PROGRAMACIÓN LINEAL.

1.- Un banco quiere distribuir a sus empleados entre sus oficinas centrales y sus sucursales. Cada oficina central necesita 10 empleados del tipo A y 6 empleados del tipo B. Cada sucursal necesita 4 empleados del tipo A y 1 empleado del tipo B. Hay un total de 260 empleados del tipo A y 86 empleados del tipo B. Como máximo debe haber 8 oficinas centrales. Si el banco gana tres millones de euros en una oficina central y un millón en una sucursal ¿cuántas oficinas centrales y sucursales deberá abrir para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál será dicho beneficio máximo?

2.- En una ebanistería se fabrican dos tipos de mesas: mesas de comedor y mesas para ordenador. Las mesas de comedor necesitan 4 m^2 de madera y las mesas para ordenador 3 m^2. El fabricante dispone de 60 m^2 de madera y decide confeccionar al menos 3 mesas de comedor y al menos el doble de mesas de ordenador que de mesas de comedor. Además, por cada mesa de ordenador obtiene un beneficio de 200 €, mientras que obtiene un beneficio de 300 € por cada mesa de comedor. ¿Cuántas mesas de cada tipo debe fabricar para obtener el beneficio máximo?.

3.- El club "Amigos del Románico" quiere organizar un viaje visitando el románico de Castilla y León para sus 200 socios. Acude para ello a una agencia de viajes que dispone de 4 microbuses de 25 plazas y 5 autobuses de 50 plazas, pero sólo dispone de 6 conductores. El alquiler de un autobús es de 160 euros por día, mientras que el alquiler de un microbús es de 70 euros por día. Con esas condiciones, ¿cómo deben organizar el viaje para que el coste del viaje sea el menor posible?

4.- En una factoría, se desean producir al menos 4 unidades del producto B. Cada unidad de producto B ocupa un metro cúbico de espacio de almacenamiento, lo mismo que cada unidad de producto A. Tan solo disponemos de un almacén con capacidad de 20 metros cúbicos. Juan se encarga de una fase de la producción y Pedro de otra fase de la producción. Cada unidad de A requiere 4 horas de trabajo de Juan y 2 horas de trabajo de Pedro. Cada unidad de B requiere 1 hora de trabajo de Juan y 3 horas de trabajo de Pedro. Juan debe trabajar al menos 32 horas y Pedro al menos 36 horas. Cada unidad de producto A produce un beneficio de 25 euros y cada unidad de B produce un beneficio de 20 euros. Utilizando técnicas de programación lineal, calcula el número de unidades de producto A y de producto B que permiten obtener mayores beneficios, así como el beneficio máximo que se puede conseguir.

5.- Una fábrica produce mermelada de naranja y de ciruela. El doble de la producción de mermelada de ciruela es menor o igual que la producción de mermelada de naranja más 800 cajas. También, se sabe que el triple de la producción de mermelada de naranja más el doble de la producción de mermelada de ciruela es menor o igual que 2400 cajas. Cada caja de mermelada de naranja produce un beneficio de 40 euros y cada caja de mermelada de ciruela 50 euros. Utilizando técnicas de programación lineal, ¿cuántas cajas de cada tipo de mermelada se han de producir para obtener un beneficio máximo? Calcula el beneficio máximo.

6.- Cada instalación de una televisión analógica necesita 10 metros de cable y cada instalación de televisión digital necesita 20 metros. Cada televisión analógica necesita 20 minutos de instalación y 30 minutos cada televisión digital. Disponemos un máximo de 400 metros de cable al día. Tenemos que trabajar al menos 300 minutos al día. Diariamente podemos instalar un máximo de 20 televisiones analógicas y debemos instalar al menos 6 televisiones digitales. Por cada televisión analógica instalada obtenemos unos ingresos de 10 euros y por cada televisión digital 15 euros. Utilizando técnicas de programación lineal, representa la región factible, calcula el número de televisores analógicos y digitales que permiten obtener mayores ingresos diariamente, así como el ingreso máximo diario que se puede conseguir.

