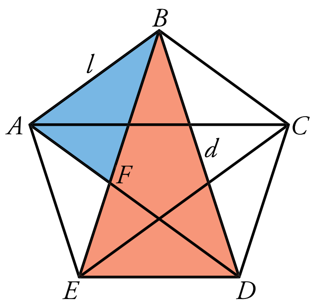
Resuelve

Página 25



1. Demuestra que los triángulos *ABF* y *EBD* son semejantes (es decir, demuestra que sus ángulos son respectivamente iguales).

2. Si llamamos *l* al lado del pentágono y *d* a su diagonal, basándote en la semejanza de los triángulos que acabas de demostrar, halla la relación $\frac{d}{l}$ y comprueba que es el número áureo:

$$\frac{d}{l} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi$$

El ángulo $\hat{B} = 36°$ en el triángulo ABF, y $\hat{B} = 36°$ en el triángulo EBD. Por otra parte los triángulos DAB y EBD son iguales, luego el ángulo $\hat{A}$ en el triángulo ABF, y $\hat{D}$ en el triángulo EBD son iguales. Por tanto los triángulos son semejantes.

El lado $AF = d - l$.

Por la semejanza de los triángulos ABF y EBD; $\frac{BD}{BF} = \frac{ED}{AF}$; es decir, $\frac{d}{l} = \frac{l}{d-l}$

Operando, $d(d-l) = l^2$, por tanto $d^2 - dl - l^2 = 0$.

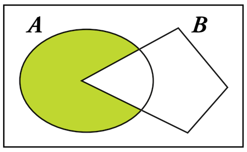
Las soluciones posibles para d son $d = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + 4l^2}}{2} = l\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Como d no puede ser negativa, $d = l\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, y $\frac{d}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$

1 Lenguaje matemático: conjuntos y símbolos

Página 27

1 **¿Verdadero o falso?**



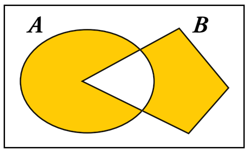
a) El conjunto coloreado de la izquierda se puede designar $A - B$.

Verdadero, porque la parte coloreada está formada por todos los elementos de A que no están en B.

b) El conjunto coloreado de la izquierda se puede designar $A \cap B'$.

Verdadero, porque la parte coloreada está formada por todos los elementos de A que no están en B, ya que B' es el complementario de B.

c) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar:



$$(A - B) \cup (B - A)$$

Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto coloreado, o está en A y no está en B, o está en B y no está en A.

d) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar:

$$(A \cup B) - (A \cap B)$$

Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto coloreado, tiene que estar en A o en B, pero no puede estar en los dos a la vez $(A \cap B)$.

e) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$.

Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto, o está en A y no está en B, o está en B y no está en A.

f) $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$

Verdadero, porque todos los números enteros son racionales.

g) $[x \in (\dot{3})$ y $x \in (\dot{2})] \Leftrightarrow x \in (\dot{6})$

$(\dot{n})$ es el conjunto de los múltiplos de n.

Verdadero, porque si un número es a la vez múltiplo de 2 y de 3, entonces es múltiplo de $2 \cdot 3 = 6$.

h) $(\dot{3}) \cap (\dot{2}) = (\dot{6})$

Es la misma afirmación anterior.

i) $x \in A - B \Rightarrow x \in A \cap B'$

Verdadero, porque los elementos de $A - B$ están en A y no están en B, luego están en A y en B'.

j) $(x \in A \Rightarrow x \in B)$ es lo mismo que decir $A \subset B$.

Verdadero, porque la implicación indica que todo elemento de A es un elemento de B.

k) $(x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subset B$

Tenemos que comprobar que las dos siguientes afirmaciones son ciertas:

$(x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow A \subset B$ que es la afirmación del apartado j)

$A \subset B \Rightarrow x \in \text{A} \Rightarrow x \in \text{B}$, pero si B contiene a A, es porque todos los elementos de A están en B, luego son equivalentes y es verdadera la afirmación.

l) $(x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow B \subset A$

Falso, porque puede existir algún elemento de B que no esté en A.

m) $x \in (0, 1) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ **y** $0 < x < 1$

Verdadero, porque los intervalos representan conjuntos de números reales y el intervalo (0, 1) está formado por los números comprendidos entre 0 y 1 que son mayores que 0 y menores que 1, luego son afirmaciones equivalentes.

n) $\sqrt{2} \notin (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$ **pero** $\sqrt{2}/2 \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$

Verdadero, porque $\sqrt{2}$ es un número real que no es racional y es mayor que 1, sin embargo $\sqrt{2}/2$ también es irracional, pero está entre 0 y 1.

ñ) $0,5 \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$

Falso, porque 0,5 es racional.

o) $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$ **es el conjunto de los números irracionales positivos menores que 1.**

Verdadero, porque son los números reales que no son racionales, es decir, irracionales, y además tienen que ser mayores que cero, por tanto positivos, y menores que 1.

p) $\{x \in \mathbb{Z} \,/\, -2 < x \le 5\} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Verdadero, porque los únicos números enteros mayores que –2 y menores o iguales que 5 son los del conjunto indicado.

q) El conjunto de los números enteros mayores que –5 y menores que 7 es $\mathbb{Z} \cap (-5, 7)$.

Verdadero, porque, de los números enteros mayores que –5 y menores que 7, están en el intervalo (–5, 7) y además son enteros.

r) (*x* es un número real pero no es racional) $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

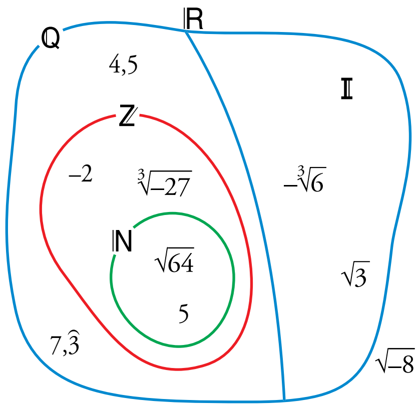
Verdadero, porque $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es el conjunto de todos los números reales menos los racionales, que es equivalente a decir los números reales que no son racionales.

2 Números reales. La recta real

Página 29

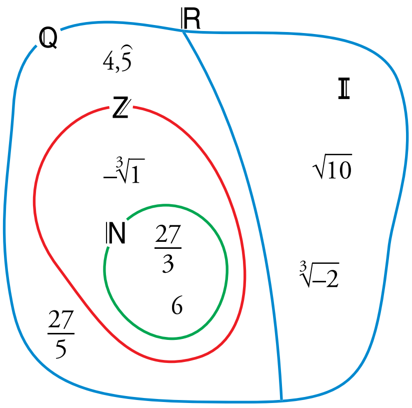
Reflexiona y resuelve

Observa cómo se sitúan estos números en los conjuntos numéricos:



Ahora, en tu cuaderno, sitúa los siguientes números en un diagrama similar:

$-\sqrt[3]{1}$; $4,\widehat{5}$; 6; $\sqrt{10}$; $\sqrt[4]{-16}$; $\sqrt[3]{-2}$; 27/5; 27/3



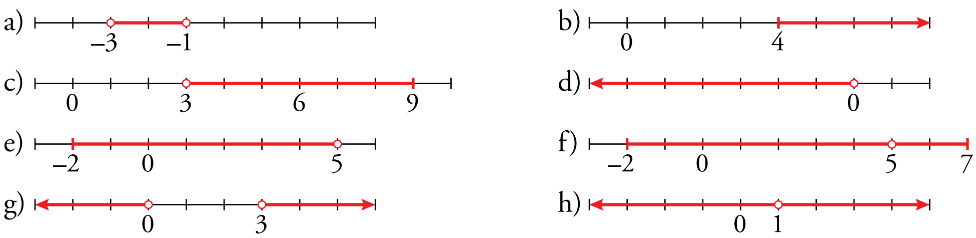
$6, \frac{27}{3} \in \mathbb{N}$ $\quad -\sqrt[3]{1} \in \mathbb{Z}$ $\quad 4,\widehat{5}, \frac{27}{5} \in \mathbb{Q}$ $\quad \sqrt{10}, \sqrt[3]{-2} \in \mathbb{R}$ $\quad \sqrt[4]{-16}$ no es real

Página 29

1 Representa los siguientes conjuntos:

a) $(-3, -1)$ **b)** $[4, +\infty)$ **c)** $(3, 9]$ **d)** $(-\infty, 0)$

e) $\{x / -2 \le x < 5\}$ **f)** $[-2, 5) \cup (5, 7]$ **g)** $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ **h)** $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$



2 Averigua y representa para qué valores de x se cumplen las siguientes relaciones:

a) $|x| = 5$ **b)** $|x| \le 5$ **c)** $|x - 4| = 2$

d) $|x - 4| \le 2$ **e)** $|x - 4| > 2$ **f)** $|x + 4| > 5$

a) 5 y –5

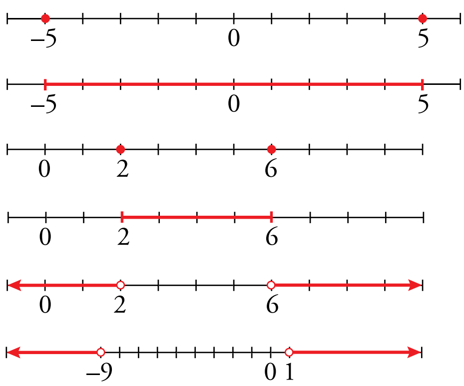
b) $-5 \le x \le 5$; $[-5, 5]$

c) 6 y 2

d) $2 \le x \le 6$; $[2, 6]$

e) $x < 2$ o $x > 6$; $(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$

f) $x < -9$ o $x > 1$; $(-\infty, -9) \cup (1, +\infty)$



3 Radicales. Propiedades

Página 30

1 Simplifica.

a) $\sqrt[9]{x^{12}}$ **b)** $\sqrt[12]{x^8}$ **c)** $\sqrt[5]{y^{10}}$

d) $\sqrt[6]{8}$ **e)** $\sqrt[9]{64}$ **f)** $\sqrt[8]{81}$

a) $\sqrt[9]{x^{12}} = \sqrt[3]{x^4}$ Se dividen índice y exponente entre 3.

b) $\sqrt[12]{x^8} = \sqrt[3]{x^2}$

c) $\sqrt[5]{y^{10}} = y^2$

d) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$

e) $\sqrt[9]{64} = \sqrt[9]{2^6} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

f) $\sqrt[8]{81} = \sqrt[8]{3^4} = \sqrt{3}$

2 ¿Cuál es mayor, $\sqrt[4]{31}$ o $\sqrt[3]{13}$?

Reducimos a índice común: $\sqrt[4]{31} = \sqrt[12]{29791}$; $\sqrt[3]{13} = \sqrt[12]{28561}$

Por tanto, es mayor $\sqrt[4]{31}$.

3 Reduce a índice común.

a) $\sqrt[12]{a^5}$ **y** $\sqrt[18]{a^7}$

b) $\sqrt[3]{51}$ **y** $\sqrt[9]{132\,650}$

a) $\sqrt[12]{a^5} = \sqrt[36]{a^{15}}$; $\sqrt[18]{a^7} = \sqrt[36]{a^{14}}$

b) $\sqrt[3]{51} = \sqrt[9]{132\,651}$; $\sqrt[9]{132\,650}$

4 Simplifica.

a) $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{k}}}\right)^8$ **b)** $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$ **c)** $\sqrt[3]{(\sqrt{x})^6}$

a) $\left(\sqrt[8]{k}\right)^8 = k$

b) $\sqrt[15]{x^{10}} = \sqrt[3]{x^2}$

c) $\sqrt[6]{x^6} = x$

Página 31

5 Reduce.

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$ **b)** $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{3}$ **c)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2}$

d) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[3]{4}$ **e)** $\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt{5}$ **f)** $\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt{3}$

a) $\sqrt[15]{2^5} \cdot \sqrt[15]{2^3} = \sqrt[15]{2^8}$

b) $\sqrt[6]{3^4} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{3^5}$

c) $\sqrt[8]{2^4} \cdot \sqrt[8]{2^2} \cdot \sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{2^7}$

d) $\sqrt[12]{8^3} \cdot \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{(2^3)^3 \cdot (2^2)^4} = \sqrt[12]{2^{17}} = 2\sqrt[12]{2^5}$

e) Se factorizan los radicandos y se reduce a índice común:

$\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt{5} = \sqrt[4]{5^3} \cdot \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[4]{5^5} = 5\sqrt[4]{5}$

f) Se factorizan los radicandos y se reduce a índice común:

$\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[6]{(3^4)^2}\,\sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{3^{11}} = 3\sqrt[6]{3^5}$

6 **Simplifica.**

a) $\dfrac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}$ b) $\dfrac{\sqrt{a \cdot b}}{\sqrt[3]{a \cdot b}}$ c) $\dfrac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}$ d) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3 \cdot b^5 \cdot c}}{\sqrt{a \cdot b^3 \cdot c^3}}$

a) $\sqrt[15]{\dfrac{x^3}{x^5}} = \sqrt[15]{\dfrac{1}{x^2}} = \sqrt[15]{x^{-2}}$

b) $\sqrt[6]{\dfrac{a^3 b^3}{a^2 b^2}} = \sqrt[6]{a\,b}$

c) $\sqrt[6]{\dfrac{a^3}{a^4}} = \sqrt[6]{\dfrac{1}{a}} = \sqrt[6]{a^{-1}}$

d) $\sqrt[4]{\dfrac{a^3 b^5 c}{a^2 b^6 c^6}} = \sqrt[4]{\dfrac{a}{bc^5}} = \dfrac{1}{c}\sqrt[4]{\dfrac{a}{bc}}$

7 **Reduce.**

a) $\dfrac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}}$ c) $\dfrac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$ d) $\dfrac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt{3}}$

a) $\sqrt[6]{\dfrac{3^4}{3^3}} = \sqrt[6]{3}$

b) $\sqrt[6]{\dfrac{3^6}{3^2}} = \sqrt[6]{3^4} = \sqrt[3]{3^2}$

c) $\sqrt[10]{\dfrac{2^8}{2^5}} = \sqrt[10]{2^3} = \sqrt[10]{8}$

d) $\sqrt[4]{\dfrac{3^6}{3^2}} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

8 **Suma y simplifica.**

a) $5\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$ b) $\sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{2}$ c) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8}$

d) $\sqrt{27} - \sqrt{50} + \sqrt{12} + \sqrt{8}$ e) $\sqrt{50a} - \sqrt{18a}$ f) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{250}$

a) $10\sqrt{x}$

b) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

c) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2 \cdot 5^2} - \sqrt{2} - \sqrt{2^3} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

d) $\sqrt{3^3} - \sqrt{2 \cdot 5^2} + \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{2^3} = 3\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$

e) $\sqrt{2 \cdot 5^2 \cdot a} - \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot a} = 5\sqrt{2a} - 3\sqrt{2a} = 2\sqrt{2a}$

f) Se factorizan los radicandos y se sacan factores de la raíz:

$\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{2^4} + \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} - \sqrt[3]{2 \cdot 5^3} = 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{2} = 0$

Página 32

9 **Racionaliza denominadores y simplifica cuanto puedas.**

a) $\dfrac{5}{\sqrt{7}}$ b) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$ c) $\sqrt{\dfrac{7}{3}}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}}$

e) $\dfrac{3}{\sqrt{50}}$ f) $\dfrac{4}{\sqrt{18}}$ g) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{25}}$ h) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{40}}$

i) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{36}}$ j) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{100}}$

a) $\dfrac{5}{\sqrt{7}} = \dfrac{5\sqrt{7}}{7}$

b) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$

c) $\sqrt{\dfrac{7}{3}} = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{21}}{3}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}} = \dfrac{1}{a\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a^2}$

e) $\dfrac{3}{\sqrt{50}} = \dfrac{3}{\sqrt{2 \cdot 5^2}} = \dfrac{3}{5\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{10}$

f) $\dfrac{4}{\sqrt{18}} = \dfrac{4}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} = \dfrac{4}{3\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{6} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

g) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{25}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{2\sqrt[3]{5}}{5}$

h) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{40}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 5}} = \dfrac{1}{2\sqrt[3]{5}} = \dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{10} = \dfrac{\sqrt[3]{25}}{10}$

i) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{36}} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2}} = \dfrac{3\sqrt[3]{2 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \dfrac{3\sqrt[3]{6}}{6} = \dfrac{\sqrt[3]{6}}{2}$

j) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{100}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 5^2}} = \dfrac{2\sqrt[3]{2 \cdot 5}}{2 \cdot 5} = \dfrac{2\sqrt[3]{10}}{10} = \dfrac{\sqrt[3]{10}}{5}$

10 **Racionaliza denominadores y simplifica cuanto puedas.**

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ **b)** $\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ **c)** $\dfrac{a-1}{\sqrt{a}-1}$ **d)** $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

e) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ **f)** $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ **g)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ **h)** $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

a) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1$

b) $\dfrac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\dfrac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}=\dfrac{x\sqrt{x}-x\sqrt{y}+y\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y}$

c) $\dfrac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}=\dfrac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(a-1)}=\sqrt{a}+1$

d) $\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$

e) $\dfrac{(2\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{12-5}=\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{7}$

f) $\dfrac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2}{18-12}=\dfrac{18+12+12\sqrt{6}}{6}=\dfrac{30+12\sqrt{6}}{6}=5+2\sqrt{6}$

g) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{(2-1)+2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}(2-1)}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

h) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}=\dfrac{2\sqrt{x}}{x-y}$

4 Logaritmos. Propiedades

Página 35

1 Halla.

a) $\log_2 16$ **b)** $\log_2 0{,}25$ **c)** $\log_9 1$ **d)** $\log_{10} 0{,}1$

e) $\log_4 64$ **f)** $\log_7 49$ **g)** $\ln e^4$ **h)** $\ln e^{-1/4}$

i) $\log_5 0{,}04$ **j)** $\log_6 \left(\frac{1}{216}\right)$

a) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

b) $\log_2 0{,}25 = \log_2 2^{-2} = -2$

c) $\log_9 1 = 0$

d) $\log_{10} 0{,}1 = \log_{10} 10^{-1} = -1$

e) $\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$

f) $\log_7 49 = \log_7 7^2 = 2$

g) $\ln e^4 = 4$

h) $\ln e^{-1/4} = -\frac{1}{4}$

i) $\log_5 0{,}04 = \log_5 5^{-2} = -2$

j) $\log_6 \left(\frac{1}{216}\right) = \log_6 6^{-3} = -3$

2 Halla la parte entera de…

a) $\log_2 60$**.** **b)** $\log_5 700$**.** **c)** $\log_{10} 43\,000$**.** **d)** $\log_{10} 0{,}084$**.**

e) $\log_9 60$**.** **f)** $\ln e$**.** **g)** $\log_{20} 450\,000$**.** **h)** $\log_{5,4} 900$**.**

a) $2^5 = 32$; $2^6 = 64$; $32 < 60 < 64$

$5 < \log_2 60 < 6 \Rightarrow \log_2 60 = 5,\ldots$

b) $5^4 = 625$; $5^5 = 3\,125$; $625 < 700 < 3\,125$

$4 < \log_5 700 < 5 \Rightarrow \log_5 700 = 4,\ldots$

c) $10^4 = 10\,000$; $10^5 = 100\,000$; $10\,000 < 43\,000 < 100\,000$

$4 < \log_{10} 43\,000 < 5 \Rightarrow \log_{10} 43\,000 = 4,\ldots$

d) $10^{-2} = 0{,}01$; $10^{-1} = 0{,}1$; $0{,}01 < 0{,}084 < 0{,}1$

$-2 < \log_{10} 0{,}084 < -1 \Rightarrow \log_{10} 0{,}084 = -1,\ldots$

e) $9^1 = 9$; $9^2 = 81$; $9 < 60 < 81$

$1 < \log_9 60 < 2 \Rightarrow \log_9 60 = 1,\ldots$

f) $\ln e = 1$

g) $\log_{20} 450\,000$; $20^4 = 160\,000$; $20^5 = 3\,200\,000$

Como $20^4 = 160\,000 < 450\,000 < 3\,200\,000 = 20^5 \Rightarrow 4 < \log_{20} 450\,000 < 5$.

La parte entera de $\log_{20} 450\,000$ es 4.

h) $\log_{5,4} 900 = 4{,}0337$

$5{,}4^4 = 850{,}31$; $5{,}4^5 = 4\,591{,}7$

Como $5{,}4^4 = 850{,}31 < 900 < 4\,591{,}7 = 5{,}4^5 \Rightarrow 4 < \log_{5,4} 900 < 5$.

La parte entera de $\log_{5,4} 900$ es 4.

3 **Aplica la propiedad ⑧ para obtener los siguientes logaritmos con la ayuda de la calculadora:**

a) $\boldsymbol{log_2 \, 1\,500}$ **b)** $\boldsymbol{log_5 \, 200}$ **c)** $\boldsymbol{log_{100} \, 200}$ **d)** $\boldsymbol{log_{100} \, 40}$

En cada caso, comprueba el resultado utilizando la potenciación.

a) $\dfrac{log\,1500}{log\,2} = 10{,}55;\ \ 2^{10{,}55} \approx 1\,500$

b) $\dfrac{log\,200}{log\,5} = 3{,}29;\ \ 5^{3{,}29} \approx 200$

c) $\dfrac{log\,200}{log\,100} = 1{,}15;\ \ 100^{1{,}15} \approx 200$

d) $\dfrac{log\,40}{log\,100} = 0{,}80;\ \ 100^{0{,}80} \approx 40$

4 **Calcula sabiendo que** $\boldsymbol{log_5 A = 1{,}8}$ **y** $\boldsymbol{log_5 B = 2{,}4}$**.**

a) $\boldsymbol{log_5 \sqrt[3]{\dfrac{A^2}{25B}}}$ **b)** $\boldsymbol{log_5 \dfrac{5\sqrt{A^3}}{B^2}}$

a) $log_5 \sqrt[3]{\dfrac{A^2}{25B}} = \dfrac{1}{3}\,[2\,log_5 A - log_5 25 - log_5 B] = \dfrac{1}{3}\,[2 \cdot 1{,}8 - 2 - 2{,}4] = \dfrac{-0{,}8}{3} \approx -0{,}27$

b) $log_5 \dfrac{5\sqrt{A^3}}{B^2} = log_5 5 + \dfrac{3}{2}\,log_5 A - 2\,log_5 B = 1 + \dfrac{3}{2} \cdot 1{,}8 - 2 \cdot 2{,}4 = 1 + 2{,}7 - 4{,}8 = -1{,}1$

5 **Averigua la relación que hay entre** $\boldsymbol{x}$ **e** $\boldsymbol{y}$**, sabiendo que se verifica:**

$\boldsymbol{ln\, y = 2x - ln\, 5}$

$ln\, y = 2x - ln\, 5 \ \to\ ln\, y = ln\, e^{2x} - ln\, 5$

$ln\, y = ln\, \dfrac{e^{2x}}{5} \ \to\ y = \dfrac{e^{2x}}{5}$

5 Expresión decimal de los números reales. Números aproximados

Página 37

1 ¿Verdadero o falso?

I. El precio de esta vivienda es, aproximadamente, de 390 000 €, con un error menor que 10 000 €.

II. El precio del menú del día es, aproximadamente, de 12 €, con un error menor que 1 €.

En I el error absoluto es mucho mayor que en II, pero el error relativo es menor.

I. E.R. < $\frac{10000}{390000}$ = 2,5641 · 10^{-2} = 0,025641 → E.R. < 2,6 %

II. E.R. < $\frac{1}{12}$ = 8,3333 · 10^{-2} = 0,08333 → E.R. < 8,3 %

El error absoluto nos lo dicen y es mayor en I que en II. Hemos calculado el error relativo en cada caso y vemos que es verdadera la afirmación.

