Dada la función:

$$F(x)=\begin{cases}x+1 & \text{si } x\le 1\\ 3-ax^2 & \text{si } x>1\end{cases}$$

¿Para qué valores de a la función $F(x)$ es continua en $x=1$?

(Asturias. Junio 2000. Bloque 5)

La función es continua en $x=1$ si: $\lim\limits_{x\to 1} F(x)=F(1)$

$F(1)=2$

Existe $\lim\limits_{x\to 1} F(x)$ si $\lim\limits_{x\to 1^-} F(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} F(x)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} F(x)=2\\ \lim\limits_{x\to 1^+} F(x)=3-a\end{array}\right\}\to 2=3-a\to a=1$$

Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+ax & \text{si } x<2\\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x\ge 2\end{cases}$$

Calcular los valores del parámetro a para los que $f(x)$ es continua en $x=2$.

(Aragón. Septiembre 2003. Opción B. Cuestión 2)

La función es continua en $x=2$ si: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$

$f(2)=1$

Existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ si $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=4+2a\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=1\end{array}\right\}\to 4+2a=1\to a=-\frac{3}{2}$$

Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2-2 & \text{si } x\le -2 \\ a & \text{si } -2<x\le 2 \\ x & \text{si } x>2 \end{cases} \qquad (a\in\mathbb{R})$$

a) Calcule el valor de a para que f sea continua en $x=-2$.

b) Estudie la continuidad de f cuando $a=2$.

(Andalucía. Año 2001. Modelo 1. Opción B. Ejercicio 2)

a) La función es continua en $x=-2$ si: $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=f(-2)$

$f(-2)=4a-2$

Existe $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ si $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=4a-2 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=a \end{array}\right\} \to 4a-2=a \to a=\frac{2}{3}$$

b) Si $a=2$: $f(x)=\begin{cases} 2x^2-2 & \text{si } x\le -2 \\ 2 & \text{si } -2<x\le 2 \\ x & \text{si } x>2 \end{cases}$

- $f(-2)=6$

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=6 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=2 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)\ne \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to -2} f(x).$$

  La función no es continua en $x=-2$, tiene una discontinuidad de salto finito.

- $f(2)=2$

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=2 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)= \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \to \text{Existe } \lim\limits_{x\to 2} f(x).$$

  $f(2)=2=\lim\limits_{x\to 2} f(x) \to$ La función es continua en $x=2$.

Sea la función: $f(x)=\begin{cases}-(x-1)^2+b & \text{si } x\le 2\\ a(x-3)^2+3 & \text{si } x>2\end{cases}$

Halle a y b para que la función sea continua en $x=2$.

(Andalucía. Año 2003. Modelo 2. Opción A. Ejercicio 2)

La función es continua en $x=2$ si: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$

$f(2)=-1+b$

Existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ si $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-1+b\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=a+3\end{array}\right\}\to -1+b=a+3\to a=b-4$$

Según cierta teoría médica el peligro de un virus se mide en función del tiempo que lleva en el organismo mediante la siguiente expresión, donde $P(t)$ es para un tiempo de t minutos:

$$P(t)=\begin{cases}t^2 & \text{si } 0\le t\le 5\\ \dfrac{50t-62{,}5}{0{,}5t+5} & \text{si } t>5\end{cases}$$

Estudia la continuidad de la intensidad como función del tiempo.

$P(t)=t^2\to$ Función polinómica $\to P(t)$ es continua en $(0,5)$.

$P(t)=\dfrac{50t-62{,}5}{0{,}5t+5}\to$ Definida en $\mathbb{R}-\{-10\}\to P(t)$ es continua en $(5,+\infty)$.

$f(5)=25$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to 5^-} P(t)=25\\ \lim\limits_{t\to 5^+} P(t)=25\end{array}\right\}\to \lim\limits_{t\to 5} P(t)=25$$

$\lim\limits_{t\to 5} P(t)=P(5)\to P(t)$ es continua en $t=5$.

Luego la función es continua en $(0,+\infty)$.

Un inversor utiliza la siguiente función para reinvertir en Bolsa parte del capital que obtiene mensualmente. $R(x)$ representa la cantidad reinvertida cuando el capital obtenido es x (tanto la cantidad como el capital en euros):

$$R(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 600 \\ 40 + \dfrac{400 + 56x}{1.640 + 0{,}1x} & \text{si } x \geq 600 \end{cases}$$

¿Es la cantidad reinvertida una función continua del capital obtenido?

(Asturias. Septiembre 2006. Bloque 3)

$R(x) = 0 \rightarrow$ Función constante $\rightarrow R(x)$ es continua en $(0, 600)$.

$R(x) = 40 + \dfrac{400 + 56x}{1.640 + 0{,}1x} \rightarrow$ Está definida en $\mathbb{R} - \{-16.400\}$
$\rightarrow R(x)$ es continua en $(600, +\infty)$.

$R(600) = 60$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 600^-} R(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 600^+} R(x) = 60 \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x \to 600} R(x).$$

Luego la función no es continua en $x = 600$, tiene una discontinuidad de salto finito.

Cada mes, una empresa decide el gasto en publicidad en base a los beneficios que espera obtener dicho mes. Para ello usa la siguiente función, donde G es el gasto en publicidad, en cientos de euros, y x los beneficios esperados, en miles de euros:

$$G(x) = \begin{cases} 6 + 2x - \dfrac{x^2}{6} & \text{si } 0 \leq x \leq 9 \\ 3 + \dfrac{75x + 5.400}{10x^2} & \text{si } x > 9 \end{cases}$$

¿Es el gasto en publicidad una función continua del beneficio?

(Asturias. Junio 2005. Bloque 3)

$G(x) = 6 + 2x - \dfrac{x^2}{6} \rightarrow$ Función polinómica $\rightarrow G(x)$ es continua en $(0, 9)$.

$G(x) = 3 + \dfrac{75x + 5.400}{10x^2} \rightarrow$ Definida en $\mathbb{R} - \{0\} \rightarrow G(x)$ es continua en $(9, +\infty)$.

Estudiamos el punto en el que cambia su expresión algebraica.

La función es continua en $x = 9$ si: $\lim\limits_{x \to 9} G(x) = G(9)$

$G(9) = 10{,}5$

Existe $\lim\limits_{x \to 9} G(x)$ si $\lim\limits_{x \to 9^-} G(x) = \lim\limits_{x \to 9^+} G(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 9^-} G(x) = 10{,}5 \\ \lim\limits_{x \to 9^+} G(x) = 10{,}5 \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x \to 9} G(x) = 10{,}5$$

$\lim\limits_{x \to 9} G(x) = G(9) \rightarrow G(x)$ es continua en $x = 9$.

Luego la función es continua en $(0, +\infty)$.

El peso que una plancha de cierto material es capaz de soportar depende de la edad de la misma según la siguiente función (el peso P en toneladas; t representa la edad en años de la plancha):

$$P(t) = \begin{cases} 50 - t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 3 \\ 56 - \dfrac{20t}{t + 1} & \text{si } t > 3 \end{cases}$$

¿Es el peso una función continua de la edad?

Según vaya pasando el tiempo, ¿la plancha cada vez aguantará menos peso?

(Asturias. Junio 2003. Bloque 3)

Las funciones son continuas en los intervalos en los que están definidas:

- En (0, 3) la función es una función polinómica y; por tanto, es continua.
- En $(3, +\infty)$ podría presentar una discontinuidad en los puntos donde se anule el denominador:

$t + 1 = 0 \rightarrow t = -1$

Como $-1 \notin (3, +\infty)$ la función es continua en $(3, +\infty)$.

Luego $P(t)$ es continua si es continua en $t = 3$, es decir, si: $\lim_{t \to 3} P(t) = P(3)$

$P(3) = 41$

Existe $\lim_{t \to 3} P(t)$ si $\lim_{t \to 3^-} P(t) = \lim_{t \to 3^+} P(t)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{t \to 3^-} P(t) = 41 \\ \lim_{t \to 3^+} P(t) = 41\end{array}\right\} \rightarrow \lim_{t \to 3} P(t) = 41$$

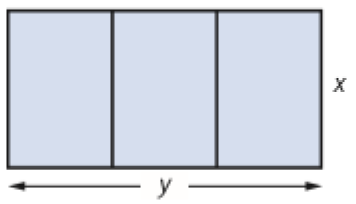
$\lim_{t \to 3} P(t) = P(3) \rightarrow P(t)$ es continua en $t = 3$.

