

EJERCICIOS RESUELTOS DE LOGARITMOS

1. Hallar el valor de x : (ESTRATEGIA: Aplicar la definición $\log_b N = p \Leftrightarrow N = b^p$)

a) $\log_x 1000 = 3 \Leftrightarrow x^3 = 1000 \Rightarrow x = 10$

b) $\log_3 27 = x \Leftrightarrow 3^x = 27 \Rightarrow x = 3$

c) $\log_2 x = 3 \Leftrightarrow 2^3 = x \Rightarrow x = 8$

d) $\log_2 \left(\frac{1}{16}\right) = x \Leftrightarrow 2^x = \left(\frac{1}{16}\right) \Rightarrow x = -4$

e) $\log_x 32 = -5 \Leftrightarrow x^{-5} = 32 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

f) $\log x = 2 \Leftrightarrow 10^2 = x \Rightarrow x = 100$

g) $\ln x = 2 \Leftrightarrow e^2 = x$

h) $\log_x \left(\frac{1}{27}\right) = -3 \Leftrightarrow x^{-3} = \left(\frac{1}{27}\right) \Rightarrow x = 3$

2. Calcula: (ESTRATEGIA: Modificar el argumento para aplicar: $\log_b b^r = r$)

a) $\log_3 \sqrt[4]{243} = \log_3 \sqrt[4]{3^5} = \log_3 3^{5/4} = \frac{5}{4}$

b) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{243} = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{3^5} = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^{-5}} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-5/4} = -\frac{5}{4}$

c) $\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$

d) $\log_4 2 = \log_4 \sqrt{4} = \log_4 4^{1/2} = \frac{1}{2}$

e) $\log_{64} 2 = \log_{64} \sqrt[6]{64} = \log_{64} 64^{1/6} = \frac{1}{6}$

f) $\log_2 \sqrt{8} = \log_2 \sqrt{2^3} = \log_2 2^{3/2} = \frac{3}{2}$

g) $\log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{1/2} = \frac{1}{2}$

h) $\log_2 \sqrt[3]{2} = \log_2 2^{1/3} = \frac{1}{3}$

i) $\log_2 \sqrt{\frac{1}{2}} = \log_2 \sqrt{2^{-1}} = \log_2 2^{-1/2} = -\frac{1}{2}$

$$j) \log 1 = \log 1^0 = 0 \quad (\text{PROPIEDAD GENERAL: } \log_b 1 = 0)$$

$$k) \log_{1/10} 10 = \log_{1/10} \left(\frac{1}{10}\right)^{-1} = -1$$

$$l) \log_{1/10} 0,001 = \log_{1/10} 10^{-3} = \log_{1/10} \left(\frac{1}{10}\right)^3 = 3$$

$$m) \log \sqrt[3]{10000} = \log \sqrt[3]{10^4} = \log 10^{4/3} = \frac{4}{3}$$

$$n) \log_{1/10} \sqrt[3]{1000} = \log_{1/10} 10 = \log_{1/10} \left(\frac{1}{10}\right)^{-1} = -1$$

3. Halla la base de los siguientes logaritmos: (DEFINICIÓN DE LOGARITMO)

$$a) \log_a 10000 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 10000 \Rightarrow a = 100 \quad (\text{la solución } a = -100 \text{ no tiene sentido})$$

$$b) \log_a 16 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 \quad (a = -4)$$

$$c) \log_a 125 = 3 \Leftrightarrow a^3 = 125 \Rightarrow a = 5$$

$$d) \log_a 729 = -3 \Leftrightarrow a^{-3} = 729 \Rightarrow a^{-3} = 3^6 \Rightarrow a^{-3} = 9^3 \Rightarrow a^{-3} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-3} \Rightarrow a = \frac{1}{9}$$

4. Expresa como un solo logaritmo (APLICAR LAS PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES)

$$a) \log 6 + \log 8 - \log 3 = \log \frac{6 \cdot 8}{3} = \log 16$$

$$b) \log 9 + \log 28 - (\log 7 - \log 9) = \log \frac{9 \cdot 28}{7} = \log \frac{9 \cdot 28 \cdot 9}{7} = \log 324$$

5. Calcula

$$\log 1000 - \log 0,001 + \log \frac{1}{1000} = \log 10^3 - \log 10^{-3} + \log 10^{-3} = 3 - (-3) + (-3) = 3$$

6. Sabiendo que $\log_2 \approx 0,301030$, calcula:

(ESTRATEGIA): Transformar los argumentos para ponerlos en función de 2 y de 10, cuyos logaritmos decimales conocemos)

$$a) \log 4 = \log 2^2 = 2 \cdot \log 2 = 2 \cdot 0,301030 = 0,602060$$

$$b) \log \frac{1}{2} = \log 1 - \log 2 = 0 - 0,301030 = -0,301030$$

$$\begin{aligned}
c) \log 5 &= \log\left(\frac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 = 1 - 0,301030 \approx 0,69897 \\
d) \log 0,5 &= \log\left(\frac{1}{2}\right) = \log 1 - \log 2 = 0 - 0,301030 \approx -0,301030 \\
e) \log \sqrt{2} &= \log 2^{1/2} = \frac{1}{2} \cdot \log 2 = \frac{1}{2} \cdot 0,301030 \approx 0,150515 \\
f) \log 16 &= \log 2^4 = 4 \cdot \log 2 = 4 \cdot 0,301030 \approx 1,20412 \\
g) \log\left(\frac{1}{16}\right) &= \log 1 - \log 16 = 0 - 4 \cdot \log 2 \approx -1,20412 \\
h) \log 0,025 &= \log(25 \cdot 10^{-3}) = \log 25 + \log 10^{-3} = \log\left(\frac{10}{2}\right)^2 + \log 10^{-3} = 2 \cdot \log\left(\frac{10}{2}\right) + \log 10^{-3} = \\
&= 2 \cdot (\log 10 - \log 2) + (-3) = 2(1 - 0,301030) - 3 \approx -1,60206 \\
i) \log \sqrt[3]{32} &= \log 2^{5/3} = \frac{5}{3} \cdot \log 2 = \frac{5}{3} (0,301030) \approx 0,50172 \\
j) \log \sqrt{\frac{1}{2}} &= \log 2^{-1/2} = -\frac{1}{2} \cdot 0,301030 \approx -0,150515 \\
k) \log \sqrt{\frac{1}{64}} &= \log \frac{1}{8} = \log 2^{-3} = -3 \cdot 0,301030 \approx -0,903090 \\
l) \log 0,00625 &= \log(625 \cdot 10^{-5}) = \log(5^4 \cdot 10^{-5}) = \log\left(\frac{10}{2}\right)^4 + \log 10^{-5} = \\
&= 4(\log 10 - \log 2) - 5 \cdot \log 10 = 4(1 - 0,301030) - 5 \approx -2,20412 \\
m) \log \frac{1}{1024} &= \log \frac{1}{2^{10}} = \log 2^{-10} = -10 \cdot 0,301030 \approx -3,01030 \\
n) \log \sqrt{\frac{5}{16}} &= \log \frac{\sqrt{5}}{4} = \log\left(\frac{10}{2}\right)^{1/2} - \log 2^2 = \frac{1}{2}(\log 10 - \log 2) - 2 \cdot \log 2 = \\
&= \frac{1}{2}(1 - 0,301030) - 2 \cdot 0,301030 \approx -0,252575
\end{aligned}$$

7. Expresa como un solo logaritmo:

$$\begin{aligned}
a) 3(\log 8 - \log 4) + \log 3 &= 3 \cdot \log \frac{8}{4} + \log 3 = \log 2^3 + \log 3 = \log(8 \cdot 3) = \log 24 \\
b) \log 6 + \log 2 - \log 3 &= \log \frac{6 \cdot 2}{3} = \log 4 \\
c) 2 \log 2 + \log 30 - \log 12 &= \log \frac{2^2 \cdot 30}{12} = \log 10 = 1 \\
d) (\log 3 + \log 25) - \left(\frac{1}{2} \log 3 + \log 5\right) &= \log(3 \cdot 25) - \log 5\sqrt{3} = \log \frac{3 \cdot 25^5}{5\sqrt{3}} = \\
&= \log \frac{15}{\sqrt{3}} = \log \frac{15\sqrt{3}}{3} = \log 5\sqrt{3}
\end{aligned}$$

8. Calcula A, B, C y D en las siguientes expresiones:

$$\left(\begin{array}{l} \text{ESTRATEGIA: llegar a: } \log_b A = \log_b B \Leftrightarrow A=B \\ \text{OJO: ¡NO TACHAR logaritmos como si fuesen factores!} \end{array} \right)$$

a) $\log A = 3\log x + \log y - 2\log z \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log A = \log x^3 + \log y - \log z^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log A = \log \frac{x^3 \cdot y}{z^2} \Leftrightarrow A = \frac{x^3 y}{z^2}$$

b) $\log B = 4\log x - 5\log y + 2\log z \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log B = \log \frac{x^4 \cdot z^2}{y^5} \Leftrightarrow B = \frac{x^4 \cdot z^2}{y^5}$$

c) $\log C = 2\log x - 3\log y + 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log C = \log x^2 - \log y^3 + \log 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log C = \log \frac{100x^2}{y^3} \Leftrightarrow C = \frac{100x^2}{y^3}$$

d) $\log D = 2 - 3\log x + 3\log z \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log D = \log 100 - \log x^3 + \log z^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log D = \log \frac{100z^3}{x^3} \Leftrightarrow D = \frac{100z^3}{x^3} = 100\left(\frac{z}{x}\right)^3$$

9. Expresa en función de $\log 2$ y de $\log 10$ la expresión:

$$\log 125 - \log 0.5 + 2\log 25 = \log 5^3 - \log \frac{1}{2} + \log (5^2)^2 =$$

$$= \log \left(\frac{10}{2}\right)^3 - \log \left(\frac{1}{2}\right) + \log \left(\frac{10}{2}\right)^4 = 3(\log 10 - \log 2) - (\log 1 - \log 2) + 4(\log 10 - \log 2) =$$

$$= 3(1 - \log 2) + \log 2 + 4(1 - \log 2) = 3 - 3\log 2 + \log 2 + 4 - 4\log 2 =$$

$$= 7 - 6\log 2$$

10. Calcular sin calculadora:

$$a) \log_5 \frac{25\sqrt{5}}{\sqrt[5]{125}} = \log_5 \frac{5^2 \cdot 5^{1/2}}{5^{3/5}} = \log_5 5^{(2+\frac{1}{2}-\frac{3}{5})} = 2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{5} = \frac{20+5-6}{10} = \frac{19}{10}$$

$$b) \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$$

$$c) \log_2 0.5 = \log_2 \left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 2^{-1} = -1$$

$$d) \log_3 \sqrt[4]{27} = \log_3 3^{3/4} = \frac{3}{4}$$

$$e) \log_2 \frac{16}{\sqrt{64}} = \log_2 \frac{2^4}{2^3} = \log_2 2 = 1$$

11. Aplica las propiedades de los logaritmos para desarrollar o agrupar:

$$a) \log \left(\frac{a^2 \cdot b^3}{c^4} \right) = \log(a^2 \cdot b^3) - \log c^4 = \log a^2 + \log b^3 - \log c^4 = 2 \log a + 3 \log b - 4 \log c$$

$$b) \ln \left(\frac{\sqrt{a^3}}{b^2 \cdot c^{-4}} \right) = \ln a^{3/2} - (\ln b^2 + \ln c^{-4}) = \frac{3}{2} \ln a - 2 \ln b + 4 \ln c$$

$$c) 3 \log 5 + \frac{1}{2} \log 9 - 3 \log 3 - \log 25 = \log 5^3 + \log 9^{1/2} - \log 3^3 - \log 25 = \log \frac{5^3 \cdot 3}{3^3 \cdot 5^2} = \log \frac{5}{3^2}$$

$$d) \frac{1}{2} \log a - 2 \log b - \log c - \frac{5}{2} \log d = \log \frac{\sqrt{a}}{b^2 \cdot c \cdot \sqrt{d^5}}$$

$$e) \log_2 \left(\frac{a^4 b^3}{\sqrt[5]{c^2}} \right) = 4 \log_2 a + 3 \log_2 b - \frac{2}{5} \log_2 c$$

12. Usa el cambio de base y la calculadora para calcular:

$$a) \log_5 80 = \frac{\log 80}{\log 5} = \frac{1.9031}{0.6990} = 2.7226 \quad \text{ó} \quad \log_5 80 = \frac{\ln 80}{\ln 5} = \frac{4.3820}{1.6094} = 2.7226$$

$$b) \log_{12} 100 = \frac{\log 100}{\log 12} = 1.8533$$

$$c) \log_5 200 = \frac{\log 200}{\log 5} = 3.2920$$

$$d) \log_{100} 40 = \frac{\log 40}{\log 100} = 0.8010$$

$$e) \log_3 \frac{3}{1/274} = \log_3 822 = \frac{\log 822}{\log 3} = 6,1093$$

$$f) \log_3 \frac{\sqrt[3]{9}}{27} = \log_3 \frac{3^{2/3}}{3^3} = \log_3 3^{2/3-3} = \frac{2}{3} - 3 = -\frac{7}{3}$$

$$\text{CON CALCULADORA: } \log_3 \frac{\sqrt[3]{9}}{27} = \frac{\log(\sqrt[3]{9}/27)}{\log 3} = -\frac{7}{3}$$

13. Expresa como un solo logaritmo:

$$a) \log_2 5 - 3\log_2 a + \frac{7}{3}\log_2 9 = \log_2 \frac{5}{a^3} + \log_2 \sqrt[3]{9^7} = \log_2 \frac{5 \sqrt[3]{9^7}}{a^3}$$

$$b) \frac{1}{2}\log m - 2\log t - \log p + \frac{5}{2}\log h = \log \frac{\sqrt{m} \cdot \sqrt{h^5}}{t^2 \cdot p} = \log \frac{\sqrt{mh^5}}{t^2 p}$$

$$14. \text{ Calcula } A: \log A = 2\log 3 - \frac{1}{2}\log y + \frac{3}{4}\log x \Rightarrow \log A = \log \frac{3^2 \cdot \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A = \frac{9 \cdot \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{y}}$$

15. Transforma la siguiente expresión algebraica en una expresión logarítmica:

$$A = \frac{7x^3}{y^2} \Rightarrow \log A = \log \frac{7x^3}{y^2} = \log 7x^3 - \log y^2 = \log 7 + \log x^3 - 2\log y = \\ = \log 7 + 3\log x - 2\log y$$

16. Sabiendo que $\log a = 0,123$ y que $\log b = 0,345$, calcula:

$$a) \log \frac{a \cdot b^2}{\sqrt{a^5}} = \log a + 2\log b - \frac{5}{2}\log a = 2\log b + \left(1 - \frac{5}{2}\right)\log a = \\ = 2 \cdot 0,345 - \frac{3}{2} \cdot 0,123 = 0,5055$$

$$b) \log \frac{3 \cdot \sqrt{a^3}}{b^4} = \log(3\sqrt{a^3}) - \log b^4 = \log 3 + \frac{3}{2}\log a - 4\log b = \\ = \log 3 + \frac{3}{2} \cdot 0,123 - 4 \cdot 0,345 = \log 3 - 1,1955 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{calculadora}}}{= -0,7184}$$

17. Sabiendo que $\log 2 \approx 0,3$ y que $\log 3 \approx 0,5$, calcula $\log \frac{0,12}{\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned}\log \frac{0,12}{\sqrt{3}} &= \log 0,12 - \log \sqrt{3} = \log(12 \cdot 10^{-2}) - \frac{1}{2} \log 3 = \\&= \log 12 + \log 10^{-2} - \frac{1}{2} \log 3 = \log(2^2 \cdot 3) + \log 10^{-2} - \frac{1}{2} \log 3 = \\&= 2 \cdot \log 2 + \log 3 - 2 \cdot \log 10 - \frac{1}{2} \log 3 = 2 \log 2 + \frac{1}{2} \log 3 - 2 = \\&\approx 2 \cdot 0,3 + \frac{1}{2} \cdot 0,5 - 2 \approx -1,15\end{aligned}$$

18. Sabiendo que $\log 5 \approx 0,7$. Calcula:

a) $\log 500 = \log(5 \cdot 100) = \log 5 + \log 100 \approx 0,7 + 2 = 2,7$

b) $\log 2000 = \log \frac{10000}{5} = \log 10000 - \log 5 \approx 4 - 0,7 = 3,3$

19. Aplica los logaritmos para resolver la ecuación exponencial:

$$\begin{aligned}3^{x+1} &= 60 \Rightarrow 3 \cdot 3^x = 60 \Rightarrow 3^x = 20 \Leftrightarrow \log 3^x = \log 20 \Rightarrow \\&\Rightarrow x \cdot \log 3 = \log 20 \Rightarrow x = \frac{\log 20}{\log 3} \approx 2,7268\end{aligned}$$

20. Calcula los siguientes logaritmos:

a) $\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$

b) $\log_9 1 = 0$

c) $\log_5 \left(\frac{1}{625}\right) = \log_5 5^{-4} = -4$

d) $\log 0,1 = \log 10^{-1} = -1$

e) $\log_{1/5} \left(\frac{1}{125}\right) = \log \left(\frac{1}{5}\right)^3 = 3$

f) $\log_5 0,04 = \log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = -2$

g) $\log \sqrt[5]{100} = \log 10^{2/5} = \frac{2}{5}$

h) $\log_6 \frac{1}{216} = \log_6 6^{-3} = -3$