2 Di una cota del error absoluto y otra del error relativo en las siguientes mediciones:

a) Daniel le dice a su hermana María que la superficie de su casa es de 96,4 m^2.

b) Por la gripe se han perdido 37 millones de horas de trabajo.

c) Juana gana unos 19 000 € al año.

a) E.A. < 0,05 m^2; E.R. < $\frac{0,05}{96,4}$ = 5,1867 · 10^{-4} = 0,00051867 → E.R. < 0,05 %

b) E.A. < 0,5 millones de horas = 500 000 horas

E.R. < $\frac{0,5}{37}$ < 0,014 = 1,4 %

c) — Si suponemos que los tres ceros finales se han utilizado para poder expresar la cantidad (es decir, que se trata de 19 mil €, redondeando a los "miles de euros"), entonces:

E.A. < 0,5 miles de € = 500 € E.R. < $\frac{\mathbf{0,5}}{\mathbf{19}}$ < 0,027 = 2,7 %

— Si suponemos que es 19 000 € exactamente:

E.A. < 0,5 € E.R. < $\frac{0,5}{19000}$ < 0,000027 = 0,0027 %

Página 38

3 Calcula en notación científica sin usar la calculadora:

a) (800 000 : 0,0002) · 0,5 · 10^{12}

b) 0,486 · 10^{-5} + 93 · 10^{-9} – 6 · 10^{-7}

a) (800 000 : 0,0002) · 0,5 · 10^{12} = $((8 \cdot 10^5) : (2 \cdot 10^{-4})) \cdot 5 \cdot 10^{11}$ =

= $(4 \cdot 10^9) \cdot 5 \cdot 10^{11} = 20 \cdot 10^{20} = 2 \cdot 10^{21}$

b) 0,486 · 10^{-5} + 93 · 10^{-9} – 6 · 10^{-7} = 48,6 · 10^{-7} + 0,93 · 10^{-7} – 6 · 10^{-7} =

= 43,53 · 10^{-7} = 4,353 · 10^{-6}

4 Opera con la calculadora:

a) (3,87 · 10^{15} · 5,96 · 10^{-9}) : (3,941 · 10^{-6})

b) 8,93 · 10^{-10} + 7,64 · 10^{-10} – 1,42 · 10^{-9}

a) (3,87 · 10^{15} · 5,96 · 10^{-9}) : (3,941 · 10^{-6}) ≈ 5,85 · 10^{12}

b) 8,93 · 10^{-10} + 7,64 · 10^{-10} – 1,42 · 10^{-9} = 2,37 · 10^{-10}

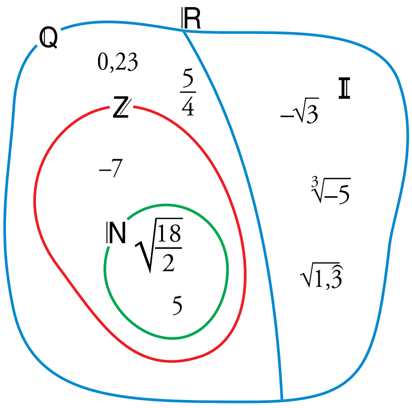
Ejercicios y problemas resueltos

Página 39

1. Conjuntos numéricos

Hazlo tú. Clasifica los siguientes números:

$$5;\ -7;\ 0{,}23;\ \frac{5}{4};\ \sqrt{\frac{18}{2}};\ -\sqrt{3};\ \sqrt[3]{-5};\ \sqrt{1{,}\widehat{3}}$$



2. Intervalos y valor absoluto

Hazlo tú. Indica, en cada caso, qué números cumplen estas condiciones:

a) $|x+2| \geq 5$ **b)** $|4-x| < 3$

a) $|x+2| \geq 5 \rightarrow \begin{cases} x+2 \geq 5 \\ x+2 \leq -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -7 \end{cases} \rightarrow x \in (-\infty, -7] \cup [3, +\infty)$

b) $|4-x| < 3 \rightarrow -3 < 4-x < 3 \rightarrow -7 < -x < -1$

Cambiamos de signo:

$1 < x < 7 \rightarrow x \in (1, 7)$

3. Simplificación de radicales

Hazlo tú. Simplifica.

a) $\sqrt[7]{x^{21}}$ **b)** $\sqrt[3]{27} : \sqrt[6]{81}$ **c)** $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}}$

a) $\sqrt[7]{x^{21}} = \sqrt[7]{x^{7\cdot 3}} = x^3$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[6]{81}} = \dfrac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[6]{3^4}} = \dfrac{\sqrt[6]{3^{3\cdot 2}}}{\sqrt[6]{3^4}} = \dfrac{\sqrt[6]{3^6}}{\sqrt[6]{3^4}} = \sqrt[6]{3^{6-4}} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[12]{x^2} = \sqrt[6]{x}$

Página 40

4. Operaciones con radicales

Hazlo tú. Simplifica:

a) $\sqrt{32} + \frac{1}{2}\sqrt{50} - \frac{5}{6}\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{8ab} \cdot \sqrt[3]{a^2 b}$

a) Factorizamos y sacamos factores de las raíces:

$$\sqrt{32} + \frac{1}{2}\sqrt{50} - \frac{5}{6}\sqrt{2} = \sqrt{2^5} + \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 5^2} - \frac{5}{6}\sqrt{2} = 2^2\sqrt{2} + \frac{5}{2}\sqrt{2} - \frac{5}{6}\sqrt{2} = \frac{17}{3}\sqrt{2}$$

b) Reducimos los radicales a índice común y sacamos factores de las raíces:

$$\sqrt{8ab} \cdot \sqrt[3]{a^2 b} = \sqrt[6]{8^3 a^3 b^3} \cdot \sqrt[6]{(a^2)^2 b^2} = 2\sqrt{2}\sqrt[6]{a^3 b^3}\sqrt[6]{a^4 b^2} = 2\sqrt{2}\sqrt[6]{a^7 b^5} = 2\sqrt{2}\,a\sqrt[6]{ab^5}$$

5. Racionalización de denominadores

Hazlo tú. Racionaliza:

a) $\dfrac{2}{\sqrt[4]{5^3}}$ **b)** $\dfrac{11}{2\sqrt{5}+3}$

a) Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt[4]{5}$:

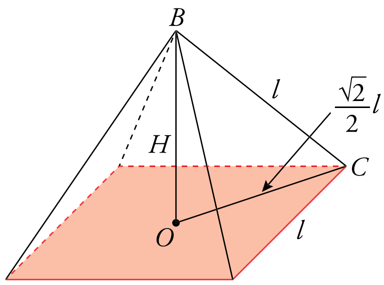
$$\frac{2}{\sqrt[4]{5^3}}\cdot\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{5}}=\frac{2\sqrt[4]{5}}{5}$$

b) Multiplicamos numerador y denominador por $2\sqrt{5}-3$:

$$\frac{11}{2\sqrt{5}+3}=\frac{11\,(2\sqrt{5}-3)}{(2\sqrt{5}+3)\,(2\sqrt{5}-3)}=\frac{11\,(2\sqrt{5}-3)}{4\cdot 5-9}=2\sqrt{5}-3$$

6. Problemas con radicales

Hazlo tú. El volumen de una pirámide cuadrangular regular, cuyas caras laterales son triángulos equiláteros, es $\dfrac{256}{3}\sqrt{2}$. Halla la longitud de su arista.



La arista de la cara triangular es igual a la arista de la base.

$$V_{Pirámide}=\frac{1}{3}A_{base}\cdot H=\frac{1}{3}l^2\cdot H=\frac{256}{3}\sqrt{2}$$

La distancia $\overline{OC}$ es la mitad de la diagonal del cuadrado $\overline{OC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}l$.

La arista es la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos la altura H y el lado $\overline{OC}$.

Por ser la arista igual al lado de la base, $H^2=l^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}l\right)^2=\dfrac{1}{2}l^2$

$$V_{Pirámide}=\frac{1}{3}l^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}l=\frac{1}{6}\sqrt{2}\,l^3$$

Por tanto, $\dfrac{1}{6}\sqrt{2}\,l^3=\dfrac{256}{3}\sqrt{2}\ \Rightarrow\ l^3=256\cdot 2=512\ \Rightarrow\ l=\sqrt[3]{512}=8$

Página 41

7. Definición de logaritmo

Hazlo tú. Calcula x:

a) $\boldsymbol{log_x 5=1/2}$ **b)** $\boldsymbol{log\, x^2=-4}$

a) $log_x 5=\dfrac{1}{2}\ \rightarrow\ x^{1/2}=5\ \rightarrow\ x=5^2\ \rightarrow\ x=25$

b) $log\, x^2=-4\ \rightarrow\ 10^{-4}=x^2\ \rightarrow\ \dfrac{1}{10^4}=x^2\ \rightarrow\ x=\sqrt{\dfrac{1}{10^4}}\ \rightarrow\ x=\dfrac{1}{10^2}=10^{-2}$

8. Logaritmos sin calculadora

Hazlo tú. Halla el valor de $log_3 0,\widehat{3}$ y de $log_2 \sqrt{\frac{1}{8}}$ sin utilizar la calculadora.

$0,\widehat{3} = \frac{1}{3} = 3^{-1} \to log_3 3^{-1} = -1$

$log_2 \sqrt{\frac{1}{8}} = log_2 \sqrt{\frac{1}{2^3}} = log_2 2^{-3/2} = -\frac{3}{2}$

9. Propiedades de los logaritmos

Hazlo tú. Si $ln\ k = -1{,}8$, calcula:

a) $ln\ (k^2\sqrt{e})$ **b) $ln\left(\frac{k}{e}\right)^3$**

a) $ln\,(k^2\sqrt{e}) = ln\,k^2 + ln\sqrt{e} = 2\,ln\,k + ln\,e^{1/2} = 2\cdot(-1,8) + \frac{1}{2} = -3,1$

b) $ln\left(\frac{k}{e}\right)^3 = 3\,ln\,\frac{k}{e} = 3\,(ln\,k - ln\,e) = 3\,(-1,8 - 1) = -8,4$

10. Propiedades de los logaritmos

Hazlo tú. Calcula x en estos casos:

a) $ln\ 3^{x-1} = 5$ **b) $2\ log\ x - log\ 4 = 2\ log\ 3$**

a) $ln\ 3^{x-1} = 5$

Aplicamos la propiedad de los logaritmos: $log_a m^n = nlog_a m$.

$(x-1)\,ln\,3 = 5 \to x - 1 = \frac{5}{ln\,3} \to x = \frac{5}{ln\,3} + 1 \to x = 5,5512$

b) $2log\ x - log\ 4 = 2log\ 3$

Aplicamos las propiedades de los logaritmos:

$log\ x^2 - log\ 4 = log\ 3^2$

$log\ \frac{x^2}{4} = log\ 9;\ \frac{x^2}{4} = 9$

Soluciones: $x = -6$, $x = 6$

Pero como no se pueden tomar logaritmos de números negativos, la única solución válida es $x = 6$.

Página 42

11. Errores y notación científica

Hazlo tú. Expresa el resultado de estas operaciones en notación científica y acota el error absoluto y el error relativo cometidos:

a) $(15\,000\,000 : 0{,}0003)^2 \cdot (0{,}008)^3$

b) $1{,}5 \cdot 10^{-8} + 2{,}4 \cdot 10^{-7} - (1{,}2 \cdot 10^{-4})^2$

a) $(15\,000\,000 : 0,0003)^2 \cdot (0,008)^3 = \left(\frac{15\cdot 10^6}{3\cdot 10^{-4}}\right)^2 \cdot (8\cdot 10^{-3})^3 =$

$= \frac{(15)^2\cdot 10^{12}}{9\cdot 10^{-8}}\cdot 8^3\cdot 10^{-9} = \frac{(15)^2\cdot 8^3}{9} 10^{12+8-9} = 12\,800\cdot 10^{11} = 1,28\cdot 10^{15}$

E.A. $< 0,005 \cdot 10^{15} = 5 \cdot 10^{12}$

E.R. $< \frac{5\cdot 10^{12}}{1,28\cdot 10^{15}} = 0,0039 = 0,39\ \%$

b) $1{,}5 \cdot 10^{-8} + 2{,}4 \cdot 10^{-7} - (1{,}2 \cdot 10^{-4})^2 = 1{,}5 \cdot 10^{-8} + 2{,}4 \cdot 10^{-7} - 1{,}44 \cdot 10^{-8} =$

$= 1{,}5 \cdot 10^{-8} + 24 \cdot 10^{-8} - 1{,}44 \cdot 10^{-8} = (1{,}5 + 24 - 1{,}44) \cdot 10^{-8} = 24{,}06 \cdot 10^{-8} = 2{,}406 \cdot 10^{-7}$

E.A. $< 0{,}0005 \cdot 10^{-7} = 5 \cdot 10^{-11}$

E.R. $< \dfrac{5 \cdot 10^{-11}}{2{,}406 \cdot 10^{-7}} = 2{,}078 \cdot 10^{-4} = 0{,}0002078 = 0{,}02\,\%$

12. Repartos proporcionales

Hazlo tú. Reparte 1 500 € en partes inversamente proporcionales a 15, 20 y 25.