7.- Una fábrica de papel tiene almacenados 4000 kg de pasta de papel normal y 3000 kg de pasta de papel reciclado. La fábrica produce dos tipos diferentes de cajas de cartón. Para el primer tipo se utilizan 0.2 kg de pasta de papel normal y 0.1 kg de pasta de papel reciclado, mientras que para la caja del segundo tipo se utilizan 0.2 kg de pasta de papel normal y 0.3 kg de pasta de papel reciclado. Los beneficios que la fábrica obtiene por la venta de cada caja son, respectivamente 5€ para el primer tipo y 6€ para el segundo tipo de cajas. Utilizando técnicas de programación lineal, calcula cuántas cajas de cada tipo deben fabricar para obtener el máximo beneficio. ¿A cuánto asciende el beneficio máximo obtenido?

8.- Una ONG organiza un convoy de ayuda humanitaria con un máximo de 27 camiones, para llevar agua potable y medicinas a una zona devastada por unas inundaciones. Para agua potable dedica un mínimo de 12 camiones y para medicinas debe dedicar un número de camiones mayor o igual que la mitad del número de camiones dedicados a llevar agua. Enviar un camión con agua potable tiene un coste de 9000 euros, mientras que el coste para un camión de medicinas es de 6000 euros. Calcula, utilizando técnicas de programación lineal, cómo debe organizarse el convoy para que su coste sea mínimo ¿Cuánto es el coste de la solución óptima?

9.- Un fabricante de plásticos pretende fabricar nuevos productos plásticos mezclando dos compuestos químicos A y B. Cada litro de producto plástico 1 lleva 2/5 partes del compuesto A y 3/5 partes del compuesto B, mientras que el producto plástico 2 lleva una mitad del compuesto A y la otra mitad del compuesto B. Se disponen de 100 litros del compuesto A y 120 litros del compuesto B. Sabemos que al menos necesitamos fabricar 50 litros del producto 1 y que el beneficio obtenido por un litro de producto plástico 1 es de 10 euros, mientras que por un litro del producto plástico 2 el beneficio es de 12 euros.
Utilizando técnicas de programación lineal, representa la región factible y calcula el número óptimo de litros que se debe producir de cada producto plástico para conseguir el mayor beneficio posible. ¿Cuál es ese beneficio máximo?

10.- Como cada año, al inicio del curso académico, una tienda de material escolar prepara una oferta de 600 cuadernos, 500 carpetas y 400 bolígrafos para los alumnos de un IES, empaquetando el material de dos formas distintas. El primer paquete contiene 2 cuadernos, 1 carpeta y 2 bolígrafos, mientras que el segundo contiene 3 cuadernos, 1 carpeta y 1 bolígrafo. El primer paquete se vende al precio de 6.50 euros, mientras que el segundo se vende a 7 euros. Usando técnicas de programación lineal, ¿cuántos paquetes de cada tipo han de realizar para obtener la máxima recaudación? ¿A cuánto asciende dicha recaudación?

11.- Una empresa de transportes debe organizar el traslado de dos productos A y B entre dos ciudades utilizando camionetas y furgones. Cada camioneta permite transportar 5 unidades de A y 4 de B, mientras que en cada furgón se puede transportar 2 unidades de A y 1 de B. La empresa no puede transportar más unidades de las que pueda vender en la ciudad de destino y en la ciudad de destino puede vender como máximo 90 unidades de A y 60 de B. El envío de una camioneta le reporta a la empresa un beneficio de 1600 euros, mientras que el envío de un furgón le reporta un beneficio de 600 euros. Usando técnicas de programación lineal, ¿cuántas camionetas y furgones deben usar para maximizar el beneficio en estos transportes? ¿A cuánto asciende dicho beneficio óptimo?