Luego la función es continua en $(0, +\infty)$.

$$\lim_{t \to +\infty} P(t) = \lim_{t \to +\infty} \left(56 - \frac{20t}{t+1}\right) = 56 - 20 = 36$$

Por tanto, con el paso del tiempo la plancha soportará un peso de 36 toneladas.

Un jardinero dispone de 160 metros de alambre que va a utilizar para cercar una zona rectangular y dividirla en tres partes, colocando las alambradas de las divisiones paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Qué dimensiones debe tener la zona cercada para que el área sea la mayor posible?



Llamamos x e y a las dimensiones de la zona rectangular, y consideramos que las divisiones son paralelas a los lados de medida x. Para dividir la zona rectangular en tres partes necesitamos realizar dos divisiones, por lo que se debe cumplir que:

$4x + 2y = 160 \rightarrow 2x + y = 80 \rightarrow y = 80 - 2x$

Debemos optimizar la función que nos da el área, es decir:

$A(x, y) = xy \rightarrow A(x) = x(80 - 2x) = 80x - 2x^2$

$A'(x) = 80 - 4x = 0 \rightarrow x = 20$

$A''(x) = -4 < 0 \rightarrow$ En $x = 20$ alcanza un máximo.

Las dimensiones de la zona rectangular deben ser $x = 20$ metros e $y = 40$ metros.

En la construcción de un túnel, el porcentaje de roca fragmentada o de mala calidad viene dado por el siguiente modelo matemático:

$$R(x) = \frac{x^3}{3} - 4{,}5x^2 + 18x + 15 \quad \text{si } 0 \le x \le 7$$

$R(x)$ representa dicho porcentaje cuando la distancia a la boca del túnel es x, en kilómetros.

Si en algún tramo de la perforación el porcentaje supera el 40 %, se deberán reforzar las medidas de sostenimiento y seguridad de la estructura.

a) Indica en qué tramos de la perforación el porcentaje crece y en cuáles decrece.

b) Señala los máximos y mínimos (absolutos y relativos), así como los puntos de inflexión de la curva.

(Asturias. Junio 2008. Bloque 3)

a) $R'(x) = x^2 - 9x + 18 = 0 \rightarrow x = 3,\ x = 6$

- En $(0, 3) \rightarrow R'(x) > 0 \rightarrow R(x)$ creciente
- En $(3, 6) \rightarrow R'(x) < 0 \rightarrow R(x)$ decreciente
- En $(6, 7) \rightarrow R'(x) > 0 \rightarrow R(x)$ creciente

Por tanto, el porcentaje crece en $(0, 3) \cup (6, 7)$ y decrece en $(3, 6)$.

b) $R''(x) = 2x - 9 = 0 \rightarrow x = \frac{9}{2} = 4{,}5$

$R'''(x) = 2 \neq 0 \rightarrow$ En $x = 4{,}5$ hay un punto de inflexión.

De los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, y a partir del valor de la función en $[0, 7]$, deducimos que:

- En $x = 3$ se alcanza un máximo relativo y, además, como $R(3) = 37{,}5$, este punto es el máximo absoluto de la función. Sus coordenadas son $(3; 37{,}5)$.
- En $x = 6$ se alcanza un mínimo relativo cuyas coordenadas son $(6, 33)$.
- En $x = 0$, como $R(0) = 15$, se alcanza el mínimo absoluto de la función. Sus coordenadas son $(0, 15)$.

Un artículo de consumo estuvo a la venta durante 8 años, y su precio $P(t)$, en miles de euros, varió con el tiempo t, en años, que llevaba en el mercado, según la función:

$$P(t) = \begin{cases} 4t^2 + 4 & \text{si } 0 \le t \le 2 \\ -\dfrac{5}{2}t + 25 & \text{si } 2 < t \le 8 \end{cases}$$

Averiguar en qué momentos se alcanzaron los precios máximo y mínimo, y cuáles fueron esos precios.

(País Vasco. Junio 2008. Apartado B. Ejercicio 1)

En $t = 2$ la función es continua, ya que se cumple que:

$P(2) = P(2^-) = 16 + 4 = 20$ $\qquad$ $P(2^+) = \dfrac{-5}{2} \cdot 2 + 25 = 20$

Por tanto, la función es continua en (0, 8).

$$P'(t) = \begin{cases} 8t & \text{si } 0 < t < 2 \\ -\dfrac{5}{2} & \text{si } 2 < t < 8 \end{cases}$$

- En $(0, 2) \rightarrow P'(t) > 0 \rightarrow P(t)$ creciente
- En $(2, 8) \rightarrow P'(t) < 0 \rightarrow P(t)$ decreciente

$P(0) = 4$ $\qquad$ $P(2) = 16 + 4 = 20$ $\qquad$ $P(8) = -20 + 25 = 5$

El precio mínimo se alcanzó al comienzo de la venta, siendo de 4.000 €, y el precio máximo se alcanzó a los 2 años de venderse el producto, y fue de 20.000 €.

La oferta de un bien conocido su precio, p, es:

$$S(p) = \begin{cases} 30p + 200 & \text{si } 0 \le p \le 10 \\ p^2 - 60p + 1.000 & \text{si } 10 < p \le 40 \end{cases}$$

Diga para qué valor del precio se alcanza la máxima y la mínima oferta.

(Aragón. Septiembre 2007. Opción A. Cuestión 2)

En $p = 10$, la función es continua ya que se cumple que:

$S(10) = S(10^-) = 500$ $\qquad$ $S(10^+) = 500$

Por tanto, la función es continua en (0, 40).

$$S'(p) = \begin{cases} 30 & \text{si } 0 < p < 10 \\ 2p - 60 & \text{si } 10 < p < 40 \end{cases}$$

- En $(0, 10) \rightarrow S'(p) > 0 \rightarrow S(p)$ creciente
- En $(10, 40) \rightarrow S'(p) = 0 \rightarrow 2p - 60 = 0 \rightarrow p = 30$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{En } (10, 30) \rightarrow S'(p) < 0 \rightarrow S(p) \text{ decreciente} \\ \text{En } (30, 40) \rightarrow S'(p) > 0 \rightarrow S(p) \text{ creciente} \end{cases}$$

$S(0) = 200$ $\qquad$ $S(10) = 500$ $\qquad$ $S(30) = 100$ $\qquad$ $S(40) = 200$

La máxima oferta se alcanza para un valor del precio de 10, y la mínima oferta para un valor del precio de 30.

La distancia, en millas, entre un barco pesquero que salió a faenar durante un período de 10 días y su puerto base viene dada por la función:

$$M(t) = \begin{cases} 36 - (2t - 6)^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 5 \\ 4(10 - t) & \text{si } 5 < t \leq 10 \end{cases}$$

donde t es el tiempo transcurrido, en días, desde su salida del puerto base.

a) ¿Después de cuántos días es máxima la distancia del pesquero a su puerto base? ¿A cuántas millas se encontraba?

b) ¿Durante qué períodos aumentaba la distancia a su puerto base? ¿En qué períodos disminuía?

c) ¿A partir de qué día, después de alcanzar la distancia máxima, se encontraba a menos de 12 millas del puerto base?

(Galicia. Septiembre 2008. Bloque 2. Ejercicio 1)

a) En $t = 5$ la función es continua, ya que se cumple que:

$M(5) = M(5^-) = 36 - 16 = 20$ $\qquad$ $M(5^+) = 20$

$$M'(t) = \begin{cases} -2(2t - 6) & \text{si } 0 < t < 5 \\ -4t & \text{si } 5 < t < 10 \end{cases}$$

- En $(0, 5) \rightarrow M'(t) = 0 \rightarrow -4t + 12 = 0 \rightarrow t = 3$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{En } (0, 3) \rightarrow M'(t) > 0 \rightarrow M(t) \text{ creciente} \\ \text{En } (3, 5) \rightarrow M'(t) < 0 \rightarrow M(t) \text{ decreciente} \end{cases}$$

- En $(5, 10) \rightarrow M'(t) < 0 \rightarrow M(t)$ decreciente

$M(0) = 36 - 36 = 0$ $\qquad$ $M(3) = 36$ $\qquad$ $M(5) = 36 - 16 = 20$ $\qquad$ $M(10) = 0$

La distancia del barco pesquero al puerto base es máxima a los 3 días, encontrándose a 36 millas.

b) La distancia al puerto base aumentaba en el período (0, 3) y disminuía en los períodos (3, 5) y (5, 10).

c) Como en (3, 5) la función es decreciente y $M(5) = 20$, el día que buscamos estará entre 5 y 10.