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{20} + \frac{1}{25} = \frac{47}{300}$$

Para 15 $\rightarrow \dfrac{x}{1500} = \dfrac{\frac{1}{15}}{\frac{47}{300}} \rightarrow x = \dfrac{1500 \cdot \frac{1}{15}}{\frac{47}{300}} = \dfrac{30\,000}{47} = 638{,}3$ €

Para 20 $\rightarrow \dfrac{x}{1500} = \dfrac{\frac{1}{20}}{\frac{47}{300}} \rightarrow x = \dfrac{1500 \cdot \frac{1}{20}}{\frac{47}{300}} = \dfrac{22\,500}{47} = 478{,}72$ €

Para 25 $\rightarrow \dfrac{x}{1500} = \dfrac{\frac{1}{25}}{\frac{47}{300}} \rightarrow x = \dfrac{1500 \cdot \frac{1}{25}}{\frac{47}{300}} = \dfrac{18\,000}{47} = 382{,}98$ €

Ejercicios y problemas guiados

Página 43

1. Simplificación de radicales

Simplificar esta expresión:

$$\sqrt{3\sqrt{\frac{\sqrt{12}-\sqrt{3}}{\sqrt{108}}}}$$

$$\sqrt{3\sqrt{\frac{\sqrt{2^2 3}-\sqrt{3}}{\sqrt{2^2 3^3}}}} = \sqrt{3\sqrt{\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}}} = \sqrt{3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}}} = \sqrt{3\sqrt{\frac{1}{6}}} = \sqrt{\sqrt{\frac{3^2}{6}}} = \sqrt[4]{\frac{3^2}{6}} = \sqrt[4]{\frac{3^2}{3\cdot 2}} = \sqrt[4]{\frac{3}{2}}$$

2. Valor de un exponente

Calcular x para que se cumpla la igualdad:

$$3^{x-1} = 173$$

$log_3 3^{x-1} = log_3 173;\ \ (x-1)log_3 3 = log_3 173$

$x - 1 = log_3 173 = 4{,}69;\ \ x = 4{,}69 + 1 = 5{,}69$

3. Extracción de factores de un radical

Extraer fuera del radical los factores que sea posible.

$$\sqrt{4a^2cd + 8abcd + 4b^2cd}$$

$$\sqrt{4a^2cd + 8abcd + 4b^2cd} = \sqrt{cd(4a^2 + 8ab + 4b^2)} = \sqrt{cd(2a+2b)^2} = (2a+2b)\sqrt{cd} = 2(a+b)\sqrt{cd}$$

4. Propiedades de los logaritmos

Averiguar la relación que existe entre M, x e y si sabemos que:

$$\ln M = \frac{1}{4}(2\ln x + 3\ln y - 5\ln 2)$$

$$ln\,M = \frac{1}{4}(2\,ln\,x + 3\,ln\,y - 5\,ln\,2) = \frac{1}{4}(ln\,x^2 + ln\,y^3 - ln\,2^5) = \frac{1}{4}ln\frac{x^2\cdot y^3}{2^5} = ln\sqrt[4]{\frac{x^2\cdot y^3}{2^5}}$$

$$M = \sqrt[4]{\frac{x^2\cdot y^3}{2^5}}$$

5. Cotas de error absoluto y relativo

Acotar el error que se comete al tomar 1,62 como aproximación del número de oro, ϕ.

E.A. $< 0{,}005$

E.R. $< \dfrac{0{,}005}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 3{,}0902\cdot 10^{-3} = 0{,}003$

Corresponde a un error relativo menor que 0,3 %.

Ejercicios y problemas propuestos

Página 44

Para practicar

Números racionales e irracionales

1 **Clasifica los siguientes números indicando a cuáles de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$, pertenecen:**

$\mathbf{5;\ -7;\ \frac{5}{4};\ \sqrt{\frac{18}{2}};\ -\sqrt{3};\ \sqrt[3]{-5};\ 4,\widehat{7};\ \frac{\pi}{2}}$

$5, \sqrt{\frac{18}{2}} \in \mathbb{N}$ $\quad -7 \in \mathbb{Z}$ $\quad \frac{5}{4}, 4,\widehat{7} \in \mathbb{Q}$ $\quad -\sqrt{3}, \sqrt[3]{-5}, \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$

2 **¿Cuáles de estos números son irracionales? Expresa como fracción los que sea posible.**

a) $\mathbf{3,181818...}$ **b)** $\mathbf{\sqrt{1,\widehat{7}}}$ **c)** $\mathbf{\sqrt{8}}$

d) $\mathbf{1,020020002...}$ **e)** $\mathbf{-4,0333...}$ **f)** $\mathbf{\sqrt[3]{81}}$

g) $\mathbf{1,3999...}$ **h)** $\mathbf{2\pi}$

a) $3,181818... = \frac{318-3}{99} = \frac{315}{99} = \frac{35}{11}$

b) $\sqrt{1,\widehat{7}} = \sqrt{\frac{17-1}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$

c) $\sqrt{8}$ Irracional.

d) $1,020020002...$ Irracional.

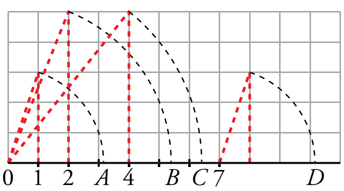
e) $-4,0333... = -\frac{403-40}{90} = -\frac{121}{30}$

f) $\sqrt[3]{81}$ Irracional.

g) $1,3999... = \frac{139-13}{90} = \frac{7}{5}$

h) 2π Irracional.

3



¿Qué números irracionales representan los puntos: *A*, *B*, *C* y *D*? Justifica la respuesta.

$A = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$ $\quad B = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$ $\quad C = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41}$ $\quad D = 7 + \sqrt{1^2+3^2} = 7+\sqrt{10}$

4 **Indica cuál, de cada par de números, es mayor:**

a) $\mathbf{\frac{140}{99}}$ **y** $\mathbf{\sqrt{2}}$ **b)** $\mathbf{0,52\widehat{6}}$ **y** $\mathbf{0,\widehat{526}}$ **c)** $\mathbf{4,\widehat{89}}$ **y** $\mathbf{2\sqrt{6}}$ **d)** $\mathbf{-2,098}$ **y** $\mathbf{-2,1}$

Redondea a las centésimas los números anteriores.

a) $\sqrt{2}$ b) $0,52\widehat{6}$ c) $4,\widehat{89}$ d) $2,098$

Intervalos y valor absoluto

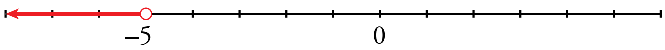
5 **Representa gráficamente y expresa como intervalo o como semirrecta los números que cumplen la condición dada en cada caso.**

a) ***x*** **es menor que –5.** **b) 3 es menor o igual que** ***x*****.**

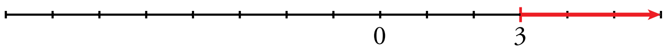
c) ***x*** **está comprendido entre –5 y 1.** **d)** ***x*** **está entre –2 y 0, ambos incluidos.**

e) ***x*** **es mayor o igual que –3 y menor que 2.**

a) $x < -5$; $(-\infty, -5)$



b) $3 \le x$; $[3, +\infty)$



c) $-5 < x < 1$; $(-5, 1)$

d) $-2 \le x \le 0$; $[-2, 0]$

e) $[-3, 2)$; $-3 \le x < 2$

6 **Escribe la desigualdad que verifica todo número** ***x*** **que pertenece a estos intervalos o semirrectas:**

a) $[-2, 7]$ **b)** $[13, +\infty)$ **c)** $(-\infty, 0)$

d) $(-3, 0]$ **e)** $[3/2, 6)$ **f)** $(0, +\infty)$

a) $-2 \le x \le 7$ b) $x \ge 13$ c) $x < 0$

d) $-3 < x \le 0$ e) $\dfrac{3}{2} \le x < 6$ f) $0 < x < +\infty$

7 **Expresa en forma de intervalo los números que cumplen cada una de estas expresiones:**

a) $|x| < 7$ **b)** $|x| \ge 5$ **c)** $|2x| < 8$

d) $|x - 1| \le 6$ **e)** $|x + 2| > 9$ **f)** $|x - 5| \ge 1$

a) $(-7, 7)$ b) $[-\infty, -5] \cup [5, +\infty]$ c) $(-4, 4)$

d) $[-5, 7]$ e) $(-11, 7)$ f) $(-\infty, 4] \cup [6, +\infty)$

8 **Escribe mediante intervalos los posibles valores de** ***x*** **para que se pueda calcular la raíz en cada caso.**

a) $\sqrt{x-4}$ **b)** $\sqrt{2x+1}$ **c)** $\sqrt{-x}$

d) $\sqrt{3-2x}$ **e)** $\sqrt{-x-1}$ **f)** $\sqrt{1+\dfrac{x}{2}}$

a) $x - 4 \ge 0 \Rightarrow x \ge 4$; $[4, +\infty)$

b) $2x + 1 \ge 0 \Rightarrow 2x \ge -1 \Rightarrow x \ge -\dfrac{1}{2}$; $\left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right]$

c) $-x \ge 0 \Rightarrow x \le 0$; $(-\infty, 0]$

d) $3 - 2x \ge 0 \Rightarrow 3 \ge 2x \Rightarrow x \le$; $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right]$

e) $-x - 1 \ge 0 \Rightarrow -1 \ge x$; $(-\infty, -1]$

f) $1 + \dfrac{x}{2} \ge 0 \Rightarrow 2 + x \ge 0 \Rightarrow x \ge -2$; $[-2, +\infty)$

9 **Expresa como un único intervalo.**

a) $(1, 6] \cup [2, 5)$ **b)** $[-1, 3) \cup (0, 3]$ **c)** $(1, 6] \cap [2, 7)$

d) $[-1, 3) \cap (0, 4)$ **e)** $[-3, 2] \cap [0, 5]$ **f)** $[2, +\infty) \cap (0, 10)$

a) $(1, 6] \cup [2, 5) = (1, 6]$ b) $[-1, 3) \cup (0, 3] = [-1, 3]$

c) $(1, 6] \cap [2, 7) = [2, 6]$ d) $[-1, 3) \cap (0, 4) = (0, 3)$

e) $[-3, 2] \cap [0, 5] = [0, 2]$ f) $[2, +\infty) \cap (0, 10) = [2, 10)$

10 **Se llama entorno de centro a y radio r al intervalo $(a - r, a + r)$.**

a) Expresa como intervalos los siguientes entornos: centro 2 y radio 0,25; centro –1 y radio 2.

b) Describe como entornos los siguientes intervalos: $I_1 = (-3, 5)$; $I_2 = (-6, -4{,}4)$.

a) Centro 2 y radio 0,25 $\rightarrow$ $(2 - 0{,}25;\ 2 + 0{,}25) = (1{,}75;\ 2{,}25)$

Centro –1 y radio 2 $\rightarrow$ $(-1 - 2, -1 + 2) = (-3, 1)$

b) $I_1 = (-3, 5)$; centro: $\dfrac{-3+5}{2} = 1$; radio $= 5 - 1 = 4$

I_1 es un entorno de centro 1 y radio 5.

$I_2 = (-6, -4{,}4)$; centro: $\dfrac{-4{,}4+(-6)}{2} = -5{,}2$; radio $= -4{,}4 - (-5{,}2) = 0{,}8$

I_2 es un entorno de centro –5,2 y radio 0,8.

