1) *(Select MII)* Sea C la matriz que depende de un parámetro m, dada por

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 17 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores del parámetro m no tiene inversa la matriz C? *(1,5 puntos)*

b) Calcula la matriz inversa de C para $m = 2$ *(1,5 puntos)*

2) Resolver el siguiente sistema matricial: $\left.\begin{array}{r} 3X + Y = A \\ X - 2Y = B \end{array}\right\}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *(2 puntos)*

3) *(Select MII)* El determinante $\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^3 & 35 \end{vmatrix}$ vale cero para $a = 3$. Comprueba esta afirmación sin desarrollarlo e indicando las propiedades de los determinantes que apliques. *(2 puntos)*

4) *(Select)* Tres amigos, Marcos, Luis y Miguel, son aficionados a la música. Entre los tres poseen un total de discos compactos (CD) comprendido entre 16 y 22. Marcos presta 4 CD a Miguel, Luis presta 1 CD a Marcos y Miguel presta 2 CD a Luis, con lo cual los tres amigos tienen ahora el mismo número de CD. ¿Cuántos CD pueden tener en total?

Soluciones

1) *(Selectividad MII)* Sea C la matriz que depende de un parámetro m, dada por

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 17 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores del parámetro m no tiene inversa la matriz C? *(1,5 puntos)*

Una matriz tiene inversa si, y sólo si su determinante es distinto de cero. Veamos cuándo ocurre.

$$det(C) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 17 \end{vmatrix} \overset{\boxed{C_3+C_1}}{=} \begin{vmatrix} 2 & -1 & m+2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 15 \end{vmatrix} \overset{\boxed{\text{Adj de } F_2}}{=} -1\cdot\begin{vmatrix} -1 & m+2 \\ 1 & 15 \end{vmatrix} \overset{\boxed{F_1+F_2}}{=}$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & m+17 \\ 1 & 15 \end{vmatrix} = m+17$$

Se han aplicado propiedades de determinantes, pero también podía haberse desarrollado por la regla de Sarros. Según eso, el determinante vale 0 si $m = -17$. Por tanto, no existe matriz inversa si, y sólo si $m = -17$.

b) Calcula la matriz inversa de C para $m = 2$ *(1,5 puntos)*

Si $m = 2 \Rightarrow |C| = 19$ y existe C^{-1}.

$$Adj(C) = \begin{vmatrix} 1 & -15 & 1 \\ 19 & 38 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{19}\left[Adj(C)\right]^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{19} & 1 & \frac{1}{19} \\ -\frac{15}{19} & 2 & \frac{4}{19} \\ \frac{1}{19} & 0 & \frac{1}{19} \end{pmatrix}$$

2) Resolver el siguiente sistema matricial: $\left.\begin{array}{l} 3X + Y = A \\ X - 2Y = B \end{array}\right\}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *(2 puntos)*

$\varepsilon_1\cdot 2$: $\left.\begin{array}{r} 6X + Y2 = 2A \\ X - 2Y = B \end{array}\right\}$ Sumando las dos ecuaciones:

$$7X = 2A + B \Rightarrow X = \frac{1}{7}(2A + B) = \frac{1}{7}\left[\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ \frac{3}{7} & -1 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_2\cdot(-3)$: $\left.\begin{array}{r} 3X + Y = A \\ -3X + 6Y = -3B \end{array}\right\}$ Sumando las dos ecuaciones:

$$7Y = A - 3B \Rightarrow Y = \frac{1}{7}(A - 3B) = \frac{1}{7}\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\right] =$$

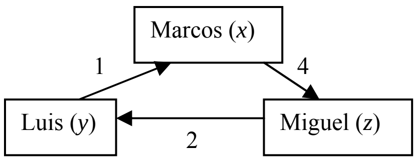
$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{8}{7} \\ -\frac{2}{7} & 0 \end{pmatrix}$$

3) *(Selectividad MII)* El determinante $\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^3 & 35 \end{vmatrix}$ vale cero para $a = 3$. Comprueba esta afirmación sin desarrollarlo e indicando las propiedades de los determinantes que apliques. *(2 puntos)*

Para $a = 3$, la tercera columna es suma de las dos primeras, por lo que el determinante vale cero (la tercera columna es combinación lineal de las otras dos).

4) *(Selectividad)* Tres amigos, Marcos, Luis y Miguel, son aficionados a la música. Entre los tres poseen un total de discos compactos (CD) comprendido entre 16 y 22. Marcos presta 4 CD a Miguel, Luis presta 1 CD a Marcos y Miguel presta 2 CD a Luis, con lo cual los tres amigos tienen ahora el mismo número de CD. ¿Cuántos CD pueden tener en total?

Llamamos: $\left.\begin{array}{l} x = \text{ CD de Marcos} \\ y = \text{ CD de Luis} \\ z = \text{ CD de Miguel} \end{array}\right\}$ Tienen los mismos CD prestándose así:



Es decir, tras el reparto quedan así:

Marcos	Luis	Miguel
x+1–4	y+2–1	z+4–2

y, entonces, todos tienen los mismos CD. Luego:

$\left.\begin{array}{l} x-3 = y+1 \\ y+1 = z+2 \\ x-3 = z+2 \end{array}\right\}$ donde la tercera ecuación puede eliminarse, porque es la suma de las dos primeras. Simplificando:

$\left.\begin{array}{l} x-y=4 \\ y-z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Pasando y al segundo miembro: $\left.\begin{array}{l} x = 4+y \\ z = -1+y \end{array}\right\}$

Luego el sistema tiene infinitas soluciones: (4+t, t, –1+t) (hemos llamado $y = t$)

Pero falta usar un dato: la suma de todos los discos es 4+t+t–1+t = 3+3t. Y según el enunciado, $16 \leq 3+3t \leq 22$. Como t son los discos de Luis, t tomará un valor de 1 en adelante (Luis tiene, al menos, un disco, ya que ha prestado 1 a Marcos). Veamos todas las posibilidades:

t	1	2	3	4	5	6	7
Discos en total (3+3t)	6	9	12	15	18	21	24

Luego pueden tener, en total 18 ó 21 discos (hay dos posibilidades).