$M(t) < 12 \rightarrow 4(10 - t) < 12 \rightarrow 10 - t < 3 \rightarrow 7 < t \rightarrow$ A partir del día 7 se encontrará siempre a menos de 12 millas de distancia del puerto base.

Se desea delimitar una parcela rectangular, que linda con la pared de una nave. Si se dispone de 200 m de tela metálica para cercarla, ¿cuáles son las dimensiones de la parcela que tiene la mayor superficie?

Llamamos x e y a las dimensiones de la parcela. Como va a estar unida a la pared de la nave, se verifica que: $2x + y = 200 \rightarrow y = 200 - 2x$

Se trata maximizar la función superficie dada por:

$S(x) = xy \rightarrow S(x) = x(200 - 2x) = 200x - 2x^2$

$S'(x) = 200 - 4x = 0 \rightarrow x = 50$

$S''(x) = -4 < 0$ en $\mathbb{R} \rightarrow$ En $x = 50$ alcanza un máximo.

Las dimensiones de la parcela son $x = 50$ m e $y = 100$ m.

¿Qué dimensiones debe tener un paragüero con forma de prisma cuadrado, de 20 dm^3 de volumen, para que en su fabricación se use la menor cantidad posible de material?

Llamamos x a la arista de la base e y a la altura del prisma cuadrangular.

Entonces se debe cumplir que: $x^2 y = 20 \rightarrow y = \dfrac{20}{x^2}$

Como un paragüero no tiene base superior, tenemos que minimizar la función superficie que viene dada por:

$$S(x, y) = x^2 + 4xy \rightarrow S(x) = x^2 + 4x\frac{20}{x^2} = x^2 + \frac{80}{x}$$

$$S'(x) = 2x - \frac{80}{x^2} = \frac{2x^3 - 80}{x^2} = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{40}$$

$$S''(x) = 2 + \frac{160}{x^3} \rightarrow S''\left(\sqrt[3]{40}\right) > 0 \rightarrow \text{Se alcanza un mínimo.}$$

Las dimensiones del paragüero son:

Arista de la base: $x = \sqrt[3]{40}$ dm Altura: $y = \dfrac{20}{\left(\sqrt[3]{40}\right)^2} = \dfrac{20}{\sqrt[3]{1.600}}$ dm

Hallar dos números cuya suma es 20, sabiendo que su producto es máximo.

(Cantabria. Septiembre 2007. Ejercicio 2. Opción B)

Sean x e y los dos números que buscamos. Se cumple que:

$x + y = 20 \rightarrow y = 20 - x$

$P(x, y) = xy \rightarrow P(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$

$P'(x) = 20 - 2x = 0 \rightarrow x = 10$

$P''(x) = -2 < 0 \rightarrow$ En $x = 10$ se alcanza un máximo, por lo que los números son $x = 10$ e $y = 10$.

Entre todos los rectángulos de 3 m² de área, halla las dimensiones del que tenga mínimo el producto de las diagonales.

Sean x e y las dimensiones del rectángulo, de modo que: $xy = 3$

La función que se optimiza viene dada por:

$$P = d \cdot d = d^2 = x^2 + y^2 \rightarrow P(x) = x^2 + \left(\frac{3}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{9}{x^2}$$

$$P'(x) = 2x - \frac{18}{x^3} = 0 \rightarrow 2x^4 - 18 = 0 \rightarrow x = -\sqrt{3},\ x = \sqrt{3}$$

La solución válida es: $x = \sqrt{3}$

$$P''(x) = 2 + \frac{54}{x^4} \rightarrow P''(\sqrt{3}) > 0 \rightarrow \text{En este punto alcanza un mínimo.}$$

Las dimensiones son $x = \sqrt{3}$ m e $y = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ m, es decir, es un cuadrado de lado $\sqrt{3}$ m.

Un taller artesanal está especializado en la producción de cierto tipo de juguetes. Los costes de fabricación, $C(x)$, en euros, están relacionados con el número de juguetes fabricados, x, a través de la expresión:

$$C(x) = 10x^2 - 1.850x + 25.000$$

El precio de venta de cada juguete es de 50 €.

a) Plantear la función de ingresos que obtiene el taller con la venta de los juguetes producidos.

b) Plantear la función de beneficios, entendidos como la diferencia entre ingresos y costes de fabricación.

c) ¿Cuántos juguetes debe fabricar para maximizar beneficios? ¿A cuánto ascenderán estos beneficios?

(Canarias. Septiembre 2008. Prueba B. Pregunta 4)

a) $I(x) = 50x$

b) $B(x) = I(x) - C(x) = 50x - (10x^2 - 1.850x + 25.000) =$
$= -10x^2 + 1.900x - 25.000$

c) $B'(x) = -20x + 1.900 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1.900}{20} = 95$

$B''(x) = -20 < 0 \rightarrow$ En $x = 95$ se alcanza un máximo.

$B(95) = -90.250 + 180.500 - 25.000 = 65.250$

Así, para maximizar el beneficio se deben vender 95 juguetes, ascendiendo el beneficio a 65.250 €.

La función $B(x) = \dfrac{-x^2 + 9x - 16}{x}$ representa, en miles de euros, el beneficio neto de un proceso de venta, siendo x el número de artículos vendidos.
Calcular el número de artículos que deben venderse para obtener el beneficio máximo y determinar dicho beneficio máximo.

(Madrid. Junio 2005. Opción A. Ejercicio 2)

$$B'(x) = \frac{-x^2 + 16}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 4$$

$$B''(x) = \frac{-32}{x^3}$$

- $B''(-4) > 0 \rightarrow$ En $x = -4$ se alcanza un mínimo.
- $B''(4) < 0 \rightarrow$ En $x = 4$ se alcanza un máximo.

$$B(4) = \frac{-16 + 36 - 16}{4} = 1$$

Así, para obtener el beneficio máximo se deben vender 4 artículos, siendo este beneficio de 1.000 €.

Determine cómo tienen que ser tres números reales positivos para que su suma valga 100, la suma del primero más dos veces el segundo más tres veces el tercero sea 200 y su producto sea lo mayor posible.

(La Rioja. Junio 2007. Parte B. Problema 2)

Llamamos x, y, z a los números que buscamos.

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ x + 2y + 3z = 200 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 100 - y - z \\ x = 200 - 2y - 3z \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} 100 - y - z = 200 - 2y - 3z \\ \rightarrow y = 100 - 2z \end{array}$$

$$100 - y - z = 200 - 2y - 3z \rightarrow y = 100 - 2z$$

Por tanto, resulta: $x = 100 - (100 - 2z) - z = 2z - z = z$

$$P(x, y, z) = xyz \rightarrow P(z) = z(100 - 2z)z = 100z^2 - 2z^3$$

$$P'(z) = 200z - 6z^2 = z(200 - 6z) = 0 \rightarrow z = 0,\ z = \frac{200}{6} = \frac{100}{3}$$

$$P''(z) = 200 - 12z \rightarrow P''\left(\frac{100}{3}\right) < 0 \rightarrow \text{En } z = \frac{100}{3} \text{ se alcanza un máximo.}$$

Así, tenemos que: $x = \dfrac{100}{3}$ $\qquad y = 100 - \dfrac{200}{3} = \dfrac{100}{3}$ $\qquad z = \dfrac{100}{3}$

Se ha determinado que el coste total, en euros, que le supone a cierta empresa la producción de n unidades de determinado artículo varía según la función $C(n) = 2n^3 + 270n + 2.048$.

Determinar, justificando la respuesta:

a) La función que define el coste por unidad producida.

b) El número de unidades que deben producirse para hacer mínimo el coste por unidad.

c) El valor de dicho coste mínimo por unidad.

