PREGUNTA 1: Se considera la función $f(x) = \frac{x^2}{a-bx}$, siendo a y b parámetros reales.

a) Determina los valores de los parámetros a y b sabiendo que la función pasa por el punto A(2,4) y que la recta tangente a la gráfica de f (x) en x = 6 es horizontal. (1 punto)

b) Para a = 1 y b = −1, razona cuál es el dominio de f (x) y determina los intervalos de concavidad y de convexidad y puntos de inflexión de f (x). (1 punto)

a) Pasa por $A(2,4) \Rightarrow f(2)=4 \Rightarrow \frac{2^2}{a-2b}=4 \Rightarrow \cancel{4}=\cancel{4}(a-2b) \Rightarrow a-2b=1$

$$f'(x)=\frac{2x(a-bx)-x^2(-b)}{(a-bx)^2}=\frac{2ax-2bx^2+bx^2}{(a-bx)^2}=\frac{2ax-bx^2}{(a-bx)^2}=\frac{x(2a-bx)}{(a-bx)^2}$$

$$f'(6)=0 \Rightarrow \frac{6(2a-6b)}{(a-6b)^2}=0 \Leftrightarrow 6(2a-6b)=0 \Rightarrow 2a-6b=0 \Rightarrow a-3b=0$$

$$\left.\begin{array}{l} a-2b=1 \\ a-3b=0 \end{array}\right\} \boxed{b=1} \Rightarrow \boxed{a=3}$$

b) $f(x)=\frac{x^2}{1+x} \Rightarrow \text{dom } f = \mathbb{R}-\{-1\}$

$$f'(x)=\frac{2x(1+x)-x^2}{(1+x)^2}=\frac{2x+2x^2-x^2}{(1+x)^2}=\frac{2x+x^2}{(1+x)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(2x+2)\cdot(1+x)^2-(2x+x^2)(2+2x)}{(1+x)^4}=\frac{\cancel{2x^3}+\cancel{6x^2}+6x+2-\cancel{2x^3}-\cancel{6x^2}-4x}{(1+x)^4}=\frac{2x+2}{(1+x)^4}=\frac{2}{(1+x)^3}$$

$\frac{2}{-}=\ominus$ $\qquad\qquad$ $\frac{2}{+}=\oplus$

-1

$\Uparrow$

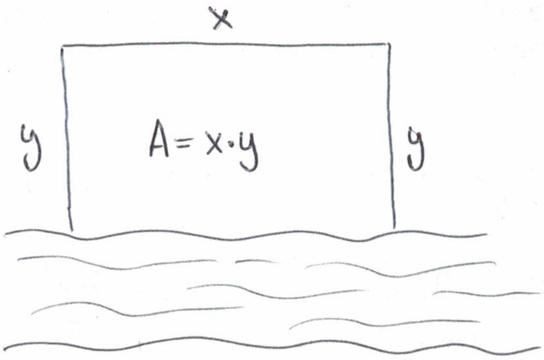
$\nexists f(x)$

$$f(x):\begin{cases} \text{Cóncava hacia abajo si } x\in(-\infty,-1) \\ \text{Cóncava hacia arriba si } x\in(-1,\infty) \end{cases}$$

NO TIENE P. INFLEXIÓN.

PREGUNTA 2: Un granjero dispone de 3000 euros para cercar un campo rectangular adyacente al río. El coste de la cerca paralela al río es de 5 euros por metro instalado, y el de la cerca para cada uno de los lados restantes es de 3 euros por metro instalado.

Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede ser cercado. (2 puntos)



$$A(x,y) = x \cdot y$$

$$5x + 2\cdot 3y = 3000 \Rightarrow 5x + 6y = 3000 \Rightarrow y = \frac{3000-5x}{6} = 500 - \frac{5}{6}x$$

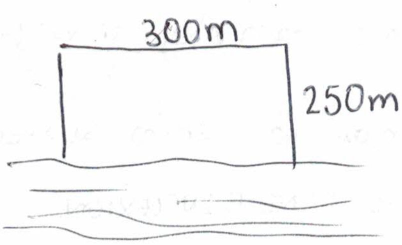
Luego: $A(x) = x \cdot \left(500 - \frac{5}{6}x\right) = 500x - \frac{5}{6}x^2$

$$A'(x) = 500 - \frac{10}{6}x$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{10}{6}x = 500 \Rightarrow x = \frac{3000}{10} = 300\,m$$

$$A''(x) = -\frac{10}{6} < 0 \Rightarrow A''(300) < 0 \Rightarrow \text{MÁXIMO}$$

$$y = 500 - \frac{5}{6}\cdot 300 = 500 - 250 = 250\,m$$



$$A_{máx} = 300 \cdot 250 = 75000\,m^2$$

PREGUNTA 3: Se estima que los beneficios mensuales de una fábrica de golosinas, en miles de euros, vienen dados por la función:

$f(x) = -0{,}1x^2 + 2{,}5x - 10$, cuando se venden x toneladas de producto. Se pide:

a) Calcular la cantidad de toneladas que se ha de vender para obtener el beneficio máximo y calcular este. Justificar que es máximo. (0,75 puntos)

b) La cantidad mínima que se ha de vender para no tener pérdidas. (0,75 puntos)

c) ¿Qué cantidad produce el máximo beneficio por tonelada vendida? Calcular el máximo beneficio y justificar que es máximo. (1 punto)

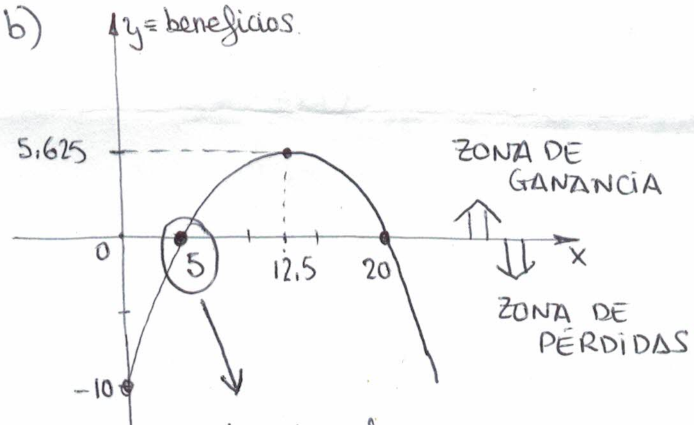
$f(x) \equiv$ beneficios en $(\times 1000)$€ en función de las x toneladas de golosinas.

a) $f'(x) = -0{,}2x + 2{,}5 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}2x = 2{,}5 \Rightarrow x = 12{,}5$ Tm

$f''(x) = -0{,}2 : f''(12{,}5) = -0{,}2 < 0 \Rightarrow$ MÁXIMO

$f(12{,}5) = -0{,}1 \cdot 12{,}5^2 + 2{,}5 \cdot 12{,}5 - 10 = 5{,}625 \Rightarrow$ 5625€ de beneficio.

b)



PUNTOS DE CORTE:

EJE Y: $f(0) = -10 \Rightarrow (0, -10)$

EJE X: $-0{,}1x^2 + 2{,}5x - 10 = 0 \Rightarrow \cdot(-10)$

$\Rightarrow x^2 - 25x + 100 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{25 \pm \sqrt{225}}{2} = \dfrac{25 \pm 15}{2} = \begin{cases} 20 \\ 5 \end{cases}$

Los beneficios comienzan a partir de las 5 toneladas

c) $g(x) = \dfrac{-0{,}1x^2 + 2{,}5x - 10}{x} \Rightarrow g'(x) = \dfrac{(-0{,}2x + 2{,}5) \cdot x + 0{,}1x^2 - 2{,}5x + 10}{x^2} =$

beneficio por tonelada

$= \dfrac{-0{,}2x^2 + \cancel{2{,}5x} + 0{,}1x^2 - \cancel{2{,}5x} + 10}{x^2} = \dfrac{10 - 0{,}1x^2}{x^2}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 10 = 0{,}1x^2 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = \pm 10$ (descartamos la solución "−")