12.- Un alfarero dispone semanalmente de 150 kg de arcilla de tipo A y de 22 kg de arcilla de tipo B para la fabricación de ánforas y jarrones. La producción de un ánfora requiere 3 kg de arcilla de tipo A y 1 kg de tipo B, pero la de un jarrón necesita 6 kg de arcilla de tipo A y 500 gramos de arcilla de tipo B. Por limitaciones de espacio para el almacén, como máximo puede fabricar 26 vasijas (entre ánforas y jarrones). El precio de venta de un ánfora es 20 euros y el de un jarrón es 30 euros. Utiliza técnicas de programación lineal para hallar el número de ánforas y de jarrones que debe fabricar el alfarero para que su recaudación sea máxima. ¿Cuál es esa recaudación máxima?

13.- En una quesería se producen dos tipos de queso de leche de oveja: fresco y curado. La elaboración de un queso curado requiere 6 litros de leche de oveja y la de un queso fresco 3 litros. La ganancia por la venta de un queso fresco es 10 euros y por la de uno curado es 30 euros. Se sabe que la quesería dispone diariamente de 1800 litros de leche de oveja y su capacidad de producción es de 500 quesos diarios. Debido a la demanda, la producción de queso fresco debe ser al menos el doble que la de queso curado. Utiliza técnicas de programación lineal para encontrar la producción de quesos que hace máxima la ganancia diaria total de la fábrica por la venta de quesos, así como dicha ganancia máxima.

* BANCO
  * OFICINAS CENTRALES (X)
    * 10 TIPO A
    * 6 TIPO B
  * SUCURSALES (Y)
    * 4 TIPO A
    * 1 TIPO B

* TOTALES
  * TIPO A : 260 empleados
  * TIPO B : 86 empleados

* Máximo: 8 oficinas centrales

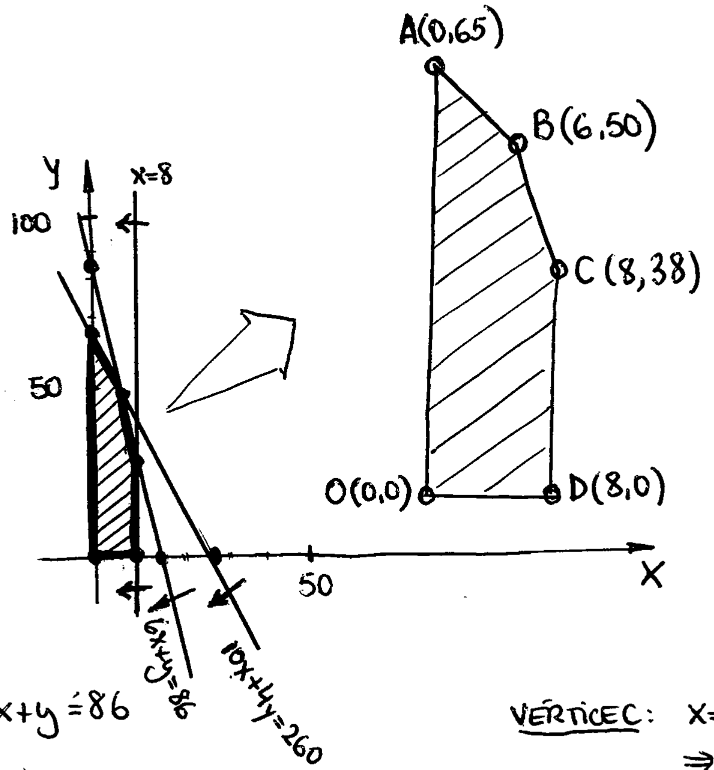
* Ganancias : 3 mill.€/OF.CRAL ; 1 millón €/SUCURSAL

FUNCIÓN OBJETIVO : $F(x,y) = 3x + y$ (máximizar)

RESTRICCIONES

$$\begin{cases} 10x + 4y \leq 260 \\ 6x + y \leq 86 \\ 0 \leq x \leq 8 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

en estas dos inecuaciones debemos suponer que el banco puede optar por no emplear a todos los trabajadores disponibles.



