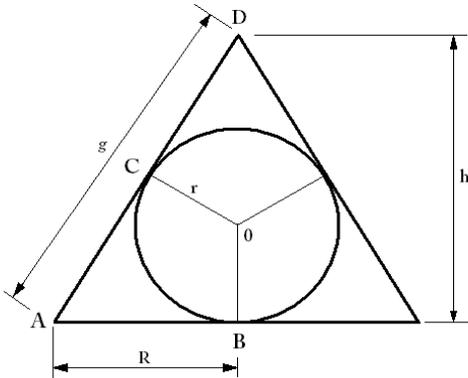


## OPTIMIZACION DE FUNCIONES

Calcular la altura del cono de superficie lateral mínima circunscrito a una esfera de radio 4cm.



$$S = \pi R g$$

Si los triángulos DCO y DAB que son semejantes, pues  $OC \perp AB$  y poseen un ángulo de  $90^\circ$

$$\frac{AB}{CO} = \frac{DA}{DO} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{g}{x-r} ; g = R \frac{x-4}{4}$$

$$\text{En DBA} \Rightarrow g^2 = R^2 + x^2 ; R^2 = g^2 - x^2 ; R^2 = R^2 \cdot \frac{(x-4)^2}{16} - x^2 ;$$

$$R^2 \cdot \left[ \frac{(x+4)^2}{16} \right] - 1 = x^2 ; R^2 = \frac{x^2}{\frac{(x+4)^2}{16} - 1} ; R^2 = \frac{16x^2}{(x-4)^2 - 16} ; R^2 = \frac{16x^2}{x^2 - 8x}$$

$$R^2 = \frac{16x}{x-8}$$

$$\text{Como } S = \pi R g = \pi R \cdot R \cdot \frac{x-4}{4} = \pi R^2 \cdot \frac{x-4}{4}$$

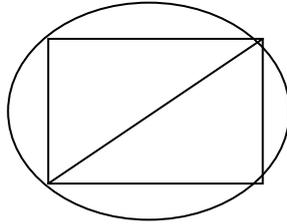
$$S = \pi \frac{16x}{x-8} \cdot \frac{x-4}{4} ; S = 4\pi \cdot \frac{x^2 - 4x}{x-8}$$

$$S' = 4\pi \cdot \frac{(2x-4)(x-8) - (x^2 - 4x)}{(x-8)^2} = 4\pi \cdot \frac{2x^2 - 4x - 16x + 32 - x^2 + 4x}{(x-8)^2}$$

$$S' = 4\pi \cdot \frac{x^2 - 16x + 32}{(x-8)^2} ; \text{ Para que } S' = 0 \Rightarrow x^2 - 16x + 32 = 0 \Rightarrow x = 8 \pm 4\sqrt{2}$$

El  $x = 8 - 4\sqrt{2} < 4$  no es válido pues sería menor que el radio de la esfera, luego la altura del cono será  $8 + 4\sqrt{2}$

**Calcular la longitud que deben tener los lados de un rectángulo inscrito en una circunferencia de radio 5 m para que el área del rectángulo sea máxima.**



Si designamos por  $x$  e  $y$  las anchura y altura del rectángulo  $\Rightarrow$

**Función a optimizar** área :  $x y \rightarrow f(x, y) = x y$

**Función condición**  $x^2 + y^2 = d^2 \quad x^2 + y^2 = 4r^2 = 100$

$$y = \sqrt{25 - x^2}$$

Si sustituimos este valor en  $f(x, y)$  obtenemos la función en una sola variable :

$$S = x \cdot \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25x^2 - x^4} \quad \text{Derivamos : } S' = \frac{50x - 4x^3}{2\sqrt{25x^2 - x^4}}$$

$$S' = 0 \rightarrow 50x - 4x^3 = 0 \rightarrow x \cdot (50 - 4x^2) = 0$$

Hay tres teoricas soluciones

$$x = 0 \text{ y } 4x^2 = 50 \rightarrow x^2 = 25/2 \rightarrow x = \pm 5 / \sqrt{2}$$

La solución  $x = 0$  y la  $x = -5 / \sqrt{2}$  carecen de sentido porque se refiere a una longitud

La única válida es :  $x = 5 / \sqrt{2}$  y la ordenada correspondiente es :  $y = 5 / \sqrt{2}$

