^2x - \operatorname{tag}x - 3 = 0$$

$$\operatorname{tag}x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{matrix} 1,5 \\ -1 \end{matrix}$$

$$\operatorname{tag}x = 1,5 \Rightarrow x = 56^\circ 18' 35'' + 180^\circ k$$

$$\operatorname{tag}x = -1 \Rightarrow x = 135^\circ + 180^\circ k$$

$$d) 3\operatorname{sen}^2x - 5\operatorname{sen}x + 2 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}x = \frac{5 \pm 1}{6}$$

$$\operatorname{sen}x = 1 \Rightarrow x = 90^\circ + 180^\circ k$$

$$\operatorname{sen}x = 2/3 \Rightarrow x = \begin{matrix} 41^\circ 48' 37'' + 360^\circ k \\ 138^\circ 11' 23'' + 360^\circ k \end{matrix}$$

$$e) \cos^2x - 3\operatorname{sen}^2x = 0 \Rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2x - 3\operatorname{sen}^2x = 0 \Rightarrow 1 - 4\operatorname{sen}^2x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}^2x = 1/4 \Rightarrow \operatorname{sen}x = \pm 1/2$$

$$\operatorname{sen}x = 1/2 \Rightarrow \begin{matrix} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 150^\circ + 360^\circ k \end{matrix}$$

$$\operatorname{sen}x = -1/2 \Rightarrow \begin{matrix} x = 210^\circ + 360^\circ k \\ x = 330^\circ + 360^\circ k \end{matrix}$$

O resumido:  $\begin{matrix} x = 30^\circ + 180^\circ k \\ x = 150^\circ + 180^\circ k \end{matrix}$

$$f) 2\cos x = 3 \operatorname{tag}x \Rightarrow 2\cos x = \frac{3\operatorname{sen}x}{\cos x} \Rightarrow 2\cos^2x = 3\operatorname{sen}x \Rightarrow 2(1 - \operatorname{sen}^2x) = 3\operatorname{sen}x \Rightarrow$$

$$2 - 2\operatorname{sen}^2x = 3\operatorname{sen}x \Rightarrow 2\operatorname{sen}^2x + 3\operatorname{sen}x - 2 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{matrix} 1/2 \\ -2 \end{matrix}$$

$$\operatorname{Sen}x = 1/2 \Rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

$$\operatorname{Sen}x = -2 \Rightarrow \text{No tiene solución.}$$