Potencias

11 **Expresa los siguientes radicales mediante potencias de exponente fraccionario y simplifica:**

a) $\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt{a}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$

a) $a^{2/5} \cdot a^{1/2} = a^{9/10} = \sqrt[10]{a^9}$

b) $\dfrac{x^{2/3}}{x^{1/2}} = x^{1/6} = \sqrt[6]{x}$

c) $a^{-3/4} = \sqrt[4]{a^{-3}}$

12 **Resuelve, sin utilizar calculadora:**

a) $\sqrt[5]{32}$ **b)** $\sqrt[3]{343}$ **c)** $\sqrt[4]{625}$

d) $\sqrt{0{,}25}$ **e)** $\sqrt[3]{8^4}$ **f)** $\sqrt[3]{0{,}001}$

a) $\sqrt[5]{2^5} = 2$ b) $\sqrt[3]{7^3} = 7$ c) $\sqrt[4]{5^4} = 5$

d) $\sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$ e) $\sqrt[3]{2^{12}} = 2^4 = 16$ f) $\sqrt[3]{0{,}1^3} = 0{,}1$

13 **Expresa como una potencia de base 2:**

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **b)** $(-32)^{1/5}$ **c)** $(\sqrt[8]{2})^4$

a) $2^{-1/2}$ b) $(-2^5)^{1/5} = -2$ c) $2^{4/8} = 2^{1/2}$

14 **Calcula utilizando potencias de base 2, 3 y 5:**

a) $4 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \left(-\dfrac{3}{2}\right)^3$ **b)** $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{2}{9}\right)^{-1} \cdot \dfrac{1}{8}$

c) $\dfrac{(-5)^3 \cdot (-8)^3 \cdot (-9)^2}{15^2 \cdot 20^4}$ **d)** $\dfrac{(-30)^{-1} \cdot 15^2}{10^3}$

a) $2^2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{(-3)^3}{2^3} = \dfrac{-3^2}{2} = \dfrac{-9}{2}$

b) $\dfrac{1}{2^4} \cdot \dfrac{3^2}{2} \cdot \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{3^2}{2^8} = \dfrac{9}{256}$

c) $\dfrac{(-5)^3 \cdot (-2^3)^3 \cdot (-3^2)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot (2^2 \cdot 5)^4} = \dfrac{5^3 \cdot 2^9 \cdot 3^4}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^8 \cdot 5^4} = \dfrac{2 \cdot 3^2}{5^3} = \dfrac{18}{125}$

d) $\dfrac{3^2 \cdot 5^2}{-2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot 5^3} = -\dfrac{3}{5^2 \cdot 2^4} = \dfrac{-3}{400}$

15 **Expresa en forma de potencia, efectúa las operaciones y simplifica:**

a) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3}\cdot a^{-1}}{a\sqrt{a}}$

b) $16^{1/4}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[6]{4}}$

a) $\dfrac{a^{3/4}\cdot a^{-1}}{a\cdot a^{1/2}} = a^{-7/4} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{a^7}}$

b) $(2^4)^{1/4}\cdot(2^2)^{-1/3}\cdot(2^2)^{-1/6} = 2\cdot 2^{-2/3}\cdot 2^{-1/3} = 2^0 = 1$

16 **Simplifica, utilizando las propiedades de las potencias:**

a) $\dfrac{3^6\cdot 2^5\cdot 5^2}{9^3\cdot 4^3\cdot 5}$

b) $\dfrac{3^4\cdot 16\cdot 9^{-1}}{5^{-1}\cdot 3^5}$

c) $\dfrac{15^2\cdot 8^{-1}}{6^3\cdot 10^2}$

d) $\dfrac{a^{-3}\cdot b^{-4}\cdot c^7}{a^{-5}\cdot b^2\cdot c^{-1}}$

a) $\dfrac{3^6\cdot 2^5\cdot 5^2}{3^6\cdot 2^6\cdot 5} = \dfrac{5}{2}$

b) $\dfrac{3^4\cdot 2^4\cdot 3^{-2}}{5^{-1}\cdot 3^5} = \dfrac{2^4\cdot 5}{3^3} = \dfrac{80}{27}$

c) $\dfrac{3^2\cdot 5^2\cdot 2^{-3}}{2^3\cdot 3^3\cdot 2^2\cdot 5^2} = \dfrac{1}{2^8\cdot 3} = \dfrac{1}{768}$

d) $\dfrac{c^7\, a^5\, c}{a^3\, b^4\, b^2} = \dfrac{a^2\, c^8}{b^6}$

Página 45

Radicales

17 **Introduce los factores dentro de cada raíz.**

a) $2\sqrt[3]{3}$

b) $4\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$

c) $\dfrac{2}{x}\sqrt{\dfrac{3x}{8}}$

d) $\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{\dfrac{25}{9}}$

e) $2\sqrt[4]{4}$

f) $\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{15}$

a) $\sqrt[3]{3\cdot 2^3} = \sqrt[3]{24}$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{4^3}{4}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$

c) $\sqrt{\dfrac{2^2\cdot 3x}{x^2\cdot 2^3}} = \sqrt{\dfrac{3}{2x}}$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{3^3\cdot 5^2}{5^3\cdot 3^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{3}{5}}$

e) $\sqrt[4]{2^4\cdot 2^2} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$

f) $\sqrt[3]{\dfrac{3\cdot 5}{5^3}} = \sqrt[3]{\dfrac{3}{5^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{3}{25}}$

18 **Saca de la raíz el factor que puedas.**

a) $\sqrt[3]{16}$

b) $4\sqrt{8}$

c) $\sqrt{1000}$

d) $\sqrt[3]{8a^5}$

e) $\sqrt{\dfrac{125a^2}{16b}}$

f) $\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}}$

g) $\sqrt{\dfrac{16}{a^3}}$

h) $\sqrt{4a^2+4}$

i) $\sqrt{\dfrac{a}{9}+\dfrac{a}{16}}$

a) $\sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$

b) $4\sqrt{2^3} = 4\cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

c) $\sqrt{2^3\cdot 5^3} = 10\sqrt{10}$

d) $\sqrt[3]{2^3\cdot a^5} = 2a\sqrt[3]{a^2}$

e) $\sqrt{\dfrac{5^3\cdot a^2}{2^4\cdot b}} = \dfrac{5a}{4}\sqrt{\dfrac{5}{b}}$

f) $\sqrt{\dfrac{13}{36}} = \dfrac{1}{6}\sqrt{13}$

g) $\dfrac{4}{a}\sqrt{\dfrac{1}{a}}$

h) $\sqrt{4(a^2+1)} = 2\sqrt{a^2+1}$

i) $\sqrt{\dfrac{25a}{16\cdot 9}} = \dfrac{5\sqrt{a}}{12}$

19 **Simplifica los siguientes radicales:**

a) $\sqrt[3]{24}$ **b)** $\sqrt[6]{27}$ **c)** $\sqrt[3]{-108}$

d) $\sqrt[12]{64y^3}$ **e)** $\sqrt[4]{\dfrac{81}{64}}$ **f)** $\sqrt[8]{625} : \sqrt[4]{25}$

g) $\sqrt[6]{0,027}$ **h)** $\sqrt[8]{0,0016}$ **i)** $\sqrt[4]{1+\dfrac{9}{16}}$

a) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[6]{3^3} = 3^{3/6} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$

c) $-\sqrt[3]{3^3 \cdot 2^2} = -3\sqrt[3]{2^2}$

d) $\sqrt[12]{2^6 \cdot y^3} = \sqrt[4]{2^2 \cdot y} = \sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt[4]{y} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{y}$

e) $\sqrt[4]{\dfrac{3^4}{2^6}} = \dfrac{3}{\sqrt{2^3}} = \dfrac{3}{2\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

f) $\sqrt[8]{5^4} : \sqrt[4]{5^2} = \sqrt{5} : \sqrt{5} = 1$

g) $\sqrt[6]{0,027} = \sqrt[6]{10^{-3}3^3} = \sqrt[6]{\dfrac{3^3}{10^3}} = \sqrt{\dfrac{3}{10}}$

h) $\sqrt[6]{0,0016} = \sqrt[8]{10^{-4}2^4} = \sqrt[8]{\dfrac{2^4}{10^4}} = \sqrt{\dfrac{2}{10}}$

i) $\sqrt[4]{1+\dfrac{9}{16}} = \sqrt[4]{\dfrac{25}{16}} = \sqrt[4]{\dfrac{5^2}{2^4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

20 **Reduce a índice común y ordena de menor a mayor.**

a) $\sqrt[4]{5},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{6},\ \sqrt[3]{4}$ **c)** $\sqrt[4]{6},\ \sqrt[5]{10}$ **d)** $\sqrt[4]{20},\ \sqrt[3]{9},\ \sqrt[6]{100}$

a) $\sqrt[12]{5^3},\ \sqrt[12]{3^4},\ \sqrt[12]{2^6};\ \sqrt[12]{125},\ \sqrt[12]{81},\ \sqrt[12]{64} \ \rightarrow\ \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5}$

b) $\sqrt[6]{216},\ \sqrt[6]{16} \ \rightarrow\ \sqrt[3]{4} < \sqrt{6}$

c) $\sqrt[20]{7776},\ \sqrt[20]{10\,000} \ \rightarrow\ \sqrt[4]{6} < \sqrt[5]{10}$

d) $\sqrt[12]{20^3},\ \sqrt[12]{9^4},\ \sqrt[12]{100^2}$; tenemos $\sqrt[12]{10\,000};\ \sqrt[12]{6561};\ \sqrt[12]{8000} \ \rightarrow\ \sqrt[3]{9} < \sqrt[6]{100} < \sqrt[4]{20}$

21 **Realiza la operación y simplifica, si es posible.**

a) $4\sqrt{27} \cdot 5\sqrt{6}$ **b)** $2\sqrt{\dfrac{4}{3}} \cdot \sqrt{\dfrac{27}{8}}$ **c)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{8}}$

d) $(\sqrt[3]{12})^2$ **e)** $(\sqrt[6]{32})^2$ **f)** $\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{3}$

a) $20\sqrt{27 \cdot 6} = 20\sqrt{3^3 \cdot 2 \cdot 2} = 20\sqrt{2 \cdot 3^4} = 180\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{\dfrac{4 \cdot 27}{3 \cdot 8}} = 2\sqrt{\dfrac{9}{2}} = 6\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

c) $\sqrt{\dfrac{2}{8}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

d) $\left(\sqrt[3]{2^2 \cdot 3}\right)^2 = \sqrt[3]{2^4 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{2 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{18}$

e) $\left(\sqrt[6]{2^5}\right)^3 = \sqrt[6]{2^{15}} = \sqrt{2^5} = 2^2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

f) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} : \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3} : \sqrt[3]{3} = 2$

22 **Efectúa y simplifica, si es posible.**

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}$ **b)** $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2}} \cdot \sqrt{a}$ **c)** $\left(\dfrac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3$ **d)** $\sqrt[3]{2\sqrt{3}} : \sqrt{\sqrt[3]{4}}$

a) $\sqrt[6]{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt[6]{108}$

b) $\sqrt[3]{a} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a}$

c) $\left(\sqrt[6]{\dfrac{2^5}{2^9}}\right)^3 = \left(\sqrt[6]{\dfrac{1}{2^4}}\right)^3 = \sqrt[6]{\dfrac{1}{2^{12}}} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{2^2 \cdot 3}} : \sqrt{\sqrt[3]{2^2}} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 3} : \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3}$

23 **Expresa con una única raíz.**

a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4}}$ **b)** $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{8}}$ **c)** $\left(\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[5]{a^4}\right) : \sqrt{a}$

a) $\sqrt[12]{4} = \sqrt[6]{2}$

b) $\sqrt[12]{2^4 \cdot 2^3} = \sqrt[12]{2^7} = \sqrt[12]{128}$

c) $\sqrt[20]{\dfrac{a^{15} \cdot a^{16}}{a^{10}}} = \sqrt[20]{a^{21}} = a\sqrt[20]{a}$

24 **Racionaliza los denominadores y simplifica.**

a) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$ **b)** $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$ **c)** $\frac{\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}}$

d) $\frac{3}{3+\sqrt{3}}$ **e)** $\frac{\sqrt{72}-\sqrt{8}}{\sqrt{6}}$ **f)** $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

a) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2\cdot 3^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{6}}{3\cdot 2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

b) $\frac{2\sqrt[3]{2^2}}{2}=\sqrt[3]{4}$

c) $\frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}{3\cdot 2}=\frac{2-\sqrt{2}}{6}$

d) $\frac{3(3-\sqrt{3})}{9-3}=\frac{9-3\sqrt{3}}{6}=\frac{3(3-\sqrt{3})}{2\cdot 3}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{72}-\sqrt{8}}{\sqrt{6}}$ Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{6}$

$$\frac{\sqrt{72}-\sqrt{8}}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{(\sqrt{72}-\sqrt{8})\sqrt{6}}{6}=\frac{(\sqrt{2^3 3^2}-\sqrt{2^3})\sqrt{6}}{6}=\frac{4\sqrt{12}}{6}=\frac{8\sqrt{3}}{6}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

f) $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ Multiplicamos numerador y denominador por $(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

$$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2}=5\sqrt{3}+5\sqrt{2}$$

25 **Calcula y simplifica.**

a) $5\sqrt{125}+6\sqrt{45}-7\sqrt{20}+\frac{3}{2}\sqrt{80}$

b) $\sqrt[3]{16}+7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{54}-\frac{21}{5}\sqrt[3]{250}$

c) $-\sqrt{54}+3\sqrt{24}-\sqrt{150}+\sqrt{294}$

a) $25\sqrt{5}+18\sqrt{5}-14\sqrt{5}+6\sqrt{5}=35\sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{2^4}+7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2\cdot 3^3}-\frac{21}{5}\sqrt[3]{2\cdot 5^3}=2\sqrt[3]{2}+7\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}-\frac{21}{5}\cdot 5\sqrt[3]{2}=-15\sqrt[3]{2}$

c) $-\sqrt{2\cdot 3^3}+3\sqrt{2^3\cdot 3}-\sqrt{2\cdot 3\cdot 5^2}+\sqrt{2\cdot 3\cdot 7^2}=-3\sqrt{2\cdot 3}+2\cdot 3\sqrt{2\cdot 3}-5\sqrt{2\cdot 3}+7\sqrt{2\cdot 3}=5\sqrt{6}$

