

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

EJERCICIO 1 : Representa gráficamente la función: $f(x) = \frac{x^3}{18} - \frac{x^2}{12} - 2x$

Solución:

- Dominio = $\mathbf{R}$
- Simetrías: $f(-x) = \frac{-x^3}{18} - \frac{x^2}{12} + 2x$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen.

- Ramas infinitas: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{3x^2}{18} - \frac{2x}{12} - 2 = \frac{x^2}{6} - \frac{x}{6} - 2 = \frac{x^2 - x - 12}{6}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\text{Puntos singulares: } \left(-3, \frac{-15}{4}\right); \left(4, \frac{-52}{9}\right)$$

- Cortes con los ejes:

- Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow \text{Punto } (0, 0)$

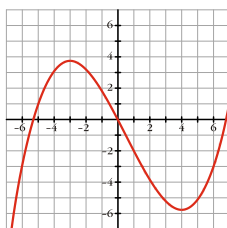
- Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x \left(\frac{x^2}{18} - \frac{x}{12} - 2 \right) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2x^2 - 3x - 72 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+576}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{585}}{4} \rightarrow \begin{cases} x \approx -5,3 \\ x \approx 6,8 \end{cases} \end{cases}$$

Puntos: $(0, 0)$; $(-5,3; 0)$ y $(6,8; 0)$

- Puntos de inflexión: $f''(x) = \frac{2x-1}{6}$; $f''(x) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow \text{Punto } \left(\frac{1}{2}, \frac{-73}{72}\right)$

- Gráfica:



EJERCICIO 2 : Dibuja la gráfica de la siguiente función: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3}$

Solución:

- Dominio = $\mathbf{R} - \{0\}$
- Simetrías: $f(-x) = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen.

- Asíntotas verticales: $\left. \begin{matrix} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \end{matrix} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$

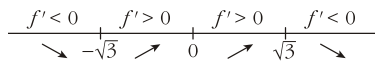
- Asíntota horizontal: $\left. \begin{matrix} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ (si } x \rightarrow -\infty, f(x) < 0) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ (si } x \rightarrow +\infty, f(x) > 0) \end{matrix} \right\} y = 0 \text{ es asíntota horizontal.}$

- Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x^3 - (x^2 - 1) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{2x^4 - 3x^4 + 3x^2}{x^6} = \frac{-x^4 + 3x^2}{x^6} = \frac{x^2(-x^2 + 3)}{x^6} = \frac{3 - x^2}{x^4}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$; es creciente en $(-\sqrt{3}, 0) \cup (0, \sqrt{3})$.

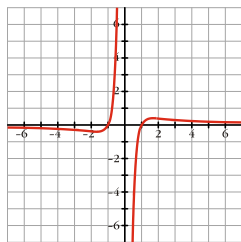
Tiene un mínimo en $(-\sqrt{3}; -0,38)$ y un máximo en $(\sqrt{3}; 0,38)$.

- Cortes con los ejes:

- No corta al eje Y , pues en $x = 0$ no está definida.

- Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow$ Puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

- Gráfica:



EJERCICIO 3 : Estudia la siguiente función y dibuja su gráfica: $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

Solución:

- Dominio = $\mathbf{R} - \{-1, 1\}$

- Simetrías: $f(-x) = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen.

- Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

- Asíntota oblicua: $y = \frac{x^3}{x^2 - 1} = x + \frac{x}{x^2 - 1} \rightarrow y = x$ es asíntota oblicua.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$$f(x) - x < 0 \text{ si } x \rightarrow -\infty \text{ (curva por debajo).}$$

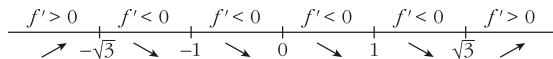
$$f(x) - x > 0 \text{ si } x \rightarrow +\infty \text{ (curva por encima).}$$

- Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(x^2 - 3) = 0 \rightarrow x = 0, x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$$

Signo de $f'(x)$:

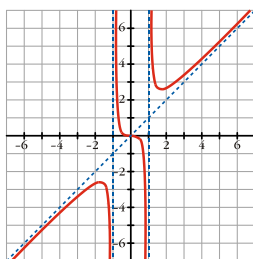


$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$; es decreciente en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \sqrt{3})$

Tiene un máximo en $(-\sqrt{3}; -2,6)$; un punto de inflexión en $(0, 0)$ y un mínimo en $(\sqrt{3}; 2,6)$.

