MATEMÁTICAS 2º BACH. CC. SS.
Análisis

1) Calcular las derivadas de: *(3 puntos)*

a) $f(x) = -\dfrac{2x^5}{\cos x}$ b) $g(x) = -\dfrac{3}{2}\ln\sqrt{7x}$ c) $h(x) = \dfrac{e^{3x-5}}{2}$

2) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x-2} & \text{si } x < 0 \\ 2^{2-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad de esa función y analice su comportamiento en los posibles puntos de discontinuidad *(2 puntos)*
b) Calcule la función derivada de $f(x)$ *(2 puntos)*
c) Represente gráficamente la función *(3 puntos)*

Soluciones

1) Calcular las derivadas de:

a) $f(x)=-\dfrac{2x^5}{\cos x}$ **b)** $g(x)=-\dfrac{3}{2}\ln\sqrt{7x}$ **c)** $h(x)=\dfrac{e^{3x-5}}{2}$

Soluciones:

a) $f'(x)=-\dfrac{10x^4\cos x+2x^5\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}$

b) Simplificamos antes de derivar, aplicando propiedades de logaritmos neperianos: $g(x)=-\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{2}\ln 7x=-\dfrac{3}{4}\ln 7x\ \Rightarrow\ g'(x)=-\dfrac{3}{4}\dfrac{7}{7x}=-\dfrac{3}{4x}$

c) Como $h(x)=\dfrac{1}{2}e^{3x-5}\ \Rightarrow\ h'(x)=\dfrac{1}{2}3e^{3x-5}=\dfrac{3}{2}e^{3x-5}$

2) Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x-2} & \text{si } x<0\\ 2^{2-x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

a) Estudie la continuidad de esa función y analice su comportamiento en los posibles puntos de discontinuidad

- Intervalo (–∞,0): *f* coincide con $y=\dfrac{4}{x-2}$, que es continua en su dominio. La única operación que presenta problemas de entre las que figuran en dicha función es la división, porque no se puede dividir entre 0. Por tanto, es continua en todo R–{2} (2 anula el denominador). Pero 2, que es la única discontinuidad, no pertenece a (–∞,0), zona donde *f* coincide con esta función ⇒ *f* es continua en todo (–∞,0).
- Intervalo (0,+∞): *f* coincide con $y=2^{2-x}$, que es continua en su dominio. Éste es todo R (ninguna operación tiene restricciones de cálculo) ⇒ *f* es continua en todo (0,+∞).
- $x=0$: Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{4}{x-2}=-2$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}2^{2-x}=2^2=4\ \Rightarrow f$ tiene una discontinuidad de salto finito (de primera especie) en *x*=0.

En resumen, *f* es continua en R–{0} y tiene una discontinuidad de salto finito en *x*=0.

b) Calcule la función derivada de f(x)

En $x=0$ *f* no es derivable, puesto que no es continua (una función no puede ser derivable donde no es continua). Las fórmulas habituales de derivación son válidas en intervalos abiertos, por lo que, aplicándolas:

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{4}{(x-2)^2} & \text{si } x\in(-\infty,0)\\ -2^{2-x}\ln 2 & \text{si } x\in(0,+\infty)\end{cases}$$

c) Represente gráficamente la función

Representaremos cada una de ellas por separado. Veamos, en primer lugar, la gráfica de $y=\dfrac{4}{x-2}$.

1. Dominio: R–{2}

2. Asíntotas. Horizontal: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x-2}=\left(\dfrac{4}{\infty}\right)=0 \;\Rightarrow$ La recta de ecuación y=0 es A.H.

Verticales: Sólo puede haberlas en x=2, única discontinuidad. Como $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4}{x-2}=\left(\dfrac{4}{0}\right)=\infty \;\Rightarrow$ La recta x=2 es A.V.

Oblicua: No hay, porque hay A. horizontal.

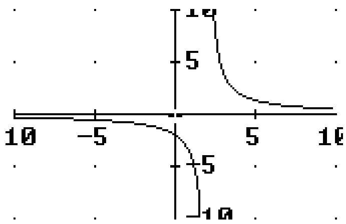
3. Monotonía: $y'=-\dfrac{4}{(x-2)^2}$. No se anula nunca (debería ser el numerador igual a 0, pero 4≠0). La única discontinuidad, tanto de y como de y' es x=2. Dividimos, por tanto, R en intervalos mediante este único punto, resultando:

	(-∞,2)	2	(2, +∞)
f'	–	∄	–
f	↘	∄	↘

No tiene extremos relativos.

4. Intersecciones con los ejes: x=0 ⇒ y=–2: (0,–2). y=0 ⇒ Imposible (se vio antes)

5. Gráfica:



Estudiemos ahora $y = 2^{2-x}$

1. Dominio: R

2. Asíntotas. Horizontal: La exponencial se comporta de modo diferente en el +∞ y en el –∞. Calculamos los límites, entonces, por separado:

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{2-x} = 2^{-\infty} = 0 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} 2^{2-x} = 2^{+\infty} = +\infty$

Por tanto, y=0 es asíntota horizontal, pero sólo por el lado del +∞. Por el lado del –∞, la función se va hasta +∞.

Vertical: No tiene, porque no hay discontinuidades

Oblicua: Sólo podría ser posible por el lado del –∞ (por el otro, hay asíntota horizontal):

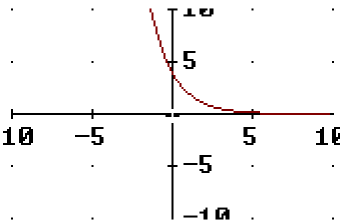
$m = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^{2-x}}{x} = \left(\dfrac{2^{+\infty}}{-\infty}\right)=\infty$, porque la exponencial produce un infinito de orden superior al de cualquier potencial. Por tanto, no hay asíntota oblicua.

3. Monotonía: $y' = -2^{2-x}\ln 2$. Como la exponencial siempre da imágenes positivas, cualquiera que sea x, y –ln 2 es constante, el signo de esta función no cambia nunca. Concretamente es negativo (–ln 2<0 y 2^{2-x}>0). Luego siempre es decreciente y no tiene extremos relativos, por consiguiente.

4. Tabla de valores:

x	–2	–1	0	1	2	3
y	16	8	4	2	1	1/2

5. Gráfica:



Teniendo en cuenta dónde está definida cada función, la gráfica de *f* es, combinando los resultados anteriores: