

PREGUNTA 1: Un museo tiene tres salas de exposiciones: A, B y C. Los precios de las entradas son, respectivamente, 2, 4 y 7 €. Un determinado día entraron en la sala un total de 120 personas. Se sabe que el número de visitantes conjunto de las salas A y C coincide con la séptima parte de la recaudación total, en euros.

- ¿Es posible saber con estos datos el número de visitantes a cada sala? Justificar matemáticamente la respuesta. (1 punto)
- Si además se sabe que la recaudación en la sala B asciende a 200 €, ¿Es posible conocer el número de visitantes a cada sala? En caso afirmativo, resuelve el problema. (1 punto)

PREGUNTA 2: Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $B = (x \ m)$; $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$;

$$E = \begin{pmatrix} -y + 2m + 2 \\ -2x - my + 5 \end{pmatrix}$$

- Si $(AB)(2C-D) = E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (x e y) en función del parámetro m . (1 punto)
- Discute las soluciones del sistema anterior según los valores de m . (1 punto)
- Resuelve el sistema si $m=4$. (0,5 puntos)

PREGUNTA 3: Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 5 \\ 5x + y - z = 11 \\ 3x - y + az = 2 \end{array} \right\}$$

- Discutir el sistema en función del parámetro a . (1,25 puntos)
- Resolver si $a=-4$. (1,25 puntos)

PREGUNTA 4: Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{array}{l} kx + y + z = 1 \\ y + z = 1 \\ x + ky + z = 2 \end{array} \right\}$$

- Discutir el sistema en función del parámetro k . (1,5 puntos)
- Resolver siempre que sea posible. (1,5 puntos)

Sólo se valorarán las respuestas debidamente justificadas

PREGUNTA 1:

Llamemos:

$A \equiv$ nº de visitantes a la sala A.

$B \equiv$ nº " " " " " B.

$C \equiv$ nº " " " " " C.

Ecuaciones:

a) $A+B+C=120$

$$A+C = \frac{1}{7}(2A+4B+7C) \Rightarrow 7A-2A-4B+7C-7C=0 \Rightarrow 5A-4B=0$$

Sistema: $A+B+C=120$ } 3 incógnitas
 $5A-4B=0$ } 2 ecuaciones

$$A^{\#} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 5 & -4 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

A

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -4-5 = -9 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^{\#}) = 2 < n \Rightarrow \text{S.C.I.}$$

Imposible dar una solución única.

b) $A+B+C=120$ }
 $5A-4B=0$ }
 $4B=200$ }

$$\Rightarrow B=50 \Rightarrow 5A-4 \cdot 50=0 \Rightarrow A=40 \Rightarrow C=120-50-40=30$$

A = 40 personas
B = 50 personas
C = 30 personas

PREGUNTA 2

$$a) \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_{(2 \times 1)} \cdot \begin{bmatrix} x & m \end{bmatrix}_{(1 \times 2)} \cdot \left[2 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 3x & 3m \\ x & m \end{pmatrix}_{(2 \times 2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{(2 \times 1)} = \begin{pmatrix} 3x+3m \\ x+m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+2m+2 \\ -2x-my+5 \end{pmatrix}$$

luego:

$$\begin{cases} 3x+3m = -y+2m+2 \\ x+m = -2x-my+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+y = 2-m \\ 3x+my = 5-m \end{cases}$$

$$b) A^* = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2-m \\ 3 & m & 5-m \end{array} \right] \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & m \end{vmatrix} = 3m-3 = 3(m-1)$$

A

$$|A|=0 \Leftrightarrow m=1$$

• Si $m \neq 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 = n \Rightarrow \text{S.C.D.}$

• Si $m=1 \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow \text{rg}(A)=1$

$$A^* = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{array} \right] \quad \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{array} \right| = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2$$

} S. INCOMPATIBLE

c) Si $m=4 \Rightarrow m \neq 1 \Rightarrow \text{S.C.D.}$

$$\begin{array}{l} 3x+y = -2 \\ -3x+4y = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \hline -3y = -3 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = -1 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

PREGUNTA 3:

$$a) \begin{cases} x+y+z=5 \\ 5x+y-z=11 \\ 3x-y+az=2 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & a \end{vmatrix} = -4a - 12 = -4(a+3) \Rightarrow |A|=0 \Leftrightarrow a=-3$$

- Si $a \neq -3 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 = n \Rightarrow \text{SCD}$
- Si $a = -3 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \text{rg}(A) < 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$$

$$\text{rg}(A^*): \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 11 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3 \left. \vphantom{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 11 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}} \right\} \text{S.INCOMP.}$$

b) Si $a = -4$:

$$\begin{cases} x+y+z=5 \\ 5x+y-z=11 \\ 3x-y-4z=2 \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} x+y+z=5 \\ 5x+y-z=11 \\ 3x-y-4z=2 \end{cases}} \right\} \text{s.c.d. Cuadrado (Cramer)}$$
$$|A| = -4(-4+3) = 4$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 11 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix}}{4} = \frac{4}{4} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 5 & 11 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{4} = \frac{20}{4} = 5; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 11 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

PREGUNTA 4:

$$\left. \begin{array}{l} Kx + y + z = 1 \\ y + z = 1 \\ x + Ky + z = 2 \end{array} \right\} A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} K & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & K & 1 & 2 \end{array} \right)$$

A

a) $|A| = -K^2 + K = K(1-K)$

$|A| = 0 \Rightarrow K=0 \text{ ó } K=1$

• Si $K \neq 0$ y $K \neq 1$; $|A| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 = n \Rightarrow \text{SCD}$

• Si $K=0 \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow \text{rg}(A) < 3$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$

$\text{rg}(A^*)$: $|A|=0$; $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2$ } S.C.I.

• Si $K=1$: $|A|=0 \Rightarrow \text{rg}(A) \leq 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$

$\text{rg}(A^*)$: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3$ } S.INCOMP.

b) Si $K=0$ (S.C.I)

Tomamos el menor de orden 2 no nulo:

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \left. \begin{array}{l} 0x + y = 1 - \lambda \\ x + 0y = 2 - \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \quad (0,5p)$

$(\lambda = z)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

• Si $K \neq 0$ y $K \neq 1 \Rightarrow$ S.C.D

$$|A| = K(1-K)$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & K & 1 \end{vmatrix}}{K(1-K)} = \frac{\cancel{1} + \cancel{K} + \cancel{2} - \cancel{2} - \cancel{K} - \cancel{1}}{K(1-K)} = \frac{0}{K(1-K)} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} K & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{K(1-K)} = \frac{K + 0 + \cancel{1} - \cancel{1} - 2K - 0}{K(1-K)} = \frac{-K}{\cancel{K}(1-K)} = -\frac{1}{1-K} = \frac{1}{K-1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} K & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & K & 2 \end{vmatrix}}{K(1-K)} = \frac{2K + 0 + \cancel{1} - \cancel{1} - K^2 - 0}{K(1-K)} = \frac{2K - K^2}{K(1-K)} = \frac{K(2-K)}{\cancel{K}(1-K)} = \frac{2-K}{1-K}$$

luego $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/K-1 \\ 2-K/1-K \end{pmatrix}$ (1p)