$g''(x) = \dfrac{-0{,}2x^3 - 2x(10 - 0{,}1x^2)}{x^4} = \dfrac{-20x - \cancel{0{,}2x^3} + \cancel{0{,}2x^3}}{x^4} \Rightarrow g''(10) < 0$ (MÁXIMO)

$\boxed{x = 10}$

Sólo se valorarán las respuestas debidamente justificadas

PREGUNTA 4: Sea la función $f(x) = \frac{x^2+2}{2x+1}$

a) Calcula sus asíntotas. (0,75 puntos)

b) Calcula la ecuación de la recta tangente a la función por su punto de abscisa x=0. (1 punto)

c) Estudia sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus extremos relativos. (1 punto)

d) Representa la función. (0,75 puntos)

a) HORIZONTALES: NO

VERTICAL: $\lim_{x \to -\frac{1}{2}} f(x) = \pm\infty$ $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \to -\frac{1}{2}^-} \frac{x^2+2}{2(x+\frac{1}{2})} = \frac{+}{-} = -\infty \\ \lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} \frac{x^2+2}{2(x+\frac{1}{2})} = \frac{+}{+} = +\infty \end{array} \right.$

OBLICUA:

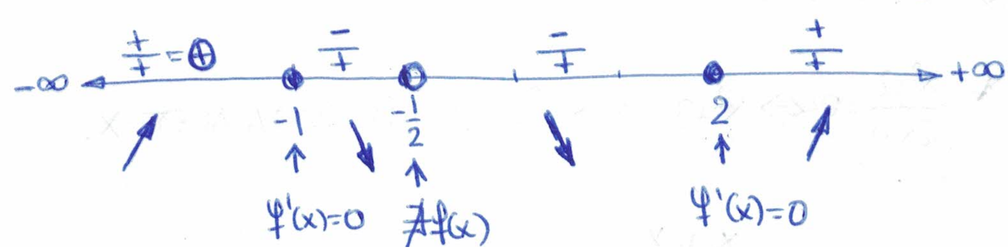
$$\begin{array}{l|l} x^2+2 & 2x+1 \\ \hline -x^2-\frac{1}{2}x & \frac{1}{2}x-\frac{1}{4} \\ \hline -\frac{1}{2}x+2 & \\ +\frac{1}{2}x-\frac{1}{4} & \\ \hline \frac{3}{4} & \end{array} \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}}$$

b) $f'(x) = \frac{2x(2x+1)-2(x^2+2)}{(2x+1)^2} = \frac{4x^2+2x-2x^2-4}{(2x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2} = \frac{2(x^2+x-2)}{(2x+1)^2}$

$\left. \begin{array}{l} f'(0) = \frac{2\cdot(-2)}{1^2} = -4 \\ f(0) = 2 \end{array} \right\}$ Punto: $P(0,2)$ Pendiente: $m=-4$

$y-2=-4(x-0) \Rightarrow \boxed{y=2-4x}$

c) $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2(x^2+x-2)=0 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{1\pm3}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ -1 \end{array} \right.$



