

PREGUNTA 1:

a) Calcula k para que $f(x)$ sea continua en \mathbb{R} .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ k + 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

b) ¿Se puede calcular el límite de una función en un punto en el que la función no esté definida? ¿Puede ser la función continua en ese punto? Incluye representaciones gráficas a modo de ejemplos en las respuestas.

PREGUNTA 2: Estudia (dominio, puntos de corte con los ejes, simetrías, asíntotas, continuidad, crecimiento/decrecimiento) y representa la siguiente función: $f(x) = 2 + \frac{1}{x+1}$.

PREGUNTA 3: Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{2x}{x^2-4} \right)$ b) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \right)$

PREGUNTA 4: Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ b) $f(x) = (1 + e^x)^2$
 c) $f(x) = \frac{e^{2x}}{1-5x}$ d) $f(x) = e^x \cdot \ln(x^2 + 1)$

e) ¿En qué puntos la recta tangente a $y = x^3 - 4x$ tiene pendiente igual a 8?

Calificaciones:

PREGUNTA	PUNTUACIÓN
1	a) 0,75 p ; b) 1 p
2	2,5 p
3	a) 1 p ; b) 1 p
4	a) 0,75 p ; b) 0,75 p ; c) 0,75 p ; d) 0,75 p ; e) 0,75 p

Sólo se valorarán aquellas respuestas que estén debidamente justificadas.

PREGUNTA 1:

a) Para que $f(x)$ sea continua en \mathbb{R} tendrá que suceder que:

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. En $\mathbb{R} - \{0\}$ la continuidad está garantizada por ser una función racional con el denominador no nulo.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x} = 0+1 = 1 \\ f(0) &= K+1 \end{aligned} \right\}$$

luego tendrá que ser: $K+1=1 \Leftrightarrow \boxed{K=0}$

b) sí, se puede, por ejemplo:

No, si la función no está definida en un punto es imposible que cumpla la condición de continuidad en ese punto:

f continua en $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \underline{\underline{f(a)}}$; imposible si $\nexists f(a)$.

Por ejemplo en la figura anterior habría una discontinuidad evitable.

PREGUNTA 2: $f(x) = 2 + \frac{1}{x+1}$

♦ $\text{dom } f = \mathbb{R} - \{-1\}$

♦ PUNTOS DE CORTE :

-eje y: $f(0) = 2 + \frac{1}{0+1} = 3$ $A(0,3)$

-eje x: $0 = 2 + \frac{1}{x+1}$; $\frac{1}{x+1} = -2$; $1 = -2x - 2$; $2x = -3$;

$x = -\frac{3}{2}$ $B = \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

♦ Simetrías: $f(-x) = 2 + \frac{1}{-x+1} \neq f(x)$; $-f(x)$: NO HAY.

♦ Asíntotas:

- VERTICALES: $\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(2 + \frac{1}{x+1} \right) = 2 + (-\infty) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(2 + \frac{1}{x+1} \right) = 2 + (+\infty) = +\infty$

- HORIZONTALES: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2 + \frac{1}{x+1} \right) = 2$ $y=2$

♦ Continuidad: $f(x) = 2 + \frac{1}{x+1} = g(x) + h(x)$ siendo: $\begin{cases} g(x) = 2 \\ h(x) = \frac{1}{x+1} \end{cases}$

$g(x)$: continua en \mathbb{R} (función constante)

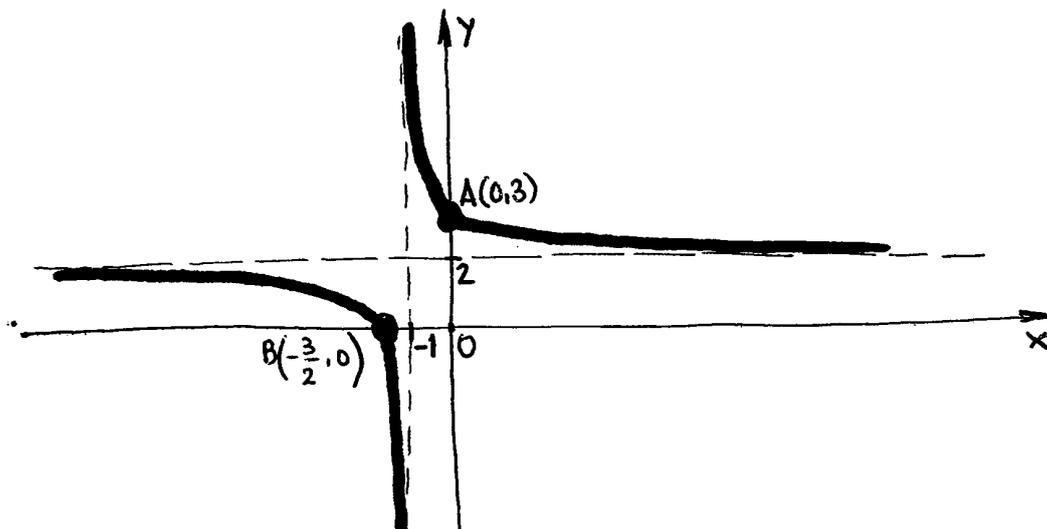
$h(x)$: continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$ (racional en la que el denominador sólo se anula en $x=-1$)

luego $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$

♦ Monotonía:

$$f'(x) = [2 + (x+1)^{-1}]' = 0 + (-1)(x+1)^{-2} \cdot 1 = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\} \Rightarrow f(x)$ es decreciente en todo su dominio



PREGUNTA 3:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{2x}{x^2-4} \right) &= [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+2 - 2x}{(x+2)(x-2)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x+2}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)}{(x+2)(x-2)} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - 2^2}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

PREGUNTA 4:

$$\text{a) } f(x) = \sqrt{x^2+1} = (x^2+1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\text{b) } f(x) = (1+e^x)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(1+e^x) \cdot e^x = 2e^x(1+e^x)$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{e^{2x}}{1-5x} \Rightarrow \frac{2e^{2x}(1-5x) + 5e^{2x}}{(1-5x)^2} = f'(x)$$

$$\text{d) } f(x) = e^x \cdot \ln(x^2+1) \Rightarrow f'(x) = e^x \cdot \ln(x^2+1) + e^x \cdot \frac{2x}{x^2+1}$$

e) Será en aquellos puntos donde $f'(x) = 8$:

$$f'(x) = 3x^2 - 4$$

$$3x^2 - 4 = 8 \Leftrightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \pm 2}$$