(Extremadura. Septiembre 2007. Opción B. Problema 2)

a) $f(n) = \dfrac{2n^3 + 270n + 2.048}{n}$

b) $f'(n) = \dfrac{4n^3 - 2.048}{n^2} = 0 \rightarrow 4n^3 = 2.048 \rightarrow n^3 = 512 \rightarrow n = 8$

$f''(n) = \dfrac{4n^3 + 4.096}{n^3} \rightarrow f''(8) > 0 \rightarrow$ En $n = 8$ se alcanza un mínimo.

Por tanto, para hacer mínimo el coste por unidad, deben producirse 8 unidades.

c) $f(8) = \dfrac{1.024 + 2.160 + 2.048}{8} = 654$

El valor del coste mínimo por unidad es de 654 €.

Un vendedor de pólizas de seguros tiene un sueldo fijo de 1.000 €, más una comisión que viene dada por la función $17x - 0{,}0025x^3$, donde x representa el número de pólizas vendidas. Si el vendedor tiene mensualmente un gasto general de 200 €, más otro de 5 € por póliza contratada, calcular el número de pólizas que debe contratar mensualmente para que su ganancia sea máxima.
¿A cuánto asciende dicha ganancia?

(Galicia. Septiembre 2006. Bloque 2. Ejercicio 2)

Sueldo: $1.000 + 17x - 0{,}0025x^3$ Gasto: $200 + 5x$

Ganancia: $G(x) = 1.000 + 17x - 0{,}0025x^3 - 200 - 5x = -0{,}0025x^3 + 12x + 800$

$G'(x) = -0{,}0075x^2 + 12 = 0 \rightarrow x^2 = \dfrac{12}{0{,}0075} = 1.600 \rightarrow x = \pm 40$

$G''(x) = -0{,}015x \rightarrow G''(40) < 0 \rightarrow$ Para que la ganancia sea máxima se deben contratar mensualmente 40 pólizas.

$G(40) = 1.120 \rightarrow$ La ganancia obtenida será de 1.120 €.

La atención ante un anuncio de televisión (en una escala del 0 al 100) de 3 minutos de duración se comporta según la función $A(t) = -10t^2 + 40t + 40$, con $0 \leq t \leq 3$.

a) ¿A cuántos minutos de comenzar el anuncio se presta la máxima atención?

b) Cuando finaliza el anuncio, ¿en qué punto de la escala de atención se está?

c) ¿En qué punto de la escala de atención se está transcurridos 90 segundos?

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2006. Bloque 3. Ejercicio B)

a) $A'(t) = -20t + 40 = 0 \rightarrow t = \dfrac{40}{20} = 2$

$A''(t) = -20 < 0 \rightarrow$ En $t = 2$ se alcanza un máximo.

A los dos minutos de comenzar se presta la máxima atención, siendo su valor 80.

b) $t = 3 \rightarrow A(3) = -90 + 120 + 40 = 70$

En una escala del 0 al 100 está en el punto 70.

c) $90 \text{ s} = 1{,}5 \text{ min} \rightarrow A(1{,}5) = -22{,}5 + 60 + 40 = 77{,}5$

En una escala del 0 al 100 está en el punto 77,5.

Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3}$, calcula, cuando existan:

a) Los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento.

b) Los máximos relativos y los mínimos relativos.

(Baleares. Junio 2006. Opción B. Cuestión 5)

a) $x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$

$$f'(x) = \frac{-2x + 2}{(x^2 - 2x - 3)^2} = 0 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1$$

- En $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(1, 3) \cup (3, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

b) En $x = 1$ se alcanza un máximo.

No hay mínimos.

Para la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida de la forma $f(x) = 8x^3 - 84x^2 + 240x$, determine:

a) Su monotonía y sus extremos relativos.

b) Su curvatura y su punto de inflexión.

(Andalucía. Junio 2007. Opción A. Ejercicio 2)

a) $f'(x) = 24x^2 - 168x + 240 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases}$

- En $(-\infty, 2) \cup (5, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(2, 5) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

En $x = 2$ se alcanza un máximo y en $x = 5$, un mínimo.

b) $f''(x) = 48x - 168 = 0 \rightarrow x = \dfrac{7}{2}$

- En $\left(-\infty, \dfrac{7}{2}\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $\left(\dfrac{7}{2}, +\infty\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

En $x = \dfrac{7}{2}$ se alcanza un punto de inflexión.

Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2x - 1}{x + \dfrac{1}{2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Calcule los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad de $f(x)$.

(Aragón. Septiembre 2005. Opción B. Cuestión 2)

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -2 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2x - 1}{x + \dfrac{1}{2}} = -2 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 - 2 = -2 \end{array}\right\} \rightarrow f(x) \text{ continua en } x = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2\left(x + \dfrac{1}{2}\right) - (2x - 1)}{\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2}{\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(0, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

En $x = 0$ se alcanza un máximo.

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{-4}{\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava
- En $(0, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

Dada la función $y = x^3 + x^2 - 5x + 3$, se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Máximos y mínimos locales.

d) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

(C. Valenciana. Junio 2006. Ejercicio A. Problema 2)

a) Dominio $= \mathbb{R}$

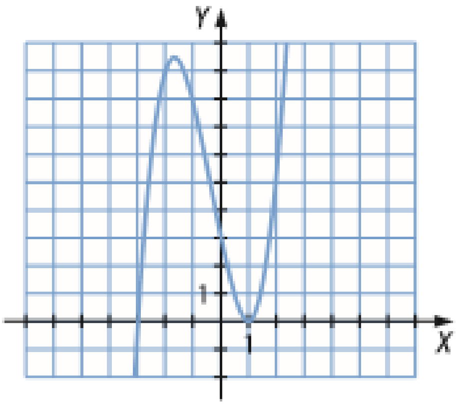
- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 3 \rightarrow (0, 3)$

b) $y' = 3x^2 + 2x - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \dfrac{-5}{3} \end{cases}$

- En $\left(-\infty, \dfrac{-5}{3}\right) \cup (1, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $\left(\dfrac{-5}{3}, 1\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

c) En $x = \dfrac{-5}{3}$ se alcanza un máximo y en $x = 1$, un mínimo.

d)



En un modelo de coche el consumo de gasolina, para velocidades comprendidas entre 20 y 160 km/h, viene determinado por $C(x) = 8 - 0{,}045x + 0{,}00025x^2$ y viene expresado en litros consumidos cada 100 km, recorridos a una velocidad constante de x km/h.

a) ¿Cuántos litros cada 100 km consume el coche si se conduce a una velocidad de 120 km/h?

b) ¿A qué velocidad consume menos? ¿Y cuánto consume?

c) ¿A qué velocidades se ha de conducir para consumir 10 litros cada 100 km?

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2007. Bloque 3. Ejercicio B)

a) $C(120) = 8 - 5{,}4 + 3{,}6 = 6{,}2$

Si conduce a una velocidad de 120 km/h, consumirá 6,2 litros cada 100 km.

b) $C'(x) = -0{,}045 + 0{,}0005x = 0 \to x = 90$

$C''(x) = 0{,}0005 > 0 \to$ En $x = 90$ se alcanza un mínimo por lo que a 90 km/h consume menos.

A esta velocidad consumirá: $C(90) = 8 - 4{,}05 + 2{,}025 = 5{,}975$ litros

c) $10 = 8 - 0{,}045x + 0{,}00025x^2 \to 0{,}00025x^2 - 0{,}045x - 2 = 0 \to \begin{cases} x = -36{,}886 \\ x = 216{,}89 \end{cases}$

Estas velocidades no están comprendidas en [0, 160] por lo que no es posible consumir 10 litros de gasolina conduciendo a las velocidades de definición de la función.

Los beneficios mensuales de un artesano, expresados en euros, cuando fabrica y vende x objetos, se ajustan a la función $B(x) = -0{,}5x^2 + 50x - 800$, en que $20 \leq x \leq 60$.

a) Halle el beneficio que obtiene de fabricar y vender 20 objetos y el de fabricar y vender 60 objetos.

b) Halle el número de objetos que debe fabricar y vender para obtener el beneficio máximo, así como dicho beneficio máximo.

c) Haga un esbozo de la gráfica de la función $B(x)$.

(Cataluña. Junio 2007. Problema 5)

a) $B(20) = -200 + 1.000 - 800 = 0$

Así, al fabricar y vender 20 objetos no hay beneficio.

$B(60) = -1.800 + 3.000 - 800 = 400$

Por tanto, al fabricar y vender 60 objetos se obtienen 400 € de beneficios.

b) $B'(x) = -x + 50 = 0 \rightarrow x = 50$

$B''(x) = -1 < 0 \rightarrow$ En $x = 50$ se alcanza un máximo.

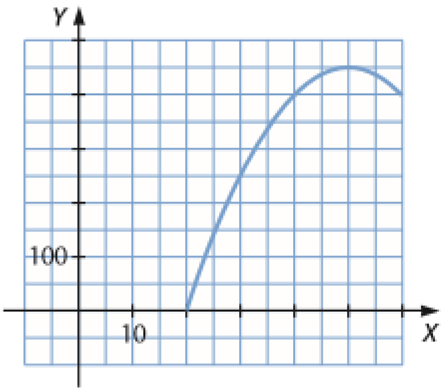
$B(50) = -1.250 + 2.500 - 800 = 450$

Así, para obtener el beneficio máximo, hay que fabricar y vender 50 objetos, siendo este beneficio de 450 €.

c) Representamos gráficamente la función en el intervalo (20, 60).

- En $(0, 50) \rightarrow B'(x) > 0 \rightarrow B(x)$ creciente
- En $(50, 60) \rightarrow B'(x) < 0 \rightarrow B(x)$ decreciente

Pasa por (20, 0) y por (60, 400) y el máximo es (50, 450).



Se ha comprobado que el número de pasajeros de la terminal internacional de cierto aeropuerto viene dado, como función de la hora del día, a través de la expresión: $N(t) = -5(\alpha - t)^2 + \beta$, $0 \leq t \leq 24$

Sabiendo que el número máximo de pasajeros en dicha terminal se alcanza a las 12 horas, con un total de 1.200 personas, se pide:

a) Determinar α y β. Justificar la respuesta.

b) Representar la función obtenida.

(Extremadura. Junio 2006. Opción A. Problema 2)

a) Pasa por (12, 1.200) $\rightarrow N(12) = 1.200 \rightarrow -5(\alpha - 12)^2 + \beta = 1.200$

$N'(t) = 10(\alpha - t) \rightarrow N'(12) = 10(\alpha - 12) = 0 \rightarrow \alpha = 12$

Así, $\beta = 1.200$.

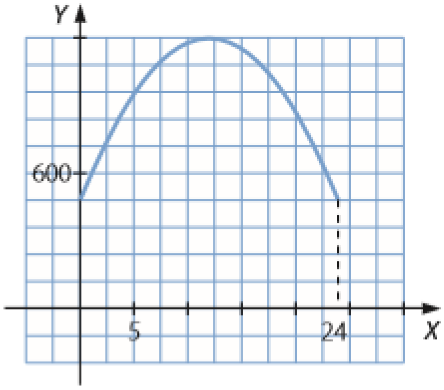
b) $N(t) = -5(12 - t)^2 + 1.200$

$N(0) = -720 + 1.200 = 480$

$N(24) = -720 + 1.200 = 480$

El máximo se alcanza en el punto (12, 1.200).

Es creciente en (0, 12) y decreciente en (12, 24).



Un estudio indica que, entre las 12.00 y las 19.00 horas de un día laborable típico, la velocidad, en km/h, del tráfico en cierta salida a la autopista viene dada por: $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x + 20 \quad \text{si } 0 \leq x \leq 7$

Representar gráficamente $f(x)$ estudiando: el punto de corte con el eje Y, intervalos de crecimiento y decrecimiento, intervalos de concavidad y convexidad. Calcular las horas en que se presentan máximos, mínimos y puntos de inflexión para la velocidad del tráfico.

(Galicia. Junio 2007. Bloque 2. Ejercicio 2)

- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = 20 \rightarrow (0, 20)$

$$f'(x) = 6x^2 - 42x + 60 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases}$$

Tal y como indica el enunciado, solo analizamos la función en el intervalo [0, 7].

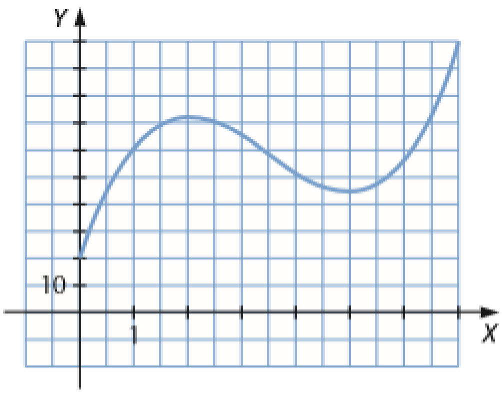
- En $(0, 2) \cup (5, 7) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(2, 5) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

$$f''(x) = 12x - 42 = 0 \rightarrow x = \frac{42}{12} = \frac{7}{2}$$

- En $\left(0, \frac{7}{2}\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $\left(\frac{7}{2}, 7\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

A las 2 horas la velocidad es máxima y a las 5 horas la velocidad es mínima.

A las 3 horas y media la velocidad alcanza un punto de inflexión.



Un dirigente de cierto partido político afirma que dimitirá si el porcentaje de votantes del partido no alcanza el 20 %. Se estima que el porcentaje de participación en la consulta será al menos el 40 % y que el porcentaje de votantes al partido dependerá del porcentaje de participación según esta función (P indica el porcentaje de votantes al partido y x el de participación):

$$P(x) = -0{,}00025x^3 + 0{,}045x^2 - 2{,}4x + 50 \quad \text{si } 40 \le x \le 100$$

a) Indica cuándo crece el porcentaje de votantes al partido y cuándo decrece. Según la función, ¿es posible que el dirigente no tenga que dimitir?

b) Dibuja la gráfica de la función.

(Asturias. Septiembre 2005. Bloque 3)

a) $P'(x) = -0{,}00075x^2 + 0{,}09x - 2{,}4 = 0 \to \begin{cases} x = 40 \\ x = 80 \end{cases}$

$P''(x) = -0{,}00156x + 0{,}09$

$P''(40) = 0{,}0276 > 0 \to$ En $x = 40$ presenta un mínimo.

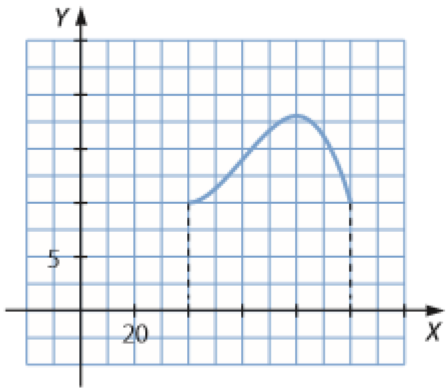
$P''(80) = -0{,}0348 < 0 \to$ En $x = 80$ presenta un máximo.

Así, en (40, 80) el porcentaje de votantes al partido crece y en (80, 100) decrece por lo que en $x = 100$ presenta otro mínimo.

El dirigente no tendrá que dimitir si el valor máximo que toma la función es mayor o igual que 20.

Como $P(80) = 18$ el dirigente sí tendrá que dimitir.

b) $P(40) = 10$ $\qquad$ $P(100) = 10$



Dibuja la gráfica de estas funciones racionales, analizando previamente sus características.

a) $y = \dfrac{x-1}{x^2}$ $\qquad$ b) $y = \dfrac{x-2}{x-3}$ $\qquad$ c) $y = \dfrac{x^2}{x+1}$ $\qquad$ d) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$

a) $x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ Dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \dfrac{x-1}{x^2} = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$
- Corte con el eje Y: no tiene porque no está definida para $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-1}{x^2} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x-1}{x^2} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

$y' = \dfrac{-x+2}{x^3} = 0 \rightarrow x = 2$

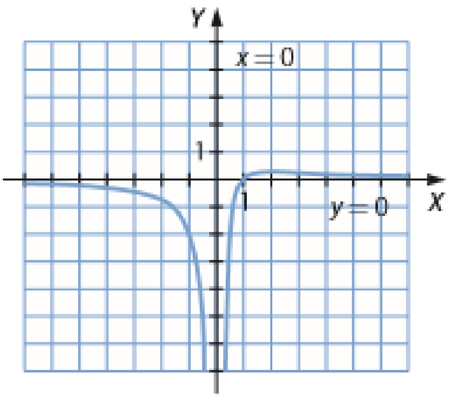
- En $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $(0, 2) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = 2$ presenta un máximo.