El valor del área máxima será, calculada mediante  $S(x) = x \cdot y = 25/2 = 12,5 \text{ cm}^2$

Con un hilo de 60 cm, formar un rectángulo que, al girar alrededor de uno de sus lados, engendre un cilindro de área lateral máxima.

$$x + y + x + y = 60 \rightarrow 2x + 2y = 60$$

$$x + y = 30 \rightarrow y = 30 - x \rightarrow \text{es la condición}$$

$$S_g = 2\pi xy \text{ es lo que deseo máximo}$$

$$S_l = 2\pi x(30 - x) = 60\pi x - 2\pi x^2$$

$$S'_g = 60\pi - 4\pi x \rightarrow S'_g = 0 \rightarrow 60\pi = 4\pi x \rightarrow x = \frac{60\pi}{4\pi} = 15 \text{ cm} \rightarrow y = 30 - 15 = 15 \text{ cm}$$

El rectángulo es un cuadrado de lado 15 cm para que el área lateral del cilindro engendrado sea máxima

$$S_{l_{max}} = 2\pi \cdot 15 \cdot 15 = 250\pi \text{ m}^2$$

Determinar el punto de la curva  $y = \frac{1}{1+x^2}$  en el que la tangente a la curva forma con el eje OX el mayor ángulo posible.

$$y = \frac{1}{1+x^2}; y' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} = \operatorname{tg} \alpha$$

El máximo de  $y$  'será calcular la  $y$  'e igualar a cero

$$y'' = -\frac{2(1+x^2)^{-2} + 2x \cdot 2(1+x^2)^{-3} \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = -\frac{2-2x^2+8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

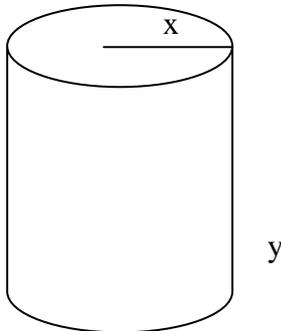
$$y'' = 0 \Rightarrow 6x^2 - 2 = 0; x^2 = \frac{1}{3}; x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ Para ver si es máximo el } + \text{ o } - \text{ se halla } y'''$$

$$y'''(x) = \frac{24x^3 + 24x}{(1+x^2)^4}$$

$$y'''(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{+}{+} > 0 \text{ Mín. No me vale}$$

$$y'''(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{24(-\frac{1}{3\sqrt{3}}) - 24\frac{1}{\sqrt{3}}}{+} = \frac{-}{+} < 0 \text{ Máx. La tg es máx. en } (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4})$$

**Determinar las dimensiones de una vasija en forma de cilindro circular recto de  $2\text{m}^3$  de volumen, de forma que sea mínima la cantidad de material usado para su construcción.**



Necesito que  $S_T$  sea mínima

$$\left. \begin{aligned} V - \pi x^2 y &= 2 \\ S_T &= 2\pi x^2 + 2\pi x y \end{aligned} \right\} y = \frac{2}{\pi x^2}$$

$$S_T = 2\pi x^2 + 2\pi x \frac{2}{\pi x^2}; S_T = 2\pi x^2 + \frac{4}{x}$$

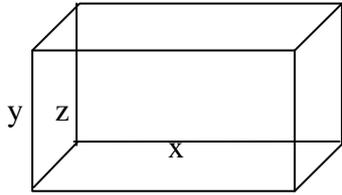
$$S_T' = 4\pi x - \frac{4}{x^2} = \frac{4\pi x^3 - 4}{x^2} \quad \text{Para que } S_T' = 0 \text{ necesito que}$$

$$4\pi x^3 - 4 = 0; x^3 = \frac{4}{4\pi}; x^3 = \frac{1}{\pi}; x = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$$

$$S_T'' = 4\pi + \frac{8x}{x^4} = 4\pi + \frac{8}{x^3}$$

$$S_T''\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}\right) = 4\pi + \frac{8}{\pi} > 0 \Rightarrow \text{La } S_T \text{ es mínima para } x = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}; y = \frac{2}{\pi \sqrt[3]{\pi^2}}$$