$10x+4y=260$

$5x+2y=130$

x	y
0	65
26	0

$6x+y=86$

x	y
0	86
14,33	0

VÉRTICE C: $x=8 \Rightarrow 6\cdot 8+y=86 \Rightarrow$
$\Rightarrow y=38$

VÉRTICE B: $\left.\begin{matrix} 6x+y=86 \\ 10x+4y=260 \end{matrix}\right\}$ $y=86-6x$
$10x+344-24x=260$
$-14x=-84 \Rightarrow x=6 \Rightarrow$
$\Rightarrow y=50$

Evaluación de $F(x,y)$ en los vértices:

$F(A) = F(0,65) = 3\cdot 0 + 65 = 65$ millones de €
$F(B) = F(6,50) = 3\cdot 6 + 50 = 68$ millones de € $\Longrightarrow$ Beneficio máximo, con 6 oficinas centrales y 50 sucursales: 68 millones de €.
$F(C) = F(8,38) = 3\cdot 8 + 38 = 62$ millones de €
$F(D) = F(8,0) = 3\cdot 8 + 0 = 24$ millones de €
$F(O) = F(0,0) = 3\cdot 0 + 0 = 0$ millones de €

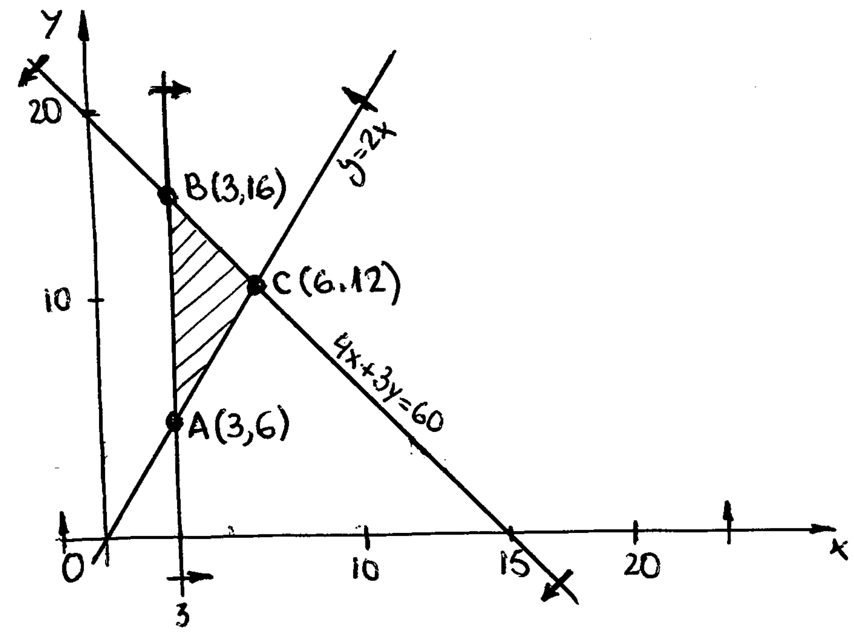
Jun 2005:

* EBANISTERÍA: MESAS — ORDENADOR ($3m^2$) (Y); COMEDOR ($4m^2$) (X) $\longrightarrow$ Mínimo 3
* Madera disponible: $60 m^2$
* Al menos el doble de mesas de ordenador que de comedor.
* B^o: mesa ordenador: 200€
  mesa comedor: 300€

FUNCIÓN OBJETIVO: $F(x,y) = 300x + 200y$ (maximizar)

RESTRICCIONES:

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 3y \leq 60 \\ x \geq 3 \\ y \geq 2x \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$



$4x+3y=60$

x	y
0	20
15	0

$y=2x$

x	y
0	0
10	20

Vértice C:

$$\left.\begin{array}{l} y=2x \\ 4x+3y=60 \end{array}\right\} \quad 4x+3(2x)=60;\quad 10x=60 \Rightarrow x=6 \Rightarrow y=12$$

$F(A) = F(3,6) = 300 \cdot 3 + 200 \cdot 6 = 2100$ €
$F(B) = F(3,16) = 300 \cdot 3 + 200 \cdot 16 = 4100$ €
$F(C) = F(6,12) = 300 \cdot 6 + 200 \cdot 12 = 4200$ € $\Rightarrow$ Beneficio máximo, con 6 mesas de comedor y 12 mesas de ordenador.