$y'' = \dfrac{2x-6}{x^4} = 0 \rightarrow x = 3$

- En $(-\infty, 0) \cup (0, 3) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(3, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = 3$ presenta un punto de inflexión.



b) $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow$ Dominio $= \mathbb{R} - \{3\}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \dfrac{x-2}{x-3} = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = \dfrac{2}{3} \rightarrow \left(0, \dfrac{2}{3}\right)$

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-2}{x-3} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 3$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x-2}{x-3} = 1 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 1$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

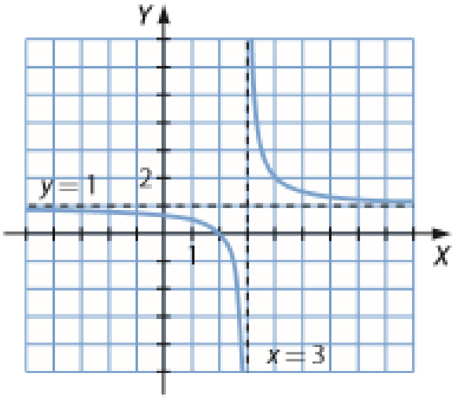
$y' = \frac{-1}{(x-3)^2} < 0 \rightarrow$ Función decreciente

No presenta máximos ni mínimos.

$y'' = \frac{2}{(x-3)^3} \neq 0$

No presenta puntos de inflexión.

- En $(-\infty, 3) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(3, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava



c) $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow$ Dominio $= \mathbb{R} - \{-1\}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \frac{x^2}{x+1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

$\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2}{x+1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x+1} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x+1} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{x(x+1)} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{-x}{x+1} = -1 \rightarrow n = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l}\text{Asíntota oblicua:} \\ y = x - 1\end{array}$$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

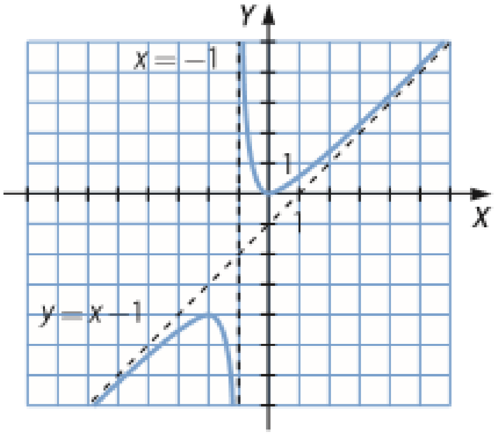
$$y' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

- En $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \to y' > 0 \to$ Función creciente
- En $(-2, -1) \cup (-1, 0) \to y' < 0 \to$ Función decreciente

En $x = -2$ presenta un máximo y en $x = 0$, un mínimo.

$$y'' = \frac{2}{(x+1)^3} \neq 0 \to \text{No presenta puntos de inflexión.}$$

- En $(-\infty, -1) \to y'' < 0 \to$ Función convexa
- En $(-1, +\infty) \to y'' > 0 \to$ Función cóncava



d) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \dfrac{x}{x^2+1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2+1} = 0 \rightarrow \text{Asíntota horizontal: } y = 0$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

$$y' = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

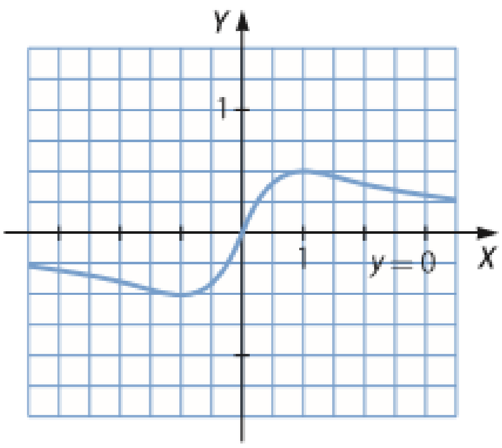
- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $(-1, 1) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = 1$ presenta un máximo y en $x = -1$, un mínimo.

$$y'' = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3} = 0 \rightarrow x(2x^2-6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

- En $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ y $x = \sqrt{3}$ presenta puntos de inflexión.



Se considera la función $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$.

a) Calcula sus asíntotas y el dominio de definición de la función.

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Representa gráficamente la función $f(x)$.

(Castilla y León. Septiembre 2006. Bloque A. Pregunta 2)

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$

- Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \to \dfrac{x}{x-2} = 0 \to x = 0 \to (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \to f(0) = 0 \to (0, 0)$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x}{x-2} = \infty \to \text{Asíntota vertical: } x = 2$$

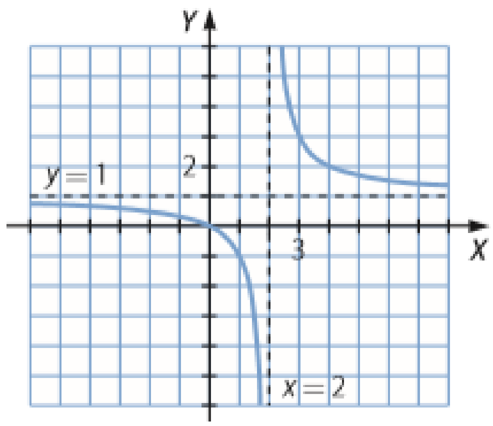
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x-2} = 1 \to \text{Asíntota horizontal: } y = 1$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

b) $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^2} < 0 \to f(x)$ decreciente en $\mathbb{R} - \{2\}$

No presenta máximos ni mínimos.

c)



Considere la función real de variable real $f(x) = \dfrac{2x+1}{x}$.

a) Determine el dominio de la función y los intervalos en los que es creciente o decreciente.

b) Halle las asíntotas.

c) Dibuje un esbozo de la gráfica de la función.

(Cataluña. Año 2007. Serie 1. Problema 5)

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = \dfrac{-1}{x^2} < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente en $\mathbb{R} - \{0\}$ y no tiene extremos relativos.

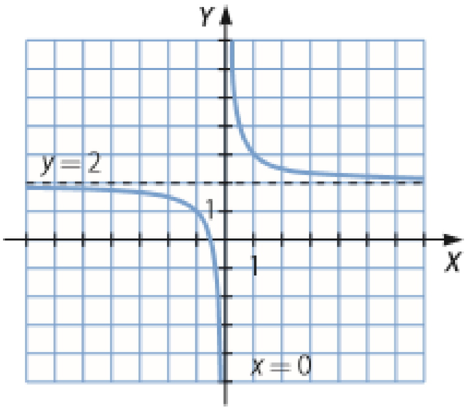
b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x+1}{x} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x+1}{x} = 2 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 2$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

c) • Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{2x+1}{x} = 0 \rightarrow x = \dfrac{-1}{2} \rightarrow \left(\dfrac{-1}{2}, 0\right)$

• Corte con el eje Y: no tiene.



El grado de estrés (puntuado de 0 a 10) durante las 8 horas de trabajo de cierto agente de Bolsa viene dado a través de la función:

$$f(t) = \frac{-2t(t-10)}{5},\ 0 \le t \le 8$$

a) ¿En qué instante de su jornada de trabajo el grado de estrés es máximo? Justificar la respuesta.

b) Representar la función anterior.

(Extremadura. Septiembre 2004. Opción A. Problema 2)

a) $f(t) = \frac{-2}{5}(t^2 - 10t)$

$f'(t) = \frac{-2}{5}(2t - 10) = 0 \rightarrow t = 5$

$f''(t) = \frac{-4}{5} < 0 \rightarrow$ En $t = 5$ se alcanza un máximo.

El grado de estrés es máximo a las 5 horas.