26 **Simplifica las siguientes expresiones:**

a) $\sqrt{18}+\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{72}$ **b)** $\sqrt{\frac{2}{5}}-4\sqrt{\frac{18}{125}}+\frac{7}{2}\sqrt{\frac{8}{45}}$ **c)** $\frac{7}{5}\sqrt[3]{81a}-2\sqrt[3]{3a^4}-\frac{\sqrt[3]{3a}}{5}$

a) $\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2^2\cdot 3}-\sqrt{3^3}+\sqrt{2^3\cdot 3^2}=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+6\sqrt{2}=9\sqrt{2}-\sqrt{3}$

b) $\sqrt{\frac{2}{5}}-4\sqrt{\frac{2\cdot 3^2}{5^3}}+\frac{7}{2}\sqrt{\frac{2^3}{3^2\cdot 5}}=\sqrt{\frac{2}{5}}-4\frac{3}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}+\frac{7}{2}\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}=$

$$=\sqrt{\frac{2}{5}}-\frac{12}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}+\frac{7}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}=\left(1-\frac{12}{5}+\frac{7}{3}\right)\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{14}{15}\sqrt{\frac{2}{5}}$$

c) $\frac{7}{5}\sqrt[3]{3^4a}-2\sqrt[3]{3a^4}-\frac{\sqrt[3]{3a}}{5}=\frac{7}{5}3\sqrt[3]{3a}-2a\sqrt[3]{3a}-\frac{\sqrt[3]{3a}}{5}=\left(\frac{21}{5}-2a-\frac{1}{5}\right)\sqrt[3]{3a}=(4-2a)\sqrt[3]{3a}$

27 **Efectúa y simplifica.**

a) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-1)$ **b)** $(\sqrt{5}-\sqrt{6})(\sqrt{5}+\sqrt{6})$ **c)** $(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})^2$ **d)** $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)\sqrt{3}$

a) $\sqrt{12}-\sqrt{2}+\sqrt{18}-\sqrt{3}=2\sqrt{3}-\sqrt{2}+3\sqrt{2}-\sqrt{3}=2\sqrt{2}+\sqrt{3}$

b) $5-6=-1$

c) $20+18-12\sqrt{10}=38-12\sqrt{10}$

d) $(2-1)\sqrt{3}=\sqrt{3}$

28 Racionaliza y simplifica.

a) $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$ b) $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$ c) $\dfrac{1}{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})}$

d) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-2}$ e) $\dfrac{13\sqrt{10}}{\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$ f) $\dfrac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2}$

a) $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 3^2}}=\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\dfrac{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{6}-2}{3\cdot 2}=\dfrac{2(\sqrt{6}-1)}{3\cdot 2}=\dfrac{\sqrt{6}-1}{3}$

b) $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2^2\cdot 3}}=\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{6+\sqrt{6}}{6}=1+\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

c) $\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2(3-5)}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{-4}=-\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}$

d) $\dfrac{3(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\dfrac{3(\sqrt{5}+2)}{5-4}=3(\sqrt{5}+2)=3\sqrt{5}+6$

e) $\dfrac{13\sqrt{10}}{\sqrt{5}-3\sqrt{2}}\cdot\dfrac{(\sqrt{5}+3\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+3\sqrt{2})}=\dfrac{13\sqrt{10}(\sqrt{5}+3\sqrt{2})}{5-9\cdot 2}=\dfrac{65\sqrt{2}+78\sqrt{5}}{-13}=-5\sqrt{2}-6\sqrt{5}$

f) $\dfrac{(3\sqrt{6}+2\sqrt{2})(3\sqrt{3}-2)}{(3\sqrt{3}+2)(3\sqrt{3}-2)}=\dfrac{9\sqrt{18}-6\sqrt{6}+6\sqrt{6}-4\sqrt{2}}{27-4}=\dfrac{9\sqrt{2\cdot 3^2}-4\sqrt{2}}{23}=\dfrac{27\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{23}=\dfrac{23\sqrt{2}}{23}=\sqrt{2}$

29 Efectúa y simplifica.

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

a) $\dfrac{3(\sqrt{3}+\sqrt{2})-2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\dfrac{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}+5\sqrt{2}$

b) $\dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2-(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}=\dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{7}-\sqrt{5})}{7-5}=\dfrac{2\sqrt{7}(-2\sqrt{5})}{2}=-2\sqrt{35}$

Logaritmos

30 Expresa como potencia de la base y calcula aplicando la definición de logaritmo.

a) $log_2\ 1\,024$ b) $log\ 0{,}001$ c) $log_2 \dfrac{1}{64}$

d) $log_{\sqrt{3}}\ 3$ e) $log_3 \sqrt{3}$ f) $log_2 \sqrt{8}$

g) $log_{1/2} \dfrac{2}{\sqrt{2}}$ h) $log_{\pi}\ 1$ i) $ln \dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$

a) $log_2 2^{10}=10$ b) $log\ 10^{-3}=-3$ c) $log_2 2^{-6}=-6$

d) $log_{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^2=2$ e) $log_3 3^{1/2}=\dfrac{1}{2}$ f) $log_2 2^{3/2}=\dfrac{3}{2}$

g) $log_{1/2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1/2}=-\dfrac{1}{2}$ h) 0 i) $ln\ e^{-1/3}=-\dfrac{1}{3}$

31 Calcula la base de estos logaritmos:

a) $log_x 125=3$ b) $log_x \dfrac{1}{9}=-2$ c) $log_x \dfrac{1}{4}=2$

d) $log_x 2=\dfrac{1}{2}$ e) $log_x 0{,}04=-2$ f) $log_x 4=-\dfrac{1}{2}$

a) $x^3=125 \to x=5$ b) $x^{-2}=\dfrac{1}{9} \to x=3$ c) $x^2=\dfrac{1}{4} \to x=\dfrac{1}{2}$

d) $x^{1/2}=2 \to x=4$ e) $x^{-2}=0{,}04 \to x=5$ f) $x^{-1/2}=4 \to x=\dfrac{1}{16}$

32 **Calcula el valor de x en estas igualdades:**

a) $\log 3^x = 2$ **b)** $\log x^2 = -2$ **c)** $7^x = 115$

d) $5^{-x} = 3$ **e)** $\log_7 3x = 0{,}5$ **f)** $3^{2+x} = 172$

a) $x = \dfrac{2}{\log 3} = 4{,}19$ b) $2\log x = -2 \rightarrow x = \dfrac{1}{10}$ c) $x = \dfrac{\log 115}{\log 7} = 2{,}438$

d) $x = -\dfrac{\log 3}{\log 5} = -0{,}683$ e) $7^{0,5} = 3x \rightarrow x = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$ f) $2 + x = \log_3 172 \rightarrow x = \log_3 172 - 2$

33 **Halla con la calculadora y comprueba el resultado mediante potenciación.**

a) $\log \sqrt{148}$ **b)** $\ln (2{,}3 \cdot 10^{11})$ **c)** $\ln (7{,}2 \cdot 10^{-5})$

d) $\log_3 42{,}9$ **e)** $\log_5 1{,}95$ **f)** $\log_2 0{,}034$

a) 1,085

b) $\ln (2{,}3 \cdot 10^{11}) \approx 26{,}16 \rightarrow e^{26,161} \approx 2{,}3 \cdot 10^{11}$

c) $\ln (7{,}2 \cdot 10^{-5}) \approx -9{,}54 \rightarrow e^{-9,54} \approx 7{,}2 \cdot 10^{-5}$

d) $3{,}42 \rightarrow 3^{3,42} \approx 42{,}9$

e) $0{,}41 \rightarrow 5^{0,41} \approx 1{,}95$

f) $-4{,}88 \rightarrow 2^{-4,88} \approx 0{,}034$

Página 46

34 **Desarrolla las siguientes expresiones:**

a) $\log \dfrac{a^2 \sqrt[5]{b^3}}{100c^4}$ **b)** $\ln \dfrac{\sqrt[4]{x^3} \cdot e^5}{\sqrt{y}}$

a) $\log a^2 \sqrt[5]{b^3} - \log 100c^4 = \log a^2 + \log \sqrt[5]{b^3} - \log 10^2 - \log c^4 = 2\log a + \dfrac{3}{5}\log b - 2 - 4\log c$

b) $\ln \dfrac{\sqrt[4]{x^3}\, e^5}{\sqrt{y}} = \ln \sqrt[4]{x^3}\, e^5 - \ln \sqrt{y} = \ln \sqrt[4]{x^3} + \ln e^5 - \ln \sqrt{y} = \dfrac{3}{4}\ln x + 5 - \dfrac{1}{2}\ln y$

35 **Sabiendo que $\log x = 0{,}28$ calcula el valor de:**

a) $\log \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{100}$ **b)** $\log 1\,000x^3$ **c)** $\log \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **d)** $\log 10x + \log \dfrac{1}{x^2}$

a) $\log \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{100} = \log \dfrac{x^{2/3}}{100} = \log x^{2/3} - \log 100 = \dfrac{2}{3}\log x - 2 = \dfrac{2}{3} \cdot 0{,}28 - 2 = -1{,}8133$

b) $\log 1\,000x^3 = \log 1\,000 + \log x^3 = \log 1\,000 + 3\log x = 3 + 3 \cdot 0{,}28 = 3{,}84$

c) $\log \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \log 1 - \log x^{1/2} = 0 - \dfrac{1}{2}\log x = -\dfrac{1}{2} \cdot 0{,}28 = -0{,}14$

d) $\log 10x + \log \dfrac{1}{x^2} = \log 10 + \log x + \log 1 - 2\log x = 1 + 0{,}28 + 0 - 2 \cdot 0{,}28 = 0{,}72$

36 **Halla el valor de x en estas expresiones aplicando las propiedades de los logaritmos:**

a) $\ln x = \ln 17 + \ln 13$ **b)** $\log x = \log 36 - \log 9$

c) $\ln x = 3\ln 5 - 2\ln 10$ **d)** $\log x = 3\log 2 - \dfrac{1}{2}\log 25$

a) $\ln x = \ln (17 \cdot 13) \Rightarrow x = 17 \cdot 13 = 221$

b) $\log x = \log \dfrac{36}{9} \Rightarrow x = \dfrac{36}{9} = 4$

c) $\ln x = \ln 5^3 - \ln 10^2;\ \ln x = \ln \dfrac{5^3}{10^2};\ x = \dfrac{5^3}{5^2 \cdot 2^2};\ x = \dfrac{5}{2^2} = \dfrac{5}{4}$

d) $\log x = \log 2^3 - \log 25^{1/2};\ \log x = \log 2^3 - \log 5;\ \log x = \log \dfrac{8}{5};\ x = \dfrac{8}{5}$

