PREGUNTA 1: Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2 & si\ x \leq -2 \\ a & si -2 < x \leq 2 \\ x & x > 2 \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R})$$

a) Calcula el valor de a para que f sea continua en $x = -2$. (1 punto)

b) Para $a = 2$ estudia la continuidad de la función. (1 punto)

a) La función es continua en $x = -2$ si: $\lim_{x \to -2} f(x) = f(-2)$

$f(-2) = 4a - 2$

Existe $\lim_{x \to -2} f(x)$ si $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \to -2^-} f(x) = 4a - 2 \\ \lim_{x \to -2^+} f(x) = a \end{array} \right\} \to 4a - 2 = a \to a = \frac{2}{3}$$

b) Si $a = 2$: $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2 & \text{si } x \leq -2 \\ 2 & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- $f(-2) = 6$

  $$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \to -2^-} f(x) = 6 \\ \lim_{x \to -2^+} f(x) = 2 \end{array} \right\} \to \lim_{x \to -2^-} f(x) \neq \lim_{x \to -2^+} f(x) \to \text{No existe } \lim_{x \to -2} f(x).$$

  La función no es continua en $x = -2$, tiene una discontinuidad de salto finito.

- $f(2) = 2$

  $$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \to 2^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = 2 \end{array} \right\} \to \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) \to \text{Existe } \lim_{x \to 2} f(x).$$

  $f(2) = 2 = \lim_{x \to 2} f(x) \to$ La función es continua en $x = 2$.

PREGUNTA 2: Una empresa de compra y venta de automóviles ha realizado un estudio sobre sus beneficios y pérdidas, en miles de euros, a lo largo de los últimos 10 años y ha comprobado que se ajustan a la función:

$$F(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3 \quad si\ 0 \leq t \leq 10$$

a) ¿En qué años de producen los valores máximo y mínimo de dicha función? ¿Cuáles son sus beneficios máximos? (1 punto)
b) Determinar sus periodos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)

a) F es continua es [0, 10] por tratarse de una función polinómica.

$F'(t) = 3t^2 - 36t + 81 = 0 \rightarrow t = 3, t = 9$

$F''(t) = 6t - 36$

$F''(3) = 18 - 36 = -18 < 0 \rightarrow$ En $t = 3$ se alcanza un máximo.

$F''(9) = 54 - 36 = 18 > 0 \rightarrow$ En $t = 9$ se alcanza un mínimo.

Por tanto, el valor máximo de la función se alcanza a los 3 años y el mínimo a los 9 años.

$F(3) = 27 - 162 + 243 - 3 = 105$

El beneficio asciende a 105.000 €.

b) Períodos de crecimiento: $(0, 3) \cup (9, 10)$

Período de decrecimiento: $(3, 9)$

PREGUNTA 3: Con un trozo de alambre de 12 cm de longitud se pueden formar distintos rectángulos. ¿Cuál de ellos tiene la superficie máxima? (1,5 puntos)

Sean x e y las dimensiones del rectángulo. Se cumple que:

$2x + 2y = 12 \rightarrow x + y = 6$

Así, la función que debemos maximizar es: $S(x) = x(6 - x) = 6x - x^2$

$S'(x) = 6 - 2x = 0 \rightarrow x = 3$

$S''(x) = -2 < 0 \rightarrow$ En $x = 3$ alcanza un máximo.

Por tanto, las dimensiones del rectángulo de superficie máxima son 3 cm y 3 cm, es decir, un cuadrado de lado 3 cm.

PREGUNTA 4: Sea la función $f(x) = \frac{2x+1}{x}$

a) Determina el dominio de la función y los intervalos en los que es creciente o decreciente. (1 punto)

b) Halla sus asíntotas. (1 punto)

c) Dibuja un esbozo de la función. (1 punto)

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = \frac{-1}{x^2} < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente en $\mathbb{R} - \{0\}$ y no tiene extremos relativos.

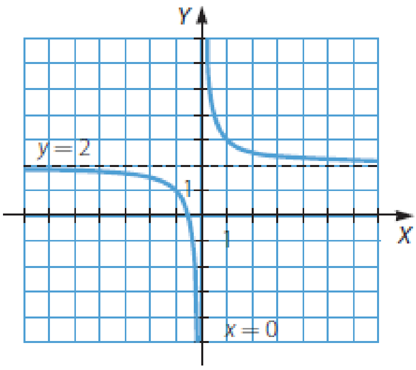
b) $\lim_{x \to 0} \frac{2x+1}{x} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 0$

$\lim_{x \to \infty} \frac{2x+1}{x} = 2 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 2$

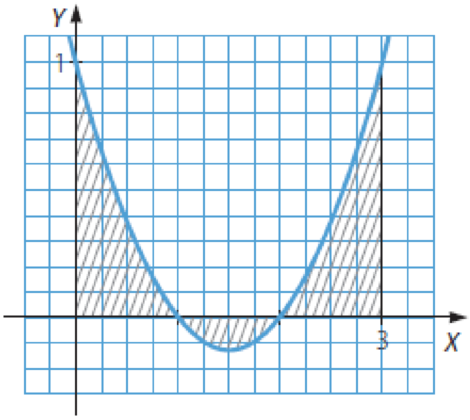
No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

c) • Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \frac{2x+1}{x} = 0 \rightarrow x = \frac{-1}{2} \rightarrow \left(\frac{-1}{2}, 0\right)$

• Corte con el eje Y: no tiene.



PREGUNTA 5: Calcular el área limitada por la curva $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$, el eje X y las rectas de ecuaciones x=2 y x=3. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área. (1,5 puntos)



$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\int_2^3 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{4} + x\right]_2^3 = \frac{5}{12}$$