PREGUNTA 1.- Dadas las funciones: $f(x) = 1+ x^2$; $g(x) = \sqrt{4-2x}$; $h(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

Calcula las siguientes funciones y halla sus dominios de definición:

a) $(f+h)(x)$ b) $(g \cdot g)(x)$ c) $(g \circ f)(x)$ d) $(h \circ g)(x)$

PREGUNTA 2.- Calcula, si es posible, la función inversa de $f(x) = \dfrac{2-x}{x-2}$

PREGUNTA 3.- Se ha observado que la vida media, en minutos, de una bacteria varía en función de la temperatura del medio en el que vive. Se dispone de los siguientes valores tomados experimentalmente:

Temperatura [°C]	6	9	12	15	16
Vida media [min]	104,2	140,4	181,7	220,2	257,6

¿Qué vida media estimas para un cultivo de bacterias en un medio a 10ºC?

PREGUNTA 4.- Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{3x+5} - \sqrt{3x} \right)$

PREGUNTA 5.- Halla las asíntotas de las siguientes funciones y esboza sus gráficas:

a) $y = \dfrac{(x+3)^2}{(x+1)^2}$ b) $y = \dfrac{2x^2}{x+3}$

PREGUNTA 6.- Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) \begin{cases} -x-1 & \text{si} \quad -1 \geq x \\ 1-x^2 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ x+1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Calificaciones:

PREGUNTA	**PUNTUACIÓN**
1	a) 0,5 puntos; b) 0,5 puntos; c) 0,75 puntos; d) 0,75 puntos
2	0,5 puntos
3	1 punto
4	a) 0,75 puntos; b) 0,75 puntos
5	a) 1,5 puntos; b) 1,5 puntos
6	1,5 puntos

Sólo se valorarán aquellas respuestas que estén debidamente justificadas.

02024

EX 8-3-2010 : SOLUCIONES

PREGUNTA 1: $D(f) = \mathbb{R}$; $D(g) = \{x \,/\, 4-2x \geq 0\} = (-\infty, 2]$;

$D(h) = \{x \,/\, 1-x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

a) $(f+h)(x) = 1+x^2+\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{(1+x^2)(1-x^2)+1}{1-x^2} = \dfrac{1-x^4+1}{1-x^2} = \dfrac{2-x^4}{1-x^2}$

$D(f+h) = D(f) \cap D(h) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

b) $(g \cdot g)(x) = (\sqrt{4-2x})(\sqrt{4-2x}) = 4-2x$

$D(g \cdot g) = D(g) \cap D(g) = D(g) = (-\infty, 2]$

c) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \sqrt{4-2(1+x^2)} = \sqrt{4-2-2x^2} = \sqrt{2-2x^2}$

$$\left.\begin{array}{l} * \; D(f) = \mathbb{R} \\ * \; 2-2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 \leq 2 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-1, 1] \end{array}\right\}$$

$D(g \circ f) = [-1, 1]$

d) $(h \circ g)(x) = h[g(x)] = \dfrac{1}{1-(\sqrt{4-2x})^2} = \dfrac{1}{1-4+2x} = \dfrac{1}{2x-3}$

$$\left.\begin{array}{l} * \; D(g) = (-\infty, 2) \\ * \; 2x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{3}{2} \end{array}\right\} D(h \circ g) = (-\infty, \tfrac{3}{2}) \cup (\tfrac{3}{2}, 2]$$

PREGUNTA 2: $f(x) = \dfrac{2-x}{x-2}$

$y = \dfrac{2-x}{x-2}$; $yx - 2y = 2-x$; $yx + x = 2+2y$; $x(y+1) = 2+2y$;

$x = \dfrac{2+2y}{y+1} \Rightarrow \boxed{y = \dfrac{2+2x}{x+1}}$ es la inversa de $f(x)$

PREGUNTA 3: Recta que pasa por $A(9; 140,4)$ y $B(12; 181,7)$

$y = ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} E1:\ 140,4 = 9a + b \\ E2:\ 181,7 = 12a + b \end{array}\right\} \Rightarrow (E2 - E1):\ 41,3 = 3a \Rightarrow a = 13,77 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = 140,4 - 9 \cdot 13,77 = 16,47$$

luego: $y = 13,77x + 16,47$; si $x = 10°C \Rightarrow \boxed{y = 13,77 \cdot 10 + 16,47 = 154,2 \text{ min}}$