Determinar las dimensiones que hacen mínima la superficie total de un ortoedro si su volumen es  $72 \text{ cm}^3$  y la razón de dos de sus dimensiones es  $\frac{1}{2}$ .



$$S_T = 2(xz + yz + xy)$$

$$V = x \cdot y \cdot z = 72$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2x$$

$$\text{Si } x \cdot y \cdot z = 72; x \cdot 2x \cdot z = 72; z = \frac{72}{2x^2} = \frac{36}{x^2}$$

$$S_T = 2 \left( \frac{36}{x^2} x + 2x \frac{36}{x^2} + x \cdot 2x \right) = 2 \left( \frac{108}{x} + 2x^2 \right)$$

$$S_T' = 2 \left( -\frac{108}{x^2} + 4x \right) = 2 \left( -\frac{108 + 4x^3}{x^2} \right) \quad \text{Para que } S_T' = 0 \Rightarrow -108 + 4x^3 = 0$$

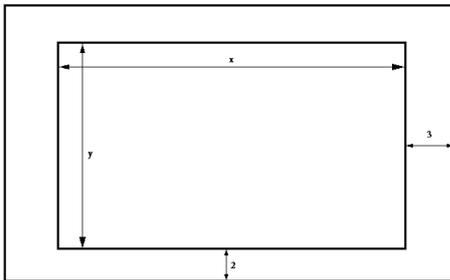
$$4x^3 = 108; x^3 = 27; x = \sqrt[3]{27} \Rightarrow x = 3; y = 6$$

$$z = \frac{36}{9} \Rightarrow z = 4 \quad \text{Veamos que } S_T \text{ es mínima y no máxima.}$$

$$S_T'' = 2 \left( \frac{2x \cdot 108}{x^3} + 4 \right) = 2 \left( \frac{216}{x^3} + 4 \right)$$

$$S_T''(3) = 2 \left( \frac{216}{27} + 4 \right) > 0 \quad \text{Luego } S_T \text{ es mínimo para } x = 3, y = 6, z = 4.$$

La parte escrita ocupa  $400\text{cm}^2$  en la página de un libro, los márgenes superior son de  $2\text{cm}$  y los laterales de  $3\text{cm}$ . ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la página para obtener la mayor economía del papel?



$$x \cdot y = 400 \quad y = \frac{400}{x}$$

$$S = (x + 6)(y + 4) = (x + 6)\left(\frac{400}{x} + 4\right) = 400 + \frac{2400}{x} + 4x + 24$$

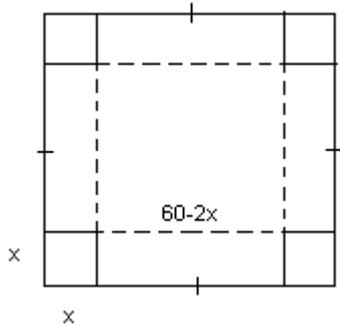
$$S = 424 + \frac{2400}{x} + 4x$$

$$S^I = -\frac{2400}{x^2} + 4 \quad \text{Para que } S^I = 0 ; 2400 = 4x^2 ; x^2 = 600 ; x = 10\sqrt{6}$$

$$S^{II} = \frac{2400 \cdot 2}{x^3} ; S^{II}(10\sqrt{6}) = \frac{4800}{1000 \cdot 6\sqrt{6}} > 0 \quad \text{Mínimo}$$

Las dimensiones pedidas son, por tanto,  $(6 + 10\sqrt{6})\text{cm}$ . y  $\left(4 + 10\sqrt{\frac{8}{3}}\right)\text{cm}$ .

Sea una cartulina cuadrada de 60cm de lado, se desea construir una caja de base cuadrada, sin tapa, recortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando. Comprobar que para que la caja sea de máxima capacidad, los cuadrados deben tener 10cm de lado.