Sep 2005:

* 200 SOCIOS
* AGENCIA DE VIAJES
  * MICROBUSES (25 plazas) (x)
  * AUTOBUSES (50 plazas) (Y)
* nº conductores disponibles = 6
* Alquiler: Bus – 160 €/día
  Micro – 70 €/día

FUNCIÓN OBJETIVO: $F(x,y) = 70x + 160y$

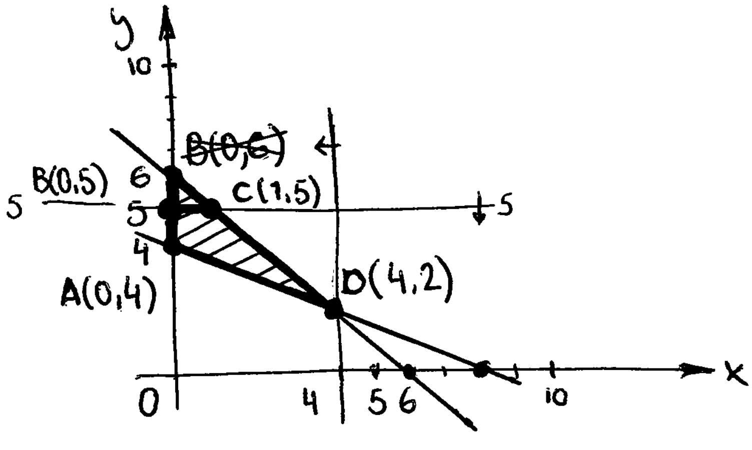
RESTRICCIONES:

$$\left.\begin{array}{l} 25x + 50y \geq 200 \\ x + y \leq 6 \\ x \geq 0 ; \; y \geq 0 \\ x \leq 4 \quad y \leq 5 \end{array}\right\}$$

$25x + 50y = 200$

$x + 2y = 8$

x	Y
0	4
8	0



Vértice C: $$\begin{array}{r} x + 2y = 8 \\ - \; x + y = 6 \\ \hline y = 2 \Rightarrow x = 4 \end{array}$$

$F(A) = F(0,4) = 70 \cdot 0 + 160 \cdot 4 = 640$ €
$F(B) = F(0,5) = 70 \cdot 0 + 160 \cdot 5 = \cancel{960}$ €
$F(C) = F(\cancel{4,2}) = 70 \cdot \cancel{4} + 160 \cdot \cancel{2} = \cancel{600}$ €
$F(D) = F(4,2) = 70 \cdot 4 + 160 \cdot 2 = 600$ € $\Rightarrow$ Coste mínimo, con 4 microbuses y 2 autobuses. 600€.

Jun 2006:

* FACTORÍA
- PRODUCTO A (x): $V_A = 1m^3$
  - 4h de JUAN
  - 2h de PEDRO
- PRODUCTO B (y): $V_B = 1m^3$
  - 1h de JUAN
  - 3h de PEDRO

* Almacén: $20\,m^3$

* JUAN: al menos 32h
PEDRO: al menos 36h

FUNCIÓN OBJETIVO: $F(x,y) = 25x + 20y$ (beneficio) MAXIMIZAR

RESTRICCIONES:

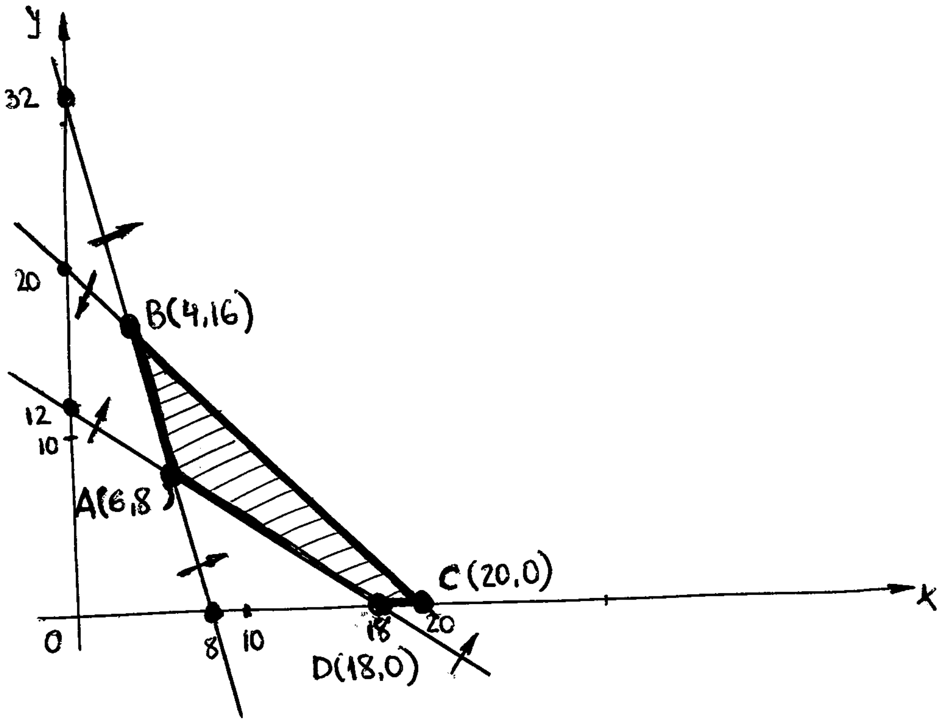
$$\left.\begin{array}{l} 4x+y \geq 32 \\ 2x+3y \geq 36 \\ x+y \leq 20 \\ x \geq 0\ ;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

$4x+y=32$

x	y
0	32
8	0

$2x+3y=36$

x	y
0	12
18	0



Vértice A:

$$\begin{array}{r} 4x+y=32 \\ -\ 2(2x+3y=36) \\ \hline -5y=-40 \Rightarrow y=8 \Rightarrow x=6 \end{array}$$

Vértice B:

$$\begin{array}{r} 4x+y=32 \\ -\ x+y=20 \\ \hline 3x=12 \Rightarrow x=4 \Rightarrow y=16 \end{array}$$

$F(A) = F(6,8) = 25\cdot 6 + 20\cdot 8 = 310$ €
$F(B) = F(4,16) = 25\cdot 4 + 20\cdot 16 = 420$ €
$F(C) = F(20,0) = 25\cdot 20 + 20\cdot 0 = 500$ € $\Rightarrow$ Beneficio máximo, con 20 unidades de A.
$F(D) = F(18,0) = 25\cdot 18 + 20\cdot 0 = 450$ €

(EN ADELANTE: FUNCIÓN OBJETIVO + RESTRICCIONES)

Sep 2006:

* FÁBRICA DE MERMELADA

- NARANJA (x) : B° = 40 €/caja
- CIRUELA (y) : B° = 50 €/caja

FUNCIÓN OBJETIVO: B° máximo $\Rightarrow$ $40x + 50y = F(x,y)$

RESTRICCIONES:

$$\left.\begin{array}{l} 2y \leq x + 800 \\ 3x + 2y \leq 2400 \\ x \geq 0 \ ; \ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

(TERMINAR)

Sep 2007:

* TELEVISORES

- ANALÓGICA (x) (10 m) (20 min)
- DIGITAL (y) (20 m) (30 min)

CABLE: Máx. de 400 m / día

TRABAJO: Mín de 300 min / día

FUNCIÓN OBJETIVO: Ingresos diarios: $F(x,y) = 10x + 15y$ (maximizar)

RESTRICCIONES:

$$\left.\begin{array}{l} 10x + 20y \leq 400 \\ 20x + 30y \geq 300 \\ 0 \leq x \leq 20 \\ y \geq 6 \end{array}\right\}$$

Jun 2008:

FABRICA

X CAJAS DE PASTA DE PAPEL NORMAL (PPN): 4000 Kg

Y CAJAS DE PASTA DE PAPEL RECICLADO (PPR): 3000 Kg

CAJA TIPO I: 0,2 Kg PPN + 0,1 Kg PPR $\longrightarrow$ B° = 5€/caja

CAJA TIPO II: 0,2 Kg PPN + 0,3 Kg PPR $\longrightarrow$ B° = 6€/caja

$F(x,y) = 5x + 6y$ (B° MÁX)

RESTRICCIONES:

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}2x + 0{,}2y \leqslant 4000 \\ 0{,}1x + 0{,}3y \leqslant 3000 \end{array}\right\} \longrightarrow \text{Más cómodo si } \cdot 10 \quad \begin{array}{l} 2x + 2y \leqslant 40000 \\ x + 3y \leqslant 30000 \end{array}$$

$x \geqslant 0 \;;\; y \geqslant 0$

Sep '08:

ENVÍO

X CAMIONES AGUA POTABLE $\rightarrow$ mínimo 12 $\rightsquigarrow$ COSTE: 9000 €/camión

Y CAMIONES MEDICINA $\longrightarrow \geqslant \frac{1}{2} \cdot x$ $\rightsquigarrow$ COSTE: 6000 €/camión

TOTAL DISPONIBLE: 27

$F(x,y) = 9000x + 6000y$ (Coste: MÍN)

RESTRICCIONES:

$x + y \leqslant 27$

$x \geqslant 12$

$y \geqslant \frac{1}{2}x$

$y \geqslant 0$

JUN 09:

FÁBRICA
- X LITROS PLÁSTICO 1
  - $\frac{2}{5}$ PARTES DE A
  - $\frac{3}{5}$ PARTES DE B

  → Al menos 50l de 1

  B° = 10€/l
- Y LITROS PLÁSTICO 2
  - $\frac{1}{2}$ PARTE DE A
  - $\frac{1}{2}$ PARTE DE B

  → B° = 12€/l

Compuesto A : 100l

Compuesto B : 120l

$F(x,y) = 10x + 12y$ (B° → MAX)

RESTRICCIONES:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{2}{5}x + \frac{1}{2}y \leq 100 \underset{(\cdot 10)}{\Rightarrow} 4x + 5y \leq 1000 \\
\frac{3}{5}x + \frac{1}{2}y \leq 120 \underset{(\cdot 10)}{\Rightarrow} 6x + 5y \leq 1200 \\
x \geq 50 \\
y \geq 0
\end{array}\right\}$$

SEP 09:

TIENDA
- PAQUETE TIPO 1 (X)
  - 2 cuadernos
  - 1 carpeta
  - 2 bolígrafos
- PAQUETE TIPO 2 (Y)
  - 3 cuadernos
  - 1 carpeta
  - 1 bolígrafo

Unidades disponibles:

600 cuadernos

500 carpetas

400 bolígrafos

PAQUETE 1: 6,50 €

PAQUETE 2: 7€

RECAUDACIÓN: $F(x,y) = 6{,}5x + 7y$ (MAX)

RESTRICCIONES:

$2x + 3y \leq 600$

$x + y \leq 500$

$2x + y \leq 400$

$x \geq 0$; $y \geq 0$

Sep 2010 F.G.

EMP. TRANSPORTES
- CAMIONETAS (x)
  - 5 uds A
  - 4 uds B
- FURGONES (y)
  - 2 uds A
  - 1 ud B

Máximos:
90 uds A y 60 uds. B

B°: 1600 €/camioneta
600 €/furgón

F. OBJETIVO: B° MÁXIMO $F(x,y) = 1600x + 600y$

RESTRICCIONES:

$5x + 2y \leq 90$

$4x + y \leq 60$

$x \geq 0 \; ; \; y \geq 0$

Sep 2010 F.E. ⇒ YA PUBLICADO

Sep 2011

QUESERÍA
- Queso FRESCO (x) — 3L oveja
- Queso CURADO (y) — 6L oveja

Ganancia
FRESCO: 10€
CURADO: 30€

Disponibles: 1800L oveja
Capacidad de producción: 500 quesos diarios
Producción queso fresco: al menos el doble que la de queso curado

* F. OBJETIVO: $10x + 30y = F(x,y)$

RESTRICCIONES:

$x + y \leq 500$

$3x + 6y \leq 1800$

$x \geq 0 \; ; \; y \geq 0$