- Solo corta a los ejes en el punto $(0, 0)$.

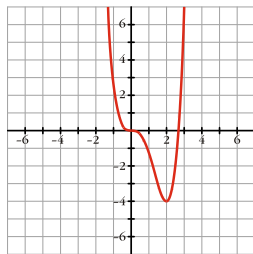
- Gráfica:



EJERCICIO 4 : Representa la función: $f(x) = \frac{3x^4 - 8x^3}{4}$

Solución:

- Dominio = $\mathbf{R}$
- Simetrías: $f(-x) = \frac{3x^4 - 8x^3}{4}$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen.
- Ramas infinitas: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- Puntos singulares:
$$f'(x) = \frac{12x^3 - 24x^2}{4} = 3x^3 - 6x^2 = 3x^2(x - 2)$$
$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2(x - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Puntos singulares: } (0, 0) \text{ y } (2, -4)$$
- Cortes con los ejes:
 - Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$
 - Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^3(3x - 8) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{8}{3} \end{cases} \rightarrow \text{Puntos } (0, 0) \text{ y } \left(\frac{8}{3}, 0\right)$
- Puntos de inflexión:
$$f''(x) = 9x^2 - 12x = 3x(3x - 4)$$
$$f''(x) = 0 \rightarrow x = 0, x = \frac{4}{3} \rightarrow \text{Puntos } (0, 0) \text{ y } \left(\frac{4}{3}, \frac{-64}{27}\right)$$
- Gráfica:



EJERCICIO 5 : Halla los puntos de corte con los ejes y los máximos y mínimos de la función:

$$f(x) = -2 + \cos^2 x, \quad x \in [0, 2\pi]$$

Utilizando la información obtenida, represéntala gráficamente.

Solución:

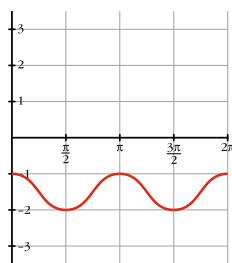
- Dominio = $[0, 2\pi]$
- Puntos de corte con los ejes:
 - Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow$ Punto $(0, -1)$
 - Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow -2 + \cos^2 x = 0 \rightarrow \cos^2 x = 2 \rightarrow$
 $\rightarrow \cos x = \pm\sqrt{2} \rightarrow$ No tiene solución $\Rightarrow$ No corta al eje X .
- Máximos y mínimos: $f'(x) = 2\cos x(-\sin x) = -2\cos x \sin x$
$$f'(x) = 0 \rightarrow -2\cos x \sin x = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2} \\ \sin x = 0 \rightarrow x = 0, x = \pi, x = 2\pi \end{cases}$$

Estudiamos el signo de $f''(x) = -2[\cos^2 x - \sin^2 x]$ en esos puntos:

$y'' < 0$ en $x = 0, x = \pi$ y $x = 2\pi \Rightarrow$ Máximos: $(0, -1), (\pi, -1), (2\pi, -1)$

$y'' > 0$ en $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$ Mínimos: $\left(\frac{\pi}{2}, -2\right); \left(\frac{3\pi}{2}, -2\right)$

- Gráfica:



EJERCICIO 6 : Estudia y representa esta función: $f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)$

Solución:

- Dominio = $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

- Asíntotas:

Asíntotas verticales:

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \rightarrow x = -1$ es asíntota vertical.

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \rightarrow x = 2$ es asíntota vertical.

Asíntotas horizontales

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{-x-2}{-x+1}\right) = \ln 1 = 0 \quad (f(x) > 0) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = \ln 1 = 0 \quad (f(x) < 0) \end{cases}$$

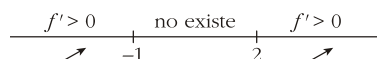
$y = 0$ es asíntota horizontal.

- Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x-2}{x+1}} \cdot \frac{x+1-(x-2)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)}{(x-2)} \cdot \frac{(x+1-x+2)}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x-2)(x+1)}$$

$f'(x) \neq 0$ para todo x .

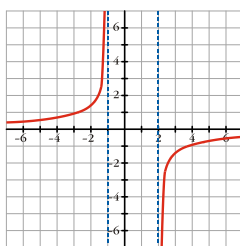
Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en su dominio.