$f'(x) = \frac{2(x+1)(x-2)}{(2x+1)^2}$

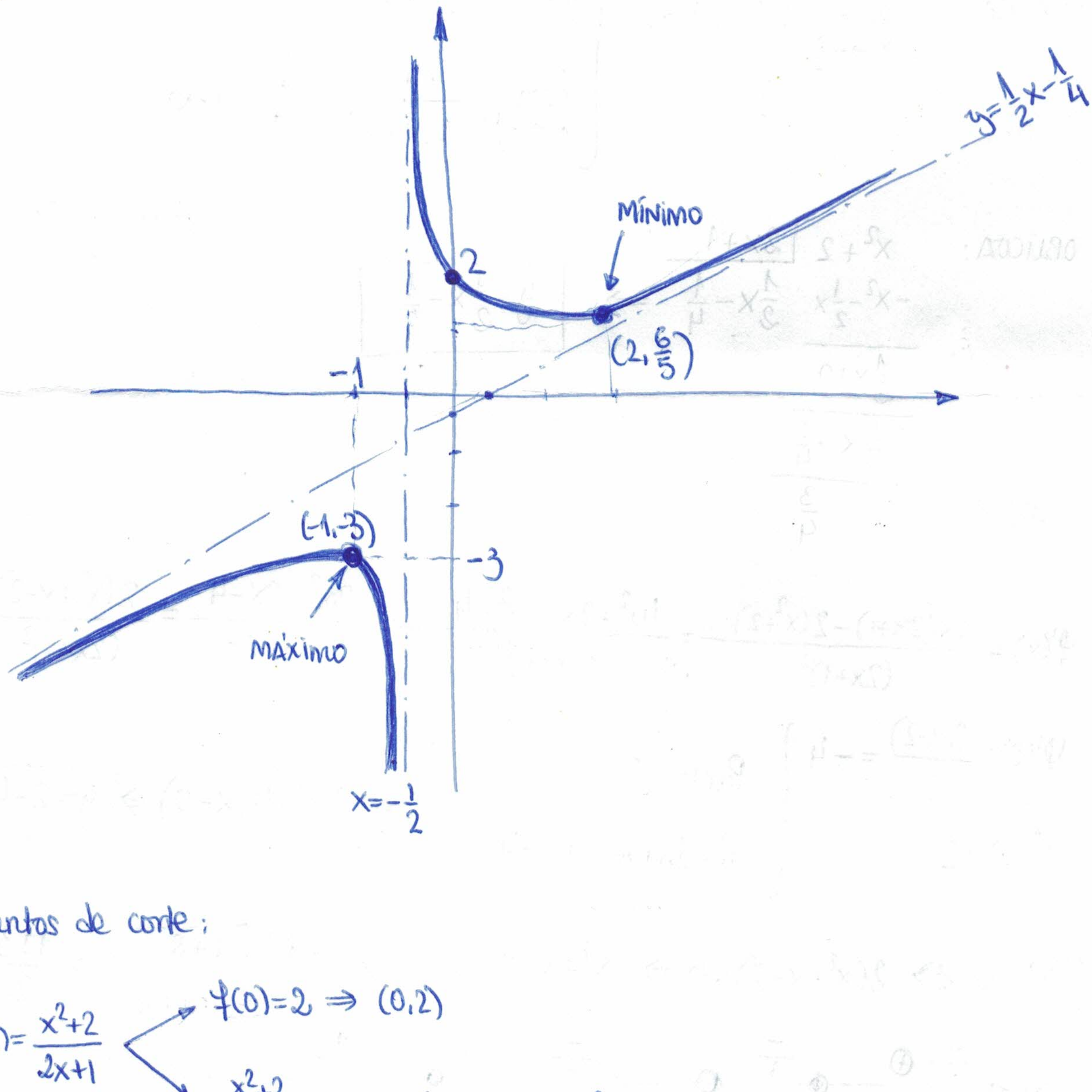
Luego:

$$f(x): \begin{cases} \text{Creciente si } x \in (-\infty,-1) \cup (2,\infty) \\ \text{Decreciente si } x \in (-1,-\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2},2) \\ \text{Máximo relativo en } (-1,-3) \\ \text{Mínimo relativo en } (2, 6/5) \end{cases}$$

$$f(-1) = \frac{3}{-1} = -3$$

$$f(2) = \frac{6}{5}$$

d)



Puntos de corte:

$$f(x)=\frac{x^2+2}{2x+1} \begin{cases} \to f(0)=2 \Rightarrow (0,2) \\ \to \frac{x^2+2}{2x+1}=0 \Leftrightarrow x^2+2=0 \Rightarrow x^2=-2 \Rightarrow \text{NO CORTA AL EJE X.} \end{cases}$$

Asíntota oblicua: $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$:

x	y
0	-1/4
1/2	0