37 **Si $log\ k = x$, escribe en función de x.**

a) $log\ 100k$

b) $log\ \dfrac{k}{1000}$

c) $log\ k^3$

d) $log\ \sqrt[3]{10k}$

e) $log\ \dfrac{1}{k}$

f) $(log\ k)^{1/2}$

a) $log\ 100 + log\ k = 2 + x$

b) $log\ k - log\ 1000 = x - 3$

c) $3log\ k = 3x$

d) $\dfrac{1}{3}(log\ 10 + log\ k) = \dfrac{1}{3}(1 + x)$

e) $log\ 1 - log\ k = 0 - x = -x$

f) $\sqrt{x}$

38 **Averigua, en cada caso, la relación entre x, y, z.**

a) $log\ z = 2\ log\ x - log\ y$

b) $log\ z = 2 - log\ x - \dfrac{1}{2}\ log\ y$

c) $log\ z = 1 - \dfrac{1}{2}\ (log\ x - log\ y)$

d) $ln\ z = 1 - 2\ ln\ x + 2\ ln\ y$

a) $log\ z = log\ x^2 - log\ y;\ \ log\ z = log\ \dfrac{x^2}{y};\ \ z = \dfrac{x^2}{y}$

b) $log\ z = log\ 10^2 - log\ x - log\ \sqrt{y};\ \ log\ z = log\ \dfrac{100}{x\sqrt{y}};\ \ z = \dfrac{100}{x\sqrt{y}}$

c) $log\ z = log\ 10 - \dfrac{1}{2}\ log\dfrac{x}{y};\ \ log\ z = log\ 10 - log\sqrt{\dfrac{x}{y}};\ \ log\ z = log\dfrac{10}{\sqrt{\dfrac{x}{y}}};\ \ z = \dfrac{10\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

d) $ln\ z = ln\ e - ln\ x^2 + ln\ y^2;\ \ ln\ z = ln\dfrac{e \cdot y^2}{x^2};\ \ z = \dfrac{e \cdot y^2}{x^2}$

Notación científica y errores

39 **Efectúa y da el resultado en notación científica con tres cifras significativas. Determina también, en cada caso, una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.**

a) $\dfrac{(3,12 \cdot 10^{-5} + 7,03 \cdot 10^{-4})\ 8,3 \cdot 10^8}{4,32 \cdot 10^3}$

b) $\dfrac{(12,5 \cdot 10^7 - 8 \cdot 10^9)\ (3,5 \cdot 10^{-5} + 185)}{9,2 \cdot 10^6}$

c) $\dfrac{5,431 \cdot 10^3 - 6,51 \cdot 10^4 + 385 \cdot 10^2}{8,2 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-4}}$

a) $1,41 \cdot 10^2$; E.A. $< 0,005 \cdot 10^2 = 0,5$

E.R. $< \dfrac{0,5}{141} < 0,00355$

b) $-1,58 \cdot 10^5$; E.A. $< 0,005 \cdot 10^5 = 5 \cdot 10^2$

E.R. $< \dfrac{5 \cdot 10^2}{1,58 \cdot 10^5} < 3,16 \cdot 10^{-3}$

c) $-2,65 \cdot 10^6$; E.A. $< 0,005 \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^3$

E.R. $< \dfrac{5 \cdot 10^3}{2,65 \cdot 10^6} < 1,89 \cdot 10^{-3}$

40 **Expresa en notación científica y calcula:** $\dfrac{60\,000^3 \cdot 0,00002^4}{100^2 \cdot 72\,000\,000 \cdot 0,0002^5}$

$$\frac{(6 \cdot 10^4)^3 \cdot (2 \cdot 10^{-5})^4}{10^4 \cdot 7,2 \cdot 10^7 \cdot (2 \cdot 10^{-4})^5} = 150$$

41 Ordena de mayor a menor los números de cada apartado. Para ello, pasa a notación científica los que no lo estén.

a) $3{,}27 \cdot 10^{13}$; $85{,}7 \cdot 10^{12}$; $453 \cdot 10^{11}$

b) $1{,}19 \cdot 10^{-9}$; $0{,}05 \cdot 10^{-7}$; $2000 \cdot 10^{-12}$

a) $8{,}57 \cdot 10^{13} > 4{,}53 \cdot 10^{13} > 3{,}27 \cdot 10^{13}$

b) $5 \cdot 10^{-9} > 2 \cdot 10^{-9} > 1{,}19 \cdot 10^{-9}$

Para resolver

42 Un depósito de agua tiene dos grifos. Si los abrimos a la vez, el depósito se llena en dos horas. Si abrimos solo el primero, se llena en seis horas. ¿Cuánto tardará en llenarse el depósito si abrimos solamente el segundo grifo?

Llamamos x = n.º de horas que tarda en llenar el depósito el segundo grifo.

El primer grifo llena $\frac{1}{6}$ del depósito en una hora.

El segundo grifo llena $\frac{1}{x}$ del depósito en una hora.

Los dos juntos llenan $\frac{1}{2}$ del depósito en una hora.

Por otra parte, los dos juntos, en una hora, llenan $\frac{1}{6}+\frac{1}{x}$. Por tanto:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{x} \rightarrow \frac{3x}{6x}=\frac{x}{6x}+\frac{6}{6x} \rightarrow 3x=x+6 \rightarrow x=3$$

El segundo grifo tarda 3 horas en llenar el depósito.

43 En un concurso se reparten 20 000 € entre las tres personas que han tardado menos tiempo en realizar una prueba. La primera ha tardado 4 minutos; la segunda, 5 minutos, y la tercera, 8 minutos. ¿Cuánto dinero le corresponde a cada una si el reparto es inversamente proporcional al tiempo invertido?

Debemos repartir 20 000 € de forma inversamente proporcional al tiempo empleado:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{10}{40}+\frac{8}{40}+\frac{5}{40}=\frac{23}{40} \text{ tardarían entre los tres}$$

Al primero le corresponde $\frac{20\,000 \cdot 10}{23} = 8\,694{,}65$ €

Al segundo le corresponde $\frac{20\,000 \cdot 8}{23} = 6\,956{,}52$ €

Al tercero le corresponde $\frac{20\,000 \cdot 5}{23} = 4\,347{,}83$ €

44 Varios amigos se reúnen en un bar, toman 15 refrescos y pagan 18,75 € en total. Uno de ellos tomó solo un refresco, otro tomó dos y el resto tomaron 3 refrescos cada uno. ¿Cuántos amigos fueron y cuánto tuvo que pagar cada uno?

18,75 : 15 = 1,25 € por refresco.

1,25 paga el primero; 2,5 paga el segundo → 3,75 € entre los dos.

Los restantes toman 15 – 3 = 12 refrescos.

12 : 3 = 4 amigos, y cada uno paga 3,75 €.

Son 6 en total. Pagan 1,25 €, 2,5 € y los otros cuatro, 3,75 € cada uno.

45 **En una granja hay 75 gallinas que consumen 450 kg de maíz en 30 días. Para aumentar la producción de huevos, se aumenta el número de gallinas a 200 y se compran 800 kg de maíz. ¿Cuántos días se podrá dar de comer a las gallinas?**

450 : 30 = 15; 15 : 75 = 0,2 kg de maíz es lo que come una gallina en un día.

200 · 0,2 = 40 kg por día para alimentar 200 gallinas.

800 : 40 = 20 días podrán comer las gallinas.

46 **Un empleado puede hacer los 2/3 de un trabajo en 8 días trabajando 5 horas diarias, y otro, los 3/4 del mismo trabajo en 6 días de 7 horas de trabajo. ¿Cuánto tiempo tardarán los dos juntos en hacer el trabajo, dedicando 6 horas diarias?**

Para hacer todo el trabajo el primero tarda: $5 \cdot 8 \cdot \frac{3}{2} = 60$ horas.

Y el segundo: $7 \cdot 6 \cdot \frac{4}{3} = 56$ horas.

En 1 hora los dos juntos hacen: $\frac{1}{60} + \frac{1}{56} = \frac{29}{840}$.

Para hacer todo el trabajo tardan: $\frac{840}{29} \approx 28{,}96$ horas.

28,96 : 6 ≈ 4 días 4 horas 58 minutos

47 **Dos amigas, trabajando juntas, emplearían 3 días para hacer un trabajo. Después del primer día, una de las dos lo tiene que dejar. Continúa la otra sola y tarda 6 días en acabar el trabajo. ¿En cuántos días haría el trabajo cada una aisladamente?**

Después del primer día quedan por hacer los 2/3 y como la segunda amiga tarda 6 días, para hacer todo el trabajo tardaría $\frac{6 \cdot 3}{2} = 9$ días.

La primera hace por día $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$ del trabajo.

Por tanto, tardaría en hacer todo el trabajo $\frac{9}{2} = 4{,}5$ días.

48 **Dos poblaciones A y B distan 350 km. A la misma hora sale un autobús de A hacia B a una velocidad de 80 km/h y un turismo de B hacia A a 120 km/h. ¿Cuándo se cruzarán?**

Si se aproximan a 80 + 120 = 200 km/h, en recorrer 350 km tardarán:

$t = \frac{350}{200} = 1{,}75$ horas = 1 hora y 45 minutos.

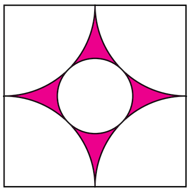
49 **Un automóvil tarda 3 horas en ir de A a B y otro tarda 5 horas en ir de B a A. Calcula el tiempo que tardarán en encontrarse si salen simultáneamente cada uno de su ciudad.**

El primero recorre 1/3 del camino en 1 hora.

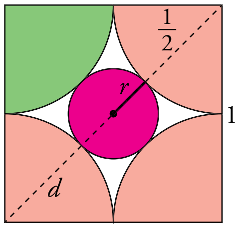
El segundo recorre 1/5 del camino en 1 hora.

Entre los dos recorren: $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$ del camino en 1 hora.

Tardarán $\frac{15}{8}$ h = 1 h 52' 30'' en encontrarse.

50 

Halla el área de la parte coloreada de esta figura en el que el lado del cuadrado mide 1 m. Expresa el área en decímetros cuadrados con tres cifras significativas y acota el error cometido.



El área pedida es el área del cuadrado, menos cuatro veces el área verde y menos el área roja.

Cuatro veces el área verde es el área de un círculo de radio $\frac{1}{2}$, es decir, $4A_{Verde} = \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi$

Llamamos d a la diagonal del cuadrado: $d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Calculamos el radio: $r = \frac{d}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$

El área roja es el área del círculo de radio $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$.

$A_{Roja} = \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi$

$\textit{Área pedida} = A_{Cuadrado} - 4A_{Verde} - A_{Roja} = 1 - \frac{1}{4}\pi - \left(\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi\right) =$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi - \pi + 1 = 7{,}9849 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 = 7{,}98 \text{ dm}^2$$

E.A. $< 0{,}005 \text{ dm}^2$

E.R. $< \frac{0{,}005}{7{,}9849 \cdot 10^{-2}} = 6{,}2618 \cdot 10^{-2} = 0{,}062618$, que equivale al 6,26 %.

Página 47

51 **La estación espacial Mir estuvo en órbita casi 15 años y durante ese tiempo dio, aproximadamente, 86 500 vueltas alrededor de la Tierra, a una altura media de 400 km. Calcula la distancia total recorrida por la Mir en esos 15 años. Redondea el resultado a las decenas de millón y da una cota del error absoluto y una cota del error relativo cometidos.**

El radio medio de la Tierra es de 6 371 km.

La longitud de una vuelta del satçelite es $2\pi \cdot (400 + 6\,371) = 13\,542\,\pi$ km.

El total de kilómetros recorridos es:

$$13\,542\pi \cdot 86\,500 \approx 3{,}68 \cdot 10^9 = 368 \text{ decenas de millón}$$

E.A. $< 0{,}5 \cdot 10^7$

E.R. $< \frac{0{,}5 \cdot 10^7}{3{,}68 \cdot 10^9} = 1{,}3587 \cdot 10^{-3} = 0{,}0013 = 0{,}13\,\%$

52 **La longitud de una barra metálica después de calentarla es $l = l_0(1 + kt)$ donde l_0 es la longitud a 0 °C, t la temperatura final y k el coeficiente de dilatación lineal. Si una barra de plomo mide 1 m a 800 °C, ¿cuál es su longitud a 200 °C? (En el plomo $k = 3 \cdot 10^{-5}$).**

Calculamos l_0 a partir de la longitud de la barra a 800 °C:

$$l = l_0(1 + kt) = l_0(1 + 3 \cdot 10^{-5} \cdot 800) = l_0\left(\frac{128}{125}\right), \text{ luego } l_0 = \frac{125}{128}$$

Calculamos ahora la longitud de la barra a 200 ºC:

$$l = l_0(1 + kt) = \frac{125}{128}(1 + 3 \cdot 10^{-5} \cdot 200) = \frac{125}{128} \cdot \frac{503}{500} = \frac{503}{512} = 0{,}98242 \text{ m}$$

53 **La estrella R136a1, descubierta recientemente, está a 165 000 años-luz y tiene una masa actual equivalente a 265 veces la masa del Sol. Expresa la distancia en kilómetros y la masa en kilogramos. Da, en cada caso, cotas del error absoluto y del error relativo.**

Un año luz es aproximadamente $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km.

