

MATEMÁTICAS CC.SS. II

Sistemas, matrices, determinantes, p. lineal

- 1) (*Propuesta para Selectividad 2.005*) Una empresa monta dos tipos de ordenadores: fijos y portátiles. La empresa puede montar como máximo 10 fijos y 15 portátiles a la semana, y dispone de 160 horas de trabajo a la semana. Se sabe que el montaje de un fijo requiere 4 horas de trabajo, y reporta un beneficio de 100 euros, mientras que cada portátil necesita 10 horas de trabajo y genera un beneficio de 150 euros. Calcule el número de ordenadores de cada tipo que deben montarse semanalmente para que el beneficio sea máximo, y obtenga dicho beneficio. (6 puntos)
- 2) (*Propuesta para Select. 2.005*) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- a) Calcule, si existe, la matriz inversa de B .
- b) Si $A \cdot B = B \cdot A$ y $A + A^t = 3 \cdot I_2$, calcule x e y . (4 puntos)

Soluciones

- 1) (Propuesta para Selectividad 2.005) Una empresa monta dos tipos de ordenadores: fijos y portátiles. La empresa puede montar como máximo 10 fijos y 15 portátiles a la semana, y dispone de 160 horas de trabajo a la semana. Se sabe que el montaje de un fijo requiere 4 horas de trabajo, y reporta un beneficio de 100 euros, mientras que cada portátil necesita 10 horas de trabajo y genera un beneficio de 150 euros. Calcule el número de ordenadores de cada tipo que deben montarse semanalmente para que el beneficio sea máximo, y obtenga dicho beneficio.

	Cantidad fabricada	Horas de trabajo	Máximo semanal	Beneficio (Decenas de €)
Fijos	x	$4x$	$x \leq 10$	$10x$
Portátiles	y	$10y$	$y \leq 15$	$15y$
TOTALES		$4x+10y \leq 160$		$10x+15y$

Esquematizado el enunciado en el cuadro anterior, el problema de Programación Lineal consiste en:

Función Objetivo: $f(x, y) = 10x + 15y$ MAXIMIZAR

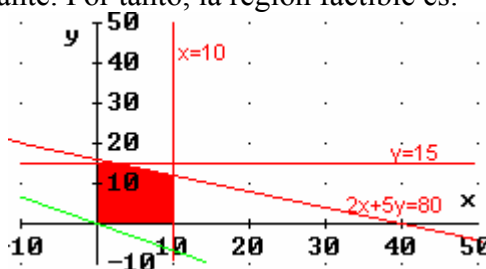
Restricciones: $4x + 10y \leq 160 \Leftrightarrow 2x + 5y \leq 80$

$$x \leq 10$$

$$y \leq 15$$

$x \geq 0, y \geq 0$ (no se puede fabricar una cantidad negativa)

Dibujamos la región factible. Los puntos que verifican $2x + 5y \leq 80$ quedan bajo la recta (si despejásemos, sería $y \leq (-2x + 80)/5$, es decir, valores con y menores que los puntos de la recta, que tendrían $y = (-2x + 80)/5$; también puede verse sustituyendo un punto de uno de los dos semiplanos en los que la recta divide al plano, y viendo si el punto elegido es del semiplano que verifica la inecuación). Los que cumplen que $x \leq 10$ quedan a la izquierda de la recta $x = 10$. Los de $y \leq 15$ están bajo la recta horizontal $y = 15$. $x \geq 0, y \geq 0$ nos restringe al primer cuadrante. Por tanto, la región factible es:



Hemos dibujado, pasando por $(0, 0)$, la recta $10x + 15y = 0$. La solución será una recta $10x + 15y = c$, es decir, paralela a la dibujada, con c lo mayor posible (porque estamos maximizando). Esto nos obliga a dibujarla lo más alta posible tocando a puntos de la región factible (porque el coeficiente de y en la función objetivo es positivo; si fuese negativo, sería la recta más baja posible). Luego los últimos puntos que tocará serán (dependiendo de la precisión del gráfico dibujado) o el vértice intersección de $y = 15$ con $2x + 5y = 80$, o la intersección de esta última recta con $x = 10$, o incluso todo el segmento que los une. Calculemos ambos, veamos qué valor toma la función objetivo en cada uno de ellos, para ver dónde es mayor.

$$\begin{cases} y = 15 \\ 2x + 5y = 80 \end{cases} \Rightarrow \text{Sustituyendo la primera ecuación (que ya nos da el valor de } y) \text{ en la}$$

$$\text{segunda: } 2x + 5 \cdot 15 = 80 \Rightarrow 2x + 75 = 80 \Rightarrow 2x = 80 - 75 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = 5/2$$

Luego el primer punto es $(5/2, 15)$

$$\begin{cases} x = 10 \\ 2x + 5y = 80 \end{cases} \Rightarrow \text{De la misma forma: } 2 \cdot 10 + 5y = 80 \Rightarrow 5y = 80 - 20 \Rightarrow y = 60/5 = 12$$

Por lo que el segundo punto es (10, 12)

$$f(5/2, 15) = 10 \cdot \frac{5}{2} + 15 \cdot 15 = 25 + 225 = 250$$

$$f(10, 12) = 10 \cdot 10 + 15 \cdot 12 = 100 + 180 = 280$$

Luego el beneficio máximo se consigue fabricando 10 fijos y 12 portátiles, lo que reporta un beneficio de 2.800€.

Téngase en cuenta que si la solución hubiera sido en (5/2, 15) no sería válida, porque no puede fabricarse un número decimal de ordenadores. Habría entonces que dibujar los puntos de la región factible correspondientes a valores de x e y sin decimales, y buscar el máximo sólo entre ellos.

2) (Propuesta para Select. 2.005) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcule, si existe, la matriz inversa de B .

Como $|B| = 0 - 2 = -2$ es no nulo, existe la inversa de B .

$$B^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(B^t) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b) Si $A \cdot B = B \cdot A$ y $A + A^t = 3 \cdot I_2$, calcule x e y .

La primera igualdad equivale a:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -x+y & 2x \\ y+x & -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-2y & -y+2x \\ x & y \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -x+y = -x-2y \\ 2x = -y+2x \\ y+x = x \\ -2y = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2y \Rightarrow 0 = 2y - y \Rightarrow 0 = y \\ 0 = -y \Rightarrow 0 = y \\ y = 0 \\ 0 = 3y \Rightarrow 0 = y \end{cases}$$

Es decir, sólo con que $y = 0$ se verifica la igualdad matricial.

La segunda es:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 3 \\ 2x = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 3/2$$

(Hemos igualado sólo las posiciones de las dos matrices que diferían)

Luego la solución es: $\boxed{x = \frac{3}{2}, y = 0}$