Se forma una caja de base cuadrada y lado  $60 - 2x$  y altura  $x$  cm.

$$V = S_{\text{base}} \cdot h = (60 - 2x)^2 \cdot x = 3600 + 4x^3 - 240x^2$$

$$V' = 3600 - 480x + 12x^2 ; \quad V' = 0 \text{ (máximo o mínimo)}$$

$$12x^2 - 480x + 3600 = 0 ; \quad x^2 - 40x + 300 = 0$$

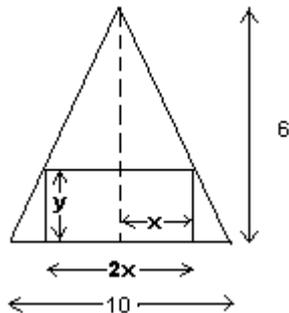
$$x = \frac{40 \pm \sqrt{(1600 - 1200)}}{2} = \frac{40 \pm \sqrt{400}}{2} = \frac{40 \pm 20}{2} \rightarrow x = 30$$

$$\rightarrow x = 10$$

Si  $x$  fuera 30cm, me quedaría sin cartulina por lo que  $x = 10\text{cm} \rightarrow V' = 0$

$$V'' = 24x - 480 ; \quad V''(10) = 24 \cdot 10 - 480 < 0 \rightarrow \text{máxima capacidad.}$$

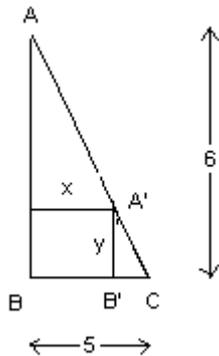
**Se considera un triángulo isósceles de base 10cm y altura 6cm. Se inscribe en él un rectángulo de base 2x sobre la base del triángulo. Calcular la base del rectángulo inscrito para que su área sea máxima.**



Quiero que sea máxima

$$S = 2x \cdot y$$

Hay 2 triángulos ABC Y A'B'C semejantes:  $AB / A'B' = AC / B'C$



$$6 / y = 5 / (5 - x) ; 30 - 6x = 5y ; y = (30 - 6x) / 5 \rightarrow \text{condición}$$

$$S = 2x \cdot (30 - 6x) / 5 = (60x - 12x^2) / 5$$

$$S' = (1/5) \cdot (60 - 24x) ; S' = 0 \text{ (máximo o mínimo)}$$

$$60 - 24x = 0 ; 24x = 60 ; x = 60/24 = 2,5\text{cm}$$

$$y = (30 - 6 \cdot 2,5) / 5 = 3 \text{ cm}$$

La base del rectángulo es 2x, es decir, 5cm, y la altura es de 3cm para que el área inscrita sea máxima.

$$\text{Comprobación} \rightarrow S'' = (1/5) \cdot (-24) = -24 / 5$$

$$S''(2,5) < 0 \rightarrow \text{máximo}$$

**Se desea construir una caja sin tapa con base cuadrada, empleando  $108 \text{ cm}^2$  de cartón. Hallar las dimensiones de la caja de volumen máximo**

Sean las dimensiones :  $x$  , lado del cuadrado base , y altura  $z$

**Función a optimizar**  $V = x^2 z$

**Función de condición** La superficie total es  $S = x^2 + 4 x z = 108 \text{ cm}^2$

De esta ecuación  $\Rightarrow z = 108 - x^2 / 4 x$  y se sustituye en  $V = x^2 z$

$$V = (1/4x) \cdot x^2 \cdot (108 - x^2) = 1/4 x \cdot (108 - x^2) = 1/4 (108 x - x^3)$$

$$V' = 1/4 (108 - 3x^2) \quad \text{Como } V' = 0 \quad \rightarrow \quad 108 - 3x^2 = 0$$

$$3x^2 = 108 \quad \rightarrow \quad x^2 = 36 \quad x = \pm 6 \quad \text{El valor } x = -6 \text{ no es valido}$$

Comprobación del carácter del extremo :

$$V''(x) = 1/4 3(- 6x) = - 3/2 x$$

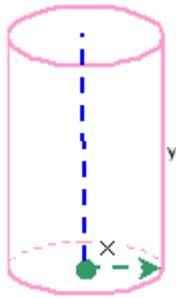
$$V''(6) = -9 < 0 \quad \text{máximo para } x = 6$$

$$\text{La altura será : } z = (108 - 36) / 4 \cdot 6 \quad \rightarrow \quad z = 72 / 24 = 3$$

La caja tiene de dimensiones  $6^2 \text{ cm}^2 \times 3 \text{ cm}$  : base cuadrada de lado 6 cm, altura 3 cm

$$V = 108 \text{ cm}^3$$

Se desea construir un depósito de latón, con forma de cilindro, de  $S_t=54 \text{ m}^2$ . Determinar el radio de la base y la altura del cilindro para que el volumen sea máximo.



Llamamos  $x$  al radio del círculo (base) e  $y$  a la altura. El dato es el área total (condición) y la incógnita que deseamos máximo es el volumen.

$$S_t = 2S_b + S_e \rightarrow S_b = \pi x^2 \rightarrow S_e = 2\pi xy$$

$$S_t = 2\pi x^2 + 2\pi xy = 54 \rightarrow \pi x^2 + \pi xy = 27 \rightarrow \pi xy = 27 - \pi x^2 \rightarrow y = \frac{27 - \pi x^2}{\pi x}$$

$$V = x(27 - \pi x^2) = 27x - \pi x^3$$

$$V' = 27 - 3\pi x^2 \rightarrow V' = 0 \rightarrow 3\pi x^2 = 27 \rightarrow x^2 = \frac{9}{\pi} \rightarrow x = \pm \frac{3}{\sqrt{\pi}}$$

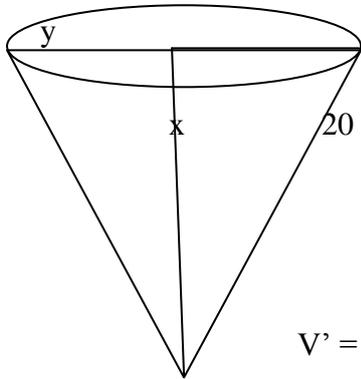
El valor negativo no vale, pues el radio es positivo.

$$V'' = -6\pi x \rightarrow V''\left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}\right) = -6\pi \cdot \frac{3}{\sqrt{\pi}} < 0 \rightarrow V \text{ es máximo para } x = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \text{ m}$$

$$y = \frac{27 - \pi \frac{9}{\pi}}{\pi \frac{3}{\sqrt{\pi}}} = \frac{18\sqrt{\pi}}{3\pi} = \frac{9\sqrt{\pi}}{\pi} = \frac{9}{\sqrt{\pi}} \text{ m}$$

$$\text{El volumen máximo será } V = \pi \frac{9}{\pi} \frac{9}{\sqrt{\pi}} = \frac{81}{\sqrt{\pi}} \text{ m}^3$$

Se desea construir un embudo cónico de generatriz 20 cm. Determinar la altura del embudo de forma que su volumen sea máximo.



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 x \text{ Necesito poner } V \text{ en función de } X.$$

$$r = \sqrt{20^2 - x^2} = \sqrt{400 - x^2}$$

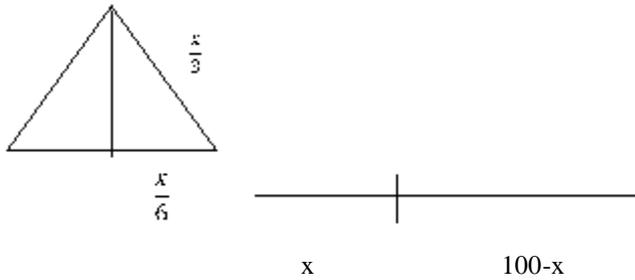
$$V = \frac{1}{3} \pi (400 - x^2)x = \frac{400\pi}{3} x - \frac{\pi}{3} x^3$$

$$V' = -\frac{3\pi}{3} x^2 + \frac{400\pi}{3} \quad \text{Para que } V' = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{400\pi}{3\pi}; x = \pm \frac{20}{\sqrt{3}}$$

El - no vale pues ~~z~~ alturas negativas  $x = \frac{20}{\sqrt{3}}$

$$V'' = -2\pi x; V''\left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right) = -2\pi \frac{20}{\sqrt{3}} < 0 \Rightarrow \text{El volumen es máximo para } x = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

Se divide un alambre de 100m de longitud en dos segmentos de longitudes  $x$  y  $100-x$ . Con el de longitud  $x$  se forma un triángulo equilátero y con el otro segmento se forma un cuadrado. Siendo  $f(x)$  la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado: a) Determina el dominio de la función  $f(x)$ , es decir, los valores que puede tomar  $x$ . b) Con el estudio de la derivada  $f(x)$ , obtén cuando  $f(x)$  es creciente y decreciente. c) Indