

PREGUNTA 1: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ calcular:

- a) $A^2 - 2A - 8I_3$
- b) Hallar la matriz X, tal que: $AX = I_3$

PREGUNTA 2: Calcula A^{2016} , siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

PREGUNTA 3: Determinar la matriz X que verifique $A^2 X = \frac{1}{2}(A+BC)$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

PREGUNTA 4: Calcular el rango de la matriz A según los distintos valores del parámetro k:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & k \\ 1 & -k & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

PREGUNTA 5: Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & m-6 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

- a) Calcula los valores de m que hacen que A tenga inversa.
- b) Haciendo $m=4$, resuelve la siguiente ecuación matricial:

$$XA = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Todas las preguntas se calificarán sobre un mismo valor de 2 puntos.

PREGUNTA 1:

$$\begin{aligned}
 a) \quad A^2 - 2A - 8I_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} - 8 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$b) \quad \text{Si } A \cdot X = I_3 \Rightarrow X = A^{-1}$$

• Cálculo de A^{-1} por Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned}
 &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{2F_2 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{2F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{\begin{matrix} 1/4 \cdot F_1 \\ -1/4 F_2 \\ 1/4 F_3 \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \end{array} \right) \quad \boxed{A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}
 \end{aligned}$$

• Cálculo de A^{-1} por determinantes:

$$|A| = 0 + 8 + 8 - 0 - 0 - 0 = 16 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \textcircled{2} & 2 \\ \textcircled{2} & 0 & \textcircled{2} \\ 2 & \textcircled{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Adj(A)} \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot \frac{1}{|A|}} \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

luego: $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$

PREGUNTA 2:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = 4I \cdot A = 4 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = 4 \cdot A \cdot A = 4A^2 = 4 \cdot 4I = 16I$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = 16I \cdot A = 16A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 32 \\ 0 & 32 & 0 \\ 32 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

•
•
•

$$A^n = 2^n \cdot I \quad \text{si } n \text{ es par}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 2^n & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{si } n \text{ es impar}$$

$$\text{Entonces: } A^{2016} = 2^{2016} \cdot I = \begin{pmatrix} 2^{2016} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2016} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2016} \end{pmatrix}$$

(NOTA: Si tratas de calcular 2^{2016} con la calculadora te dará ERROR, porque es un número tan grande que no puede representarlo ni siquiera empleando la notación científica)

PREGUNTA 3:

$$A^2 X = \frac{1}{2} (A + BC)$$

$$\underbrace{(A^2)^{-1}}_I \cdot A^2 \cdot X = (A^2)^{-1} \cdot \frac{1}{2} (A + BC) = \frac{1}{2} (A^2)^{-1} (A + BC) \Rightarrow \boxed{X = \frac{1}{2} (A^2)^{-1} (A + BC)}$$

$$A + BC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 10 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 11 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A^2)^{-1}: \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 - 3F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{4}F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/4 & -3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\quad}_{I_2} \quad \underbrace{\quad}_{(A^2)^{-1}}$

Por lo tanto:

$$\boxed{X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1/4 & -3/4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 11 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 11 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 40 & 12 \end{pmatrix} =}$$

$$\boxed{\boxed{= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 20 & 6 \end{pmatrix}}}$$

PREGUNTA 4:

A) Por el método de Gauss:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & K \\ 1-K & 5 & -2 & \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & K \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1-K & 5 & -2 & \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & K \\ 0 & -1 & 3 & 2-2K \\ 0 & -K & 6 & -2-K \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 - KF_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & K \\ 0 & -1 & 3 & 2-2K \\ 0 & 0 & 6-3K & \underbrace{-2-K-2K+2K^2}_{2K^2-3K-2} \end{pmatrix} \leftarrow \text{Analizamos si existe algún valor de } K \text{ que haga esta fila nula.}$$

$$6-3K=0 \Rightarrow 3K=6 \Rightarrow \boxed{K=2}$$

$$2K^2-3K-2=0 \Rightarrow \boxed{K = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} = 2 ; -\frac{1}{2}}$$

Conclusión:

Si $K=2$ la fila 3 se anula y
 $\text{rg}(A)=2$; para cualquier otro valor de K : $\text{rg}(A)=3$
B) Por determinantes: $A_{3 \times 4}$: mayor rango posible: $\text{rg}(A)=3$

Menores de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1-K & 5 & \end{vmatrix} = -K+1-2K+5 = -3K+6 ; -3K+6=0 \Rightarrow \boxed{K=2}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & K \\ 1-K & -2 & \end{vmatrix} = -2K-K+2K^2-2 = 2K^2-3K-2 ; 2K^2-3K-2=0 \Rightarrow \boxed{K=2} \text{ ó } K=-\frac{1}{2}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & K \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 4+10+K+2-10K+2 = -9K+18 ; -9K+18=0 \Rightarrow \boxed{K=2}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & K \\ -K & 5 & -2 \end{vmatrix} = -2-K^2-2K+5K = -K^2+3K-2 ; -K^2+3K-2=0 \Rightarrow K=1 \text{ ó } \boxed{K=2}$$

Si $\boxed{K=2}$ se anulan todos los menores de orden 3 $\Rightarrow \text{rg}(A) < 3$

$$\bullet \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A)=2 ; \text{Para cualquier otro valor de } K: \text{rg}(A)=3$$

PREGUNTA 5:

$$a) \quad |A| = 3(m+1) + (m-6)(m+1) - 12 = 3m+3+m^2+m-6m-6-12 = m^2-2m-15$$

$$m^2-2m-15=0 \Rightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = 1 \pm 4 = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$$

Por lo tanto: A tendrá inversa $\forall m \in \mathbb{R} - \{5, -3\}$

$$b) \quad X \cdot A = (3 \ 1 \ 1) \Rightarrow X = (3 \ 1 \ 1) \cdot A^{-1}$$

$$\text{Si } m=4 \Rightarrow |A| = 4^2 - 2 \cdot 4 - 15 = 16 - 8 - 15 = -7$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \textcircled{1} & -1 \\ \textcircled{0} & -2 & \textcircled{3} \\ 5 & \textcircled{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Adj}(A)} \begin{pmatrix} -6 & 15 & 10 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{t} \begin{pmatrix} -6 & -2 & 1 \\ 15 & 5 & -6 \\ 10 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot \frac{1}{|A|}} -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -6 & -2 & 1 \\ 15 & 5 & -6 \\ 10 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego: } \underline{\underline{X}} = (3 \ 1 \ 1) \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) \begin{pmatrix} -6 & -2 & 1 \\ 15 & 5 & -6 \\ 10 & 1 & -4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7} (7 \ 0 \ -7) = \underline{\underline{(-1 \ 0 \ 1)}}$$

dimensiones: $(1 \times 3)(3 \times 3) = (1 \times 3)$