PREGUNTA 4:

a) $$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x^2 - 3x + 5)}{\cancel{(x+1)}(x-7)} = \boxed{-\frac{9}{8}}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 2 & 5 \\ -1 & & -1 & 3 & -5 \\ \hline & 1 & -3 & 5 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & -6 & -7 \\ -1 & & -1 & 7 \\ \hline & 1 & -7 & \boxed{0} \end{array}$$

b) $$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{3x+5} - \sqrt{3x}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{3x+5} - \sqrt{3x})(\sqrt{3x+5} + \sqrt{3x})}{(\sqrt{3x+5} + \sqrt{3x})} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{3x+5})^2 - (\sqrt{3x})^2}{(\sqrt{3x+5} + \sqrt{3x})} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{3x} + 5 - \cancel{3x}}{(\sqrt{3x+5} + \sqrt{3x})} = \frac{5}{\infty} = \boxed{0}$$

PREGUNTA 5:

a) $y = \dfrac{(x+3)^2}{(x+1)^2}$

AS. VERT. EN $\boxed{x = -1}$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \frac{+}{+} = +\infty \qquad \lim_{x \to -1^+} f(x) = \frac{+}{+} = +\infty$$

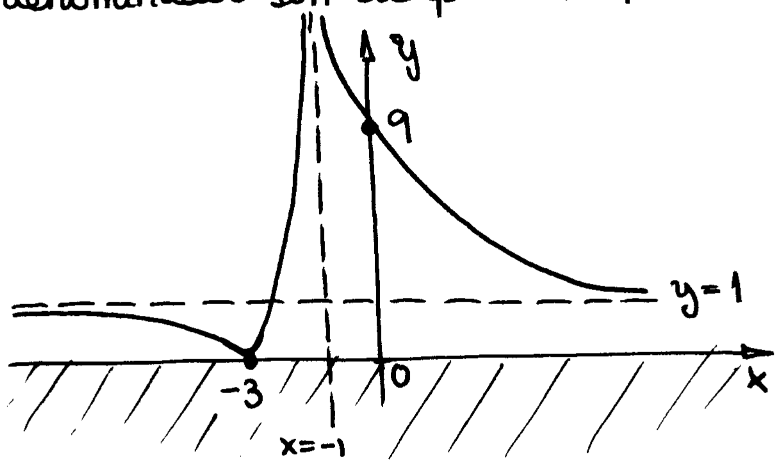
AS. HORIZONTAL:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

- Tanto el numerador como el denominador son siempre ≥ 0 por estar elevados al cuadrado.
- Puntos de corte:

eje X $\Rightarrow x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$

eje Y $\Rightarrow y = \dfrac{(0+3)^2}{(0+1)^2} = 9$



02024

b) $y=\dfrac{2x^2}{x+3}$

A.V: $\displaystyle\lim_{x\to -3^-} \frac{2x^2}{x+3} = \frac{+}{-} = -\infty$ $\qquad \displaystyle\lim_{x\to -3^+} \frac{2x^2}{x+3} = \frac{+}{+} = +\infty$

A.H: No hay: $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x+3} = \infty$

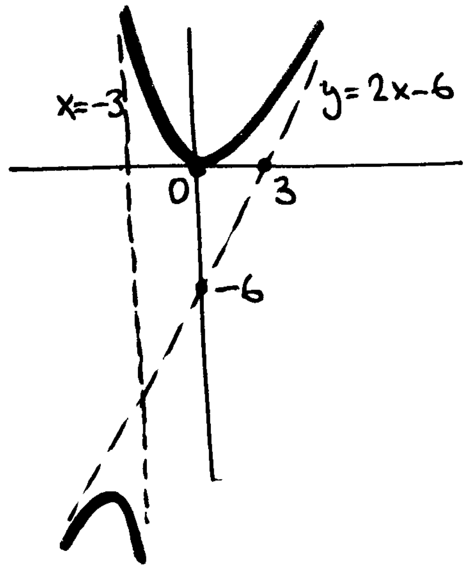
A.OBLÍCUAS $y=mx+n$ $\left\{\begin{array}{l} m=\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2+3x} = 2 \\ n=\displaystyle\lim_{x\to\infty} [f(x)-mx] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2}{x+3}-2x\right) = \end{array}\right.$

$$=\lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{2x^2}-\cancel{2x^2}-6x}{x+3} = -6$$

$\boxed{y=2x-6}$

x	y
0	-6
	0

PUNTOS DE CORTE: eje X: $2x^2=0 \Leftrightarrow x=0$; eje Y: $y=\frac{0}{3}=0$ $\quad (0,0)$



PREGUNTA 6

Si $\boxed{x=-1}$: $\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to -1^-} f(x) = -(-1)-1 = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1-(-1)^2 = 1-1=0 \\ f(-1) = -(-1)-1 = 0 \end{array}\right\}$ $\displaystyle\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$ luego $f(x)$ es CONTINUA en $x=-1$

Si $\boxed{x=1}$: $\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1-1^2=0 \\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1+1=2 \end{array}\right\}$ Como $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow$ DISCONTINUA EN $x=1$ (Salto de 2 unidades)

Si $x\neq 1,-1$; $f(x)$ está compuesta por tramos polinómicos, por lo tanto la función es continua.