La distancia de la estrella R136a1 a la Tierra es: $d = 165\,000 \cdot 9{,}46 \cdot 10^{12} = 1{,}5\,609 \cdot 10^{18}$ km

E.A. < $5 \cdot 10^{13}$ km

E.R. < $\dfrac{5 \cdot 10^{13}}{1{,}5609 \cdot 10^{18}} = 3{,}2033 \cdot 10^{-5} = 0{,}000032$, que equivale al 0,0032 %.

La masa del Sol es, aproximadamente, $1{,}9891 \cdot 10^{30}$ kg.

La masa de la estrella R136a1 es: $m = 265 \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30} = 5{,}2711 \cdot 10^{32}$ kg

E.A. < $5 \cdot 10^{27}$ kg

E.R. < $\dfrac{5 \cdot 10^{27}}{5{,}2711 \cdot 10^{32}} = 9{,}4857 \cdot 10^{-6} = 0{,}0000094857$, que equivale al 0,00095 %.

54 **El volumen de un cubo es $6\sqrt{6}$ cm³. Halla:**

a) Su arista. **b) La diagonal de una cara.** **c) La diagonal del cubo.**

Da, en cada caso, el valor exacto.

a) $V_{\text{CUBO}} = a^3 = 6\sqrt{6} = \sqrt{6^3} \rightarrow a = \sqrt[3]{\sqrt{a^3}} = \sqrt{6}$

b) Diagonal de una cara $\rightarrow \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{6 + 6} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

c) Diagonal del cubo $\rightarrow \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{6 + 6 + 6} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

55 **La superficie de un tetraedro es $9\sqrt{3}$ cm². Calcula su arista y su volumen. Da el valor exacto.**

Un tetraedro tiene cuatro caras iguales. Llamamos a a la arista.

La superficie de cada cara es $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$ cm².

Cada cara es un triángulo equilátero cuya altura es $\sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}\,a}{2}$.

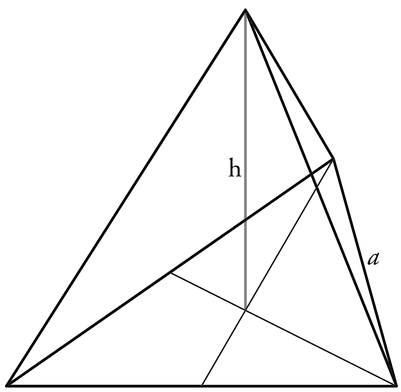
La superficie de cada cara es: $S_{\text{CARA}} = \dfrac{1}{2} a \cdot \dfrac{\sqrt{3}\,a}{2} = \dfrac{\sqrt{3}\,a^2}{4}$.

Por tanto, $\dfrac{\sqrt{3}\,a^2}{4} = \dfrac{9\sqrt{3}}{4} \rightarrow a^2 = 9 \rightarrow a = \pm 3$.

Como a es una longitud, $a = 3$ cm.

La altura del tetraedro es: $h = \dfrac{\frac{\sqrt{3}\,a}{2}}{3} \cdot 2 = \dfrac{\sqrt{3}\,a}{3} = \sqrt{3}$

$V = \dfrac{1}{3} A_{\text{BASE}} \cdot h = \dfrac{1}{3} \dfrac{9\sqrt{3}}{4} \sqrt{3} = \dfrac{9}{4}$ cm³.



Cuestiones teóricas

56 **Explica si estas frases son verdaderas o falsas:**

a) Hay números irracionales que son enteros.

b) Todo número irracional es real.

c) Todos los números decimales son racionales.

d) Entre dos números racionales hay infinitos números irracionales.

a) F   b) V   c) F   d) V

57 **Si $x \neq 0$, explica si estas afirmaciones son verdaderas o falsas:**

a) x^{-2} es negativo si lo es x.

b) $\sqrt[3]{x}$ tiene el mismo signo que x.

c) Si $x > 0$ entonces $\sqrt{x} < x$.

a) Falsa, $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ siempre es positivo por ser el exponente par, independientemente del signo de x.

b) Verdadera, porque el índice de la raíz es impar.

c) Falsa, $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$

58 **¿Cuáles de estas igualdades son verdaderas? Explica por qué:**

a) $\log m + \log n = \log (m + n)$

b) $\log m - \log n = \frac{\log m}{\log n}$

c) $\log m - \log n = \log \frac{m}{n}$

d) $\log x^2 = \log x + \log x$

e) $\log (a^2 - b^2) = \log (a + b) + \log (a - b)$

a) Falso. $\log m + \log n = \log (m \cdot n) \neq \log (m + n)$

b) Falso. $\log m - \log n = \log \left(\frac{m}{n}\right) \neq \frac{\log m}{\log n}$

c) Verdadero. Por una propiedad de los logaritmos.

d) Verdadero. $\log x^2 = \log (x \cdot x) = \log x + \log x$

e) Verdadero. $\log (a^2 - b^2) = \log [(a + b) \cdot (a - b)] = \log (a + b) + \log (a - b)$

Autoevaluación

1 **Clasifica los siguientes números indicando a cuáles de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ pertenecen:**

$$-\frac{58}{45};\ \frac{51}{17};\ \frac{\pi}{3};\ \sqrt[4]{-3};\ \sqrt[3]{-8};\ \sqrt[5]{2^3};\ 1,0\widehat{7}$$

$\mathbb{N}$: $\frac{51}{17}$ $\mathbb{Z}$: $\frac{51}{17}$; $\sqrt[3]{-8}$ $\mathbb{Q}$: $\frac{51}{17}$; $\sqrt[3]{-8}$; $-\frac{58}{45}$; $1,0\widehat{7}$ $\mathbb{R}$: $\frac{51}{17}$; $\sqrt[3]{-8}$; $-\frac{58}{45}$; $1,0\widehat{7}$; $\frac{\pi}{3}$; $\sqrt[5]{2^3}$

2 **Expresa en forma de intervalo.**

a) x **es mayor que –2 y menor o igual que 5.** **b)** $|x-4|<5$

a) $x \in (-2, 5]$

b) $x \in (-1, 9)$

3 **Escribe como potencia y simplifica.**

$$(\sqrt[4]{a^3}\cdot a^{-1}):(a\sqrt{a})$$

$$(\sqrt[4]{a^3}\cdot a^{-1}):(a\sqrt{a}) = (a^{3/4}\cdot a^{-1}):(a\cdot a^{1/2}) = (a^{3/4-1}):(a^{1+1/2}) = (a^{-1/4}):(a^{3/2}) = a^{-1/4-3/2} = a^{-7/4}$$

4 **Calcula y simplifica:** $\sqrt{\frac{125}{27}}-\sqrt{\frac{3}{5}}$

$$\sqrt{\frac{125}{27}}-\sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{5^3}{3^3}}-\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}-\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{5\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}-3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\sqrt{5}} = \frac{25-9}{3\sqrt{15}} = \frac{16}{3\sqrt{15}} = \frac{16\sqrt{15}}{45}$$

5 **Racionaliza.**

a) $\frac{4+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$ **b)** $\frac{2}{3-\sqrt{3}}$

a) $\frac{4+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{(4+\sqrt{6})(\sqrt{3})}{(2\sqrt{3})(\sqrt{3})} = \frac{4\sqrt{3}+\sqrt{18}}{2\cdot 3} = \frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6} = \frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{2}$

b) $\frac{2}{3-\sqrt{3}} = \frac{2(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} = \frac{6+2\sqrt{3}}{9-3} = \frac{6+2\sqrt{3}}{6} = 1+\frac{1}{3}\sqrt{3}$

6 **Simplifica:** $\sqrt{63}-2\sqrt{28}+\sqrt{175}$

$$\sqrt{63}-2\sqrt{28}+\sqrt{175} = \sqrt{3^2\cdot 7}-2\sqrt{2^2\cdot 7}+\sqrt{5^2\cdot 7} = 3\sqrt{7}-4\sqrt{7}+5\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$$

7 **Si** $A = 3,24\cdot 10^6$; $B = 5,1\cdot 10^{-5}$; $C = 3,8\cdot 10^{11}$ **y** $D = 6,2\cdot 10^{-6}$**, calcula** $\left(\frac{A}{B}+C\right)\cdot D$**. Expresa el resultado con tres cifras significativas y da una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.**

$$\left(\frac{A}{B}+C\right)\cdot D = \left(\frac{3,24\cdot 10^6}{5,1\cdot 10^{-5}}+3,8\cdot 10^{11}\right)\cdot 6,2\cdot 10^{-6} = \left(\frac{3,24}{5,1}10^{11}+3,8\cdot 10^{11}\right)\cdot 6,2\cdot 10^{-6} =$$

$$= (0,63529+3,8)\cdot 10^{11}\cdot 6,2\cdot 10^{-6} = 4,4353\cdot 6,2\cdot 10^5 = 27,499\cdot 10^5 =$$

$$= 2,7499\cdot 10^6 = 2,75\cdot 10^6$$

E.A. $= 0,5\cdot 10^4$

E.R. $< \frac{0,5\cdot 10^4}{2,75\cdot 10^6} = 1,8182\cdot 10^{-3} = 0,00182 = 0,18\ \%$

8 **Aplica la definición de logaritmo y obtén x.**

a) $\log_3 x = -1$ **b)** $\log x = 2{,}5$ **c)** $\ln x = 2$

a) $\log_3 x = -1 \rightarrow x = 3^{-1} \rightarrow x = \dfrac{1}{3}$

b) $\log x = 2{,}5 \rightarrow x = 10^{2,5} \rightarrow x = 10^{5/2} = \sqrt{10^5} = 10^2\sqrt{10}$

c) $\ln x = 2 \rightarrow x = e^2$

9 **Calcula x en cada caso.**

a) $2{,}5^x = 0{,}0087$ **b)** $1{,}005^{3x} = 143$

a) $x \log 2{,}5 = \log 0{,}0087 \rightarrow x = \dfrac{\log 0{,}0087}{\log 2{,}5} = -5{,}18$

b) $1{,}005^{3x} = 143$

Tomamos logaritmos:

$\log 1{,}005^{3x} = \log 143 \rightarrow 3x \log 1{,}005 = \log 143 \rightarrow x = \dfrac{\log 143}{3 \log 1{,}005} \approx 331{,}68$

10 **Expresa como un solo logaritmo y di el valor de A:**

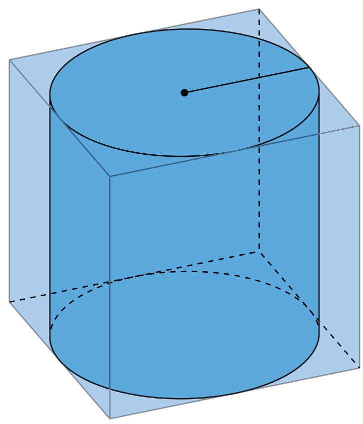
$\log 5 + 2 \log 3 - \log 4 = \log A$

$\log 5 + 2\log 3 - \log 4 = \log 5 + \log 3^2 - \log 4 = \log\left(\dfrac{5 \cdot 9}{4}\right) \rightarrow A = \dfrac{45}{4}$

11 **Si $\log k = 0{,}8$, ¿cuál es el valor de $\log 10k^3 + \log \dfrac{\sqrt{k}}{100}$?**

$\log 10k^3 + \log \dfrac{\sqrt{k}}{100} = \log 10 + \log k^3 + \log \sqrt{k} - \log 100 = 1 + 3\log k + \dfrac{1}{2}\log k - 2 = 1 + 3 \cdot 0{,}8 + \dfrac{1}{2}0{,}8 - 2 = 1{,}8$

12 **El área total de un cubo es 12 cm^2. ¿Cuál es el área total del cilindro inscrito en el cubo? Da el valor exacto.**



El área total del cubo es $6a^2 = 12 \rightarrow a = \sqrt{2}$.

El radio del cilindro inscrito es $r = \dfrac{a}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

El área de una base del cilindro es $\pi \cdot \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi}{4}$.

El área lateral del cilindro es $2\pi\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\pi$.

El área total del cilindro es $2 \cdot \dfrac{\pi}{4} + \sqrt{2}\pi = \left(\dfrac{1}{2} + \sqrt{2}\right)\pi$ cm^2.