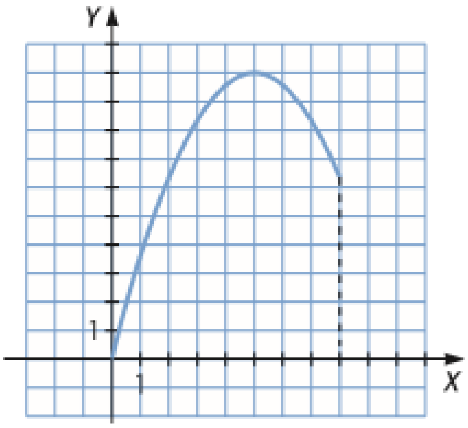
b) • Cortes con el eje X: $f(t) = 0 \rightarrow \frac{-2t(t-10)}{5} = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 10 \end{cases}$

Para $t = 10$ la función no está definida.

• Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow (0, 0)$

Se trata de una función polinómica definida en el intervalo [0, 8], creciente en (0, 5) y decreciente en (5, 8).

$f(0) = 0 \qquad f(8) = \frac{32}{5}$



Dada la función $f(x) = \frac{2x^3}{1 + x^2}$, se pide:

a) Dominio.

b) Puntos de corte con los ejes.

c) Puntos de discontinuidad, tipos de discontinuidad y asíntotas verticales (calculando los límites laterales).

d) Asíntotas horizontales y oblicuas.

e) Intervalos de crecimiento y decrecimiento, y extremos relativos.

f) Intervalos de concavidad y convexidad, y puntos de inflexión.

g) Representación gráfica, teniendo en cuenta los resultados de los apartados anteriores.

a) $\text{Dom} f = \mathbb{R}$

b) • Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{2x^3}{1+x^2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

• Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

c) La función es continua en $\mathbb{R}$ y no tiene asíntotas verticales.

d) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3}{1+x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3}{1+x^2} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3}{x(1+x^2)} = 2 \rightarrow m = 2 \\ \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x^3}{1+x^2} - 2x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-2x}{1+x^2} = 0 \rightarrow n = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua: } y = 2x$$

e) $f'(x) = \dfrac{2x^4 + 6x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \rightarrow x^2(2x^2 + 6) = 0 \rightarrow x = 0$

• En $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

No presenta máximos ni mínimos.

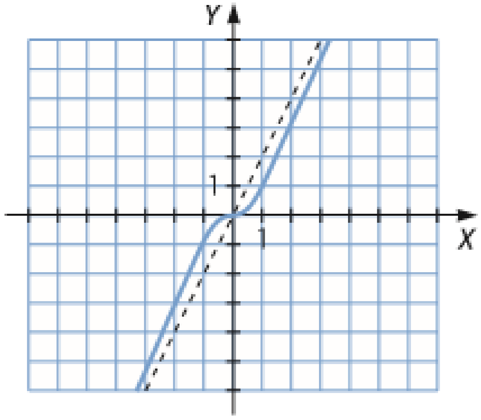
f) $f''(x) = \dfrac{-4x^3 + 12x}{(1+x^2)^3} = 0 \rightarrow x(-4x^2 + 12) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

• En $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

• En $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa

En $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{3}$ se alcanzan puntos de inflexión.

g)



Una función $f(t)$, $0 \leq t \leq 10$, en la que el tiempo t está expresado en años, representa los beneficios de una empresa (en cientos de miles de euros) entre los años 1990 ($t = 0$) y 2000 ($t = 10$):

$$f(t) = \begin{cases} t+1 & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ t^2 - 8t + 15 & \text{si } 2 \leq t < 6 \\ \dfrac{3}{4}(-t+10) & \text{si } 6 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

a) Representar gráficamente $f(t)$, estudiando: puntos de corte, intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) ¿En qué años tiene la empresa el máximo beneficio? ¿Cuál es dicho beneficio? ¿Durante cuánto tiempo hubo pérdidas?

(Galicia. Septiembre 2005. Bloque 2. Ejercicio 2)

a) Dom $f = [0, 10]$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t \to 2^-} t+1 = 3 \\ \lim\limits_{t \to 2^+} t^2 - 8t + 15 = 3 \\ f(2) = 3 \end{array}\right\} \to \text{Continua en } t = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} f(6) = 3 \\ \lim\limits_{t \to 6^-} t^2 - 8t + 15 = 36 - 48 + 15 = 3 \\ \lim\limits_{t \to 6^+} \dfrac{3}{4}(-t+10) = \dfrac{3}{4}(-6+10) = 3 \end{array}\right\} \to \text{Continua en } t = 6$$

Así, $f(t)$ es continua en $[0, 10]$.

$$f'(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < 2 \\ 2t - 8 & \text{si } 2 < t < 6 \\ \dfrac{-3}{4} & \text{si } 6 < t < 10 \end{cases}$$

- En $(0, 2) \rightarrow f'(t) > 0 \rightarrow f(t)$ creciente

  En (0, 1) presenta un mínimo y en (2, 3), un máximo.

- En (2, 6): $f'(t) = 0 \rightarrow t = 4$

  En $(2, 4) \rightarrow f'(t) < 0 \rightarrow f(t)$ decreciente

  En $(4, 6) \rightarrow f'(t) > 0 \rightarrow f(t)$ creciente

  En los puntos (2, 3) y (6, 3) presenta dos máximos y en (4, −1), un mínimo.

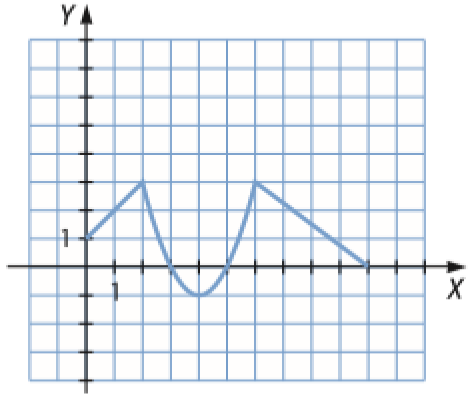
  Cortes con el eje X:

  $$t^2 - 8t + 15 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 5 \end{cases}$$

- En $(6, 10) \rightarrow f'(t) = \dfrac{-3}{4} < 0$

  $\rightarrow f(t)$ decreciente

  En el punto (6, 3) presenta un máximo y en (10, 0), un mínimo.



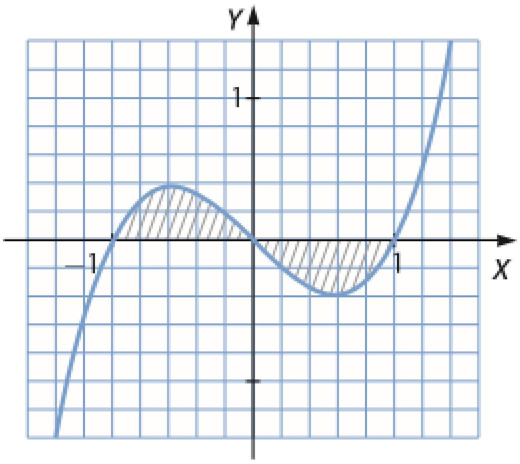
b) El máximo beneficio se obtiene para $t = 2$ y $t = 6$, es decir en 1992 y 1996 y vale 3.000 €.

Hubo pérdidas entre el año 1993 y el año 1995.

Calcular: $\displaystyle\int_{-1}^{1} x(x^2 - 1)\, dx$. Explicar mediante un gráfico el significado geométrico del valor obtenido.

(País Vasco. Junio 2005. Apartado B. Ejercicio 2)

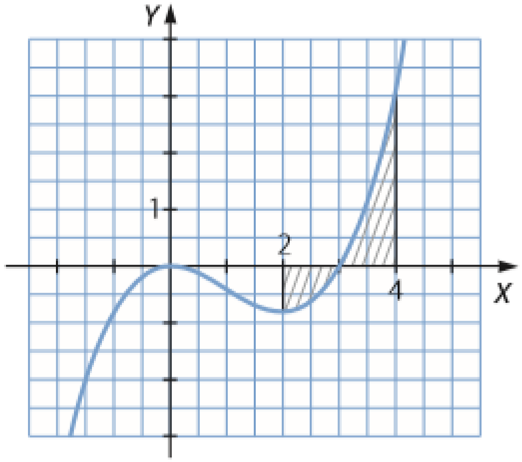
$$\int_{-1}^{1} x(x^2 - 1)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4} \right) = 0$$



Es una función impar, las dos superficies tienen la misma área, pero con signos distintos.