- No corta a los ejes.

- Gráfica:



EJERCICIO 7 : Representa la siguiente función: $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$

Solución:

- Dominio = $\mathbf{R}$

- Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$ ($y > 0$)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow$ Rama parabólica.

- Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:

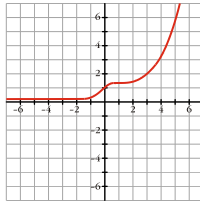
$$f'(x) = \frac{e^x (x^2 + 1) - e^x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{e^x (x^2 - 2x + 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{e^x (x-1)^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 1$$

$f'(x) > 0$ para todo $x \neq 1 \rightarrow f(x)$ es creciente.

Hay un punto de inflexión en $\left(1, \frac{e}{2}\right)$.

- Corta al eje Y en $(0, 1)$. No corta al eje X .
- Gráfica:



EJERCICIO 8 : Estudia y representa la función: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$

Solución:

- Dominio = $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

- Simetrías: $f(-x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$

No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen.

- Asíntotas:

Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \rightarrow x = -2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \rightarrow x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\text{Asíntotas horizontales: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$$

$y = 0$ es asíntota horizontal ($f(x) > 0$ para todo x).

- Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento: $f(x) = (x^2 + 2x)^{-1/2}$

$$f'(x) = \frac{-1}{2} (x^2 + 2x)^{-3/2} \cdot (2x + 2) = \frac{-(x+1)}{\sqrt{(x^2 + 2x)^3}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = -1 \text{ (no vale; pues } f(x) \text{ no está definida en } x = -1).$$

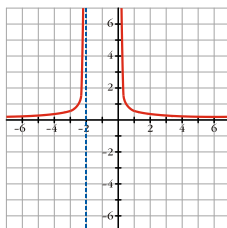
$f(x)$ no tiene puntos singulares.

Signo de $f'(x)$:

$$\begin{array}{c} f' > 0 \quad \quad \quad \text{no existe} \quad \quad \quad f' < 0 \\ \quad \quad \quad \nearrow \quad \quad \quad \quad \quad \quad \searrow \\ \quad \quad \quad -2 \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2)$ y es decreciente en $(0, +\infty)$.

- $f(x)$ no corta a los ejes.
- Gráfica:



EJERCICIO : Representa gráficamente la siguiente función: $f(x) = (1 - x) e^x$

Solución:

- Dominio = $\mathbb{R}$

- Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{e^x} = 0$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$ ($y > 0$).

Ramas infinitas: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \rightarrow$ Rama parabólica.

- Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = -e^x + (1-x)e^x = (-1+1-x)e^x = -xe^x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f'(x)$:

$$\begin{array}{c} f' > 0 & & f' < 0 \\ & \nearrow & & \searrow \\ & 0 & & \end{array}$$

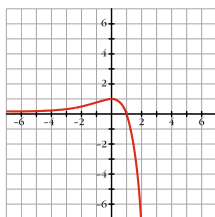
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$; es decreciente en $(0, +\infty)$. Tiene un máximo en $(0, 1)$.

- Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow$ Punto $(0, 1)$

- Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow$ Punto $(1, 0)$

- Gráfica:



EJERCICIO : Estudia y representa la siguiente función: $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2-4}$

Solución:

- Dominio = $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- Simetrías: $f(-x) = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y .

- Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = -2 \text{ es asíntota vertical.} \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

- Asíntota horizontal: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1 \rightarrow y = -1$ es asíntota horizontal.

Si $x \rightarrow -\infty$ y si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < -1 \rightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota.

- Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{-2x(x^2-4) - (1-x^2) \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-2x^3+8x-2x+2x^3}{(x^2-4)^2} = \frac{6x}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f'(x)$:

$$\begin{array}{c} f' < 0 & & f' < 0 & & f' > 0 & & f' > 0 \\ & \searrow & & \searrow & & \nearrow & & \nearrow \\ & -2 & & 0 & & 2 & & \end{array}$$

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$; es creciente en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$. Tiene un mínimo en $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$.

- Cortes con los ejes:

- Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -\frac{1}{4} \rightarrow$ Punto $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$

- Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow 1-x^2 = 0 \rightarrow x = -1; x = 1 \rightarrow$ Puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$

- Gráfica:

