MATEMÁTICAS CC.SS. II 17 de febrero de 2.006
Sistemas, matrices, determinantes

1) a) (*Batería de Selectividad 2.005)* Resuelva el siguiente sistema y clasifíquelo atendiendo al número de soluciones: *(2 puntos)*

$$\begin{cases} x - y - z = -2 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ 4x + y - 3z = -2 \end{cases}$$

b) A la vista del resultado anterior, ¿podemos afirmar que hay una ecuación que es combinación lineal de las otras dos? *(0,5 puntos)*

c) Escriba la matriz de coeficientes de este sistema y, si es posible, calcule su matriz inversa (no utilizar resultados previos). *(1 punto)*

2) (*Batería de Selectividad 2.004)* Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule $(A - I_2) \cdot B$, siendo I_2 la matriz identidad de orden 2. *(1 punto)*

b) Obtenga la matriz B^t (matriz traspuesta de *B*) y calcule, si es posible, $B^t \cdot A$. *(1 punto)*

c) Calcule la matriz *X* que verifica $A \cdot X + B = C$. *(1,5 puntos)*

3) *(Resuelto en el libro)* Discuta y resuelva el siguiente sistema en función del parámetro *m*: *(3 puntos)*

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + 3z = 5 \\ x + 3y + mz = 7 \end{cases}$$

Soluciones

1) a) (*Batería de Selectividad 2.005)* Resuelva el siguiente sistema y clasifíquelo atendiendo al número de soluciones: *(2 puntos)*

$$\begin{cases} x-y-z=-2 \\ 2x+3y-z=2 \\ 4x+y-3z=-2 \end{cases}$$

Escribimos la matriz ampliada y resolvemos por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \to F_2-2F_1: \\ F_3-4F_1: \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Como la tercera fila es igual a la segunda, podemos eliminarla (si restáramos F_3–F_2 se obtendría una fila de ceros). Por tanto, el sistema queda con dos ecuaciones y tres incógnitas, por lo que será compatible indeterminado. Pasando la *z* al segundo miembro y llamándola, por ejemplo, *t*, el sistema será:

$$\begin{cases} x-y=-2+t \\ 5y=6-t \end{cases}$$

Que ya está triangularizado. Despejando *y* en la segunda ecuación, queda:

$$y=\frac{6-t}{5}$$

Sustituyendo en la primera:

$$x-\frac{6-t}{5}=-2+t \quad \Rightarrow \quad x=-2+t+\frac{6-t}{5}=\frac{-10+5t+6-t}{5}=\frac{4t-4}{5}$$

Es decir, que las soluciones son de la forma:

$$\left(\frac{4t-4}{5},\frac{6-t}{5},t\right)$$

b) A la vista del resultado anterior, ¿podemos afirmar que hay una ecuación que es combinación lineal de las otras dos? *(0,5 puntos)*

Según el método de Gauss, como hemos eliminado una ecuación, entonces, era combinación lineal de las anteriores.

c) Escriba la matriz de coeficientes de este sistema y, si es posible, calcule su matriz inversa (no utilizar resultados previos). *(1 punto)*

La matriz es: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Si una ecuación es combinación lineal de las otras dos, una fila de esta matriz debe serlo de las otras dos. Por tanto, este determinante debe valer cero y la matriz no tendrá, pues, inversa. Como no nos permiten usar resultados anteriores, calculamos su determinante, por Sarrus:

$$-9+4-2+12+1-6=17-17=0$$

2) (*Batería de Selectividad 2.004)* Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule $(A-I_2)\cdot B$, siendo I_2 la matriz identidad de orden 2. *(1 punto)*

$$(A-I_2)\cdot B=\left[\begin{pmatrix}-1&0\\1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}0&-1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}0&2&-4\\1&-2&2\end{pmatrix}$$

b) Obtenga la matriz B^t (matriz traspuesta de B) y calcule, si es posible, $B^t\cdot A$. *(1 punto)*

$B^t=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\\2&0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Es posible efectuar el producto $B^t\cdot A$, porque B^t es de dimensión 3 x 2 y A es 2 x 2:

$$B^t\cdot A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&-2\\-2&0\end{pmatrix}$$

c) Calcule la matriz X que verifica $A\cdot X+B=C$. *(1,5 puntos)*

$$A\cdot X+B=C\ \Rightarrow\ A\cdot X=C-B\ \Rightarrow\ A^{-1}AX=A^{-1}(C-B)\ \Rightarrow\ I_2X=A^{-1}(C-B)\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ X=A^{-1}(C-B).$$

Calculemos A^{-1}. En primer lugar, comprobamos que existe, calculando su determinante:

$|A|=-2$. Como es no nulo, existe A^{-1}.

$$A^t=\begin{pmatrix}-1&1\\0&2\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \mathrm{Adj}(A^t)=\begin{pmatrix}2&0\\-1&-1\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\1/2&1/2\end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X=A^{-1}(C-B)=\begin{pmatrix}-1&0\\1/2&1/2\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}-1&2&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}\right]=$$
$$=\begin{pmatrix}-1&0\\1/2&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3&-3\\-1&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3&3\\-1&5/2&-2\end{pmatrix}$$

3) *(Resuelto en el libro)* Discuta y resuelva el siguiente sistema en función del parámetro m: *(3 puntos)*

$$\begin{cases}x+\ y+2z=3\\x+2y+3z=5\\x+3y+mz=7\end{cases}$$

La matriz ampliada es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&3\\1&2&3&5\\1&3&m&7\end{array}\right)\to\begin{array}{r}\\F_2-F_1:\\F_3-F_1:\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&3\\0&1&1&2\\0&2&m-2&4\end{array}\right)\to\begin{array}{r}\\\\F_3-2F_2:\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&3\\0&1&1&2\\0&0&m-4&0\end{array}\right)$$

Pues bien. Si $m-4=0$, es decir, si $m=4$, la última ecuación es $0x+0y+0z=0$, es decir, $0=0$, por lo que podemos eliminarla. Entonces, el sistema será de dos ecuaciones con tres incógnitas, es decir, compatible indeterminado con infinitas soluciones. Llamando $z=t$ y pasándola al segundo miembro de las dos ecuaciones que quedan, el sistema será:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=3-2t \\ y=2-t \end{array}\right\}$$ Sustituyendo $y = 2–t$ (segunda ecuación) en la primera ecuación:

$$x + 2 – t = 3 – 2t \quad \Rightarrow \quad x = 3 – 2t –2 + t = 1 – t$$

Por tanto, las soluciones son de la forma:

$$(1–t,\ 2–t,\ t)$$

Por otra parte, si $m \neq 4 \quad \Rightarrow$ el sistema es:

$$\left.\begin{array}{r} x+y \quad +2z=3 \\ y \quad + \ z=2 \\ (m-4)z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ (3ª ec.): $z = 0/(m–4) = 0 \quad \Rightarrow$ (2ª ec.): $y +0 = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 2 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (1ª ec.): $x + 2 + 0 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 3–2 = 1$

Por lo que el sistema es compatible determinado, con solución:

$$(1,\ 2,\ 0)$$