Dibuja la función $f(x) = 2x^3 - 6x^2$. Obtén el área que limitan la curva y el eje X entre $x = 2$ y $x = 4$.

(Asturias. Junio 2008. Bloque 4)



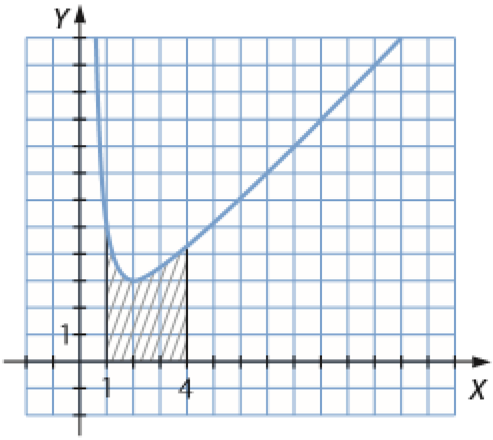
$$2x^3 - 6x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\left| \int_2^4 f(x)\, dx \right| = \left| \int_2^3 (2x^3 - 6x^2)\, dx \right| + \left| \int_3^4 (2x^3 - 6x^2)\, dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{x^4}{2} - 2x^3 \right]_2^3 \right| + \left| \left[\frac{x^4}{2} - 2x^3 \right]_3^4 \right| = \frac{11}{2} + \frac{27}{2} = 19$$

Dada la función $f(x) = x + \dfrac{4}{x^2}$ $(x > 0)$, dibuja la función f. Halla el área limitada por la curva y el eje de abscisas entre los puntos de abscisa $x = 1$ y $x = 4$.

(Asturias. Junio 2005. Bloque 4)

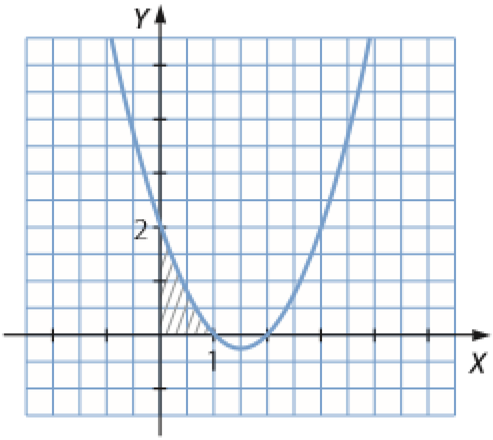


$$\left| \int_1^4 f(x)\, dx \right| = \left| \int_1^4 \left(x + \frac{4}{x^2} \right) dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{x^2}{2} - \frac{4}{x} \right]_1^4 \right| = \frac{21}{2}$$

Hallar el área encerrada por la función $f(x) = x^2 - 3x + 2$, la recta $x = 0$ y la recta $y = 0$.

(Cantabria. Septiembre 2007. Ejercicio 2. Opción A)



$$x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\left| \int_0^1 f(x)\,dx \right| = \left| \int_0^1 (x^2 - 3x + 2)\,dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_0^1 \right| = \frac{5}{6}$$

Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = x^3 - 9x$.
Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función f y el eje X.

(Madrid. Junio 2006. Opción A. Ejercicio 2)

$$x^3 - 9x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\left| \int_{-3}^3 f(x)\,dx \right| = \left| \int_{-3}^3 (x^3 - 9x)\,dx \right| + \left| \int_0^3 (x^3 - 9x)\,dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2} \right]_{-3}^0 \right| + \left| \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{9x^2}{2} \right]_0^3 \right| = \frac{81}{4} + \frac{81}{4} = \frac{81}{2}$$

Hallar el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } -2 \le x < 0 \\ 4 - x & \text{si } \ 0 \le x \le 4 \end{cases}$ y el eje de abscisas.

(País Vasco. Junio 2007. Apartado B. Ejercicio 2)

$$4 - x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

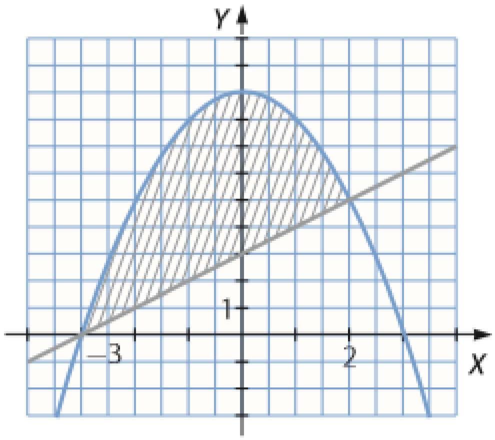
$$4 - x = 0 \rightarrow x = 4$$

$$\left| \int_{-2}^{4} f(x)\, dx \right| = \left| \int_{-2}^{0} (4 - x^2)\, dx \right| + \left| \int_{0}^{4} (4 - x)\, dx \right| =$$

$$= \left| \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{0} \right| + \left| \left[4x - \frac{x^2}{2} \right]_{0}^{4} \right| = \frac{16}{3} + 8 = \frac{40}{3}$$

Representar gráficamente la región acotada limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = 9 - x^2$, $g(x) = 3 + x$ y obtener su área.

(Madrid. Septiembre 2006. Opción B. Ejercicio 2)



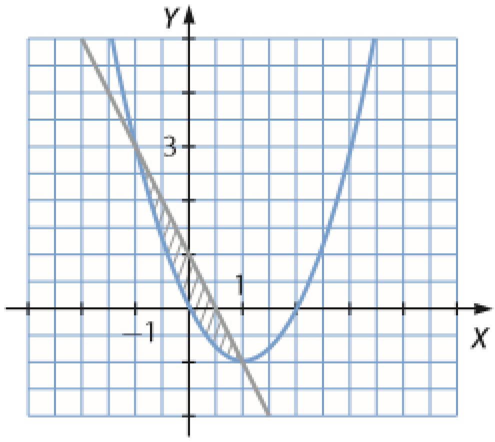
$$9 - x^2 = 3 + x \rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\left| \int_{-3}^{2} [f(x) - g(x)]\, dx \right| = \left| \int_{-3}^{2} (9 - x^2 - 3 - x)\, dx \right| = \left| \int_{-3}^{2} (-x^2 - x + 6)\, dx \right| =$$

$$= \left| \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{-3}^{2} \right| = \frac{125}{6}$$

Representa gráficamente las curvas $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = 1 - 2x$. Calcula el área que limitan dichas curvas.

(Castilla y León. Junio 2005. Bloque B. Pregunta 2)

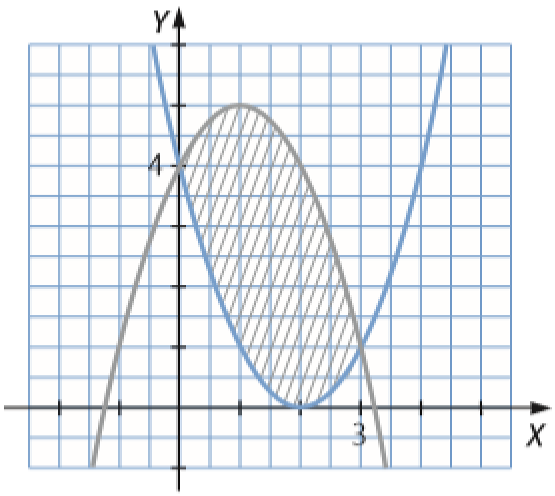


$$x^2 - 2x = 1 - 2x \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\left| \int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)]dx \right| = \left| \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\, dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-1}^{1} \right| = \frac{4}{3}$$

Dibuja la región limitada por las parábolas $y = x^2 - 4x + 4$, $y = -x^2 + 2x + 4$ y calcula el área de la región limitada por ambas curvas.

(La Rioja. Junio 2006. Parte C. Problema 1)



$$x^2 - 4x + 4 = -x^2 + 2x + 4 \rightarrow 2x^2 - 6x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\left| \int_{0}^{3} [f(x) - g(x)]\, dx \right| = \left| \int_{0}^{3} (-2x^2 + 6x)\, dx \right| = \left[-\frac{2x^3}{3} + 3x^2 \right]_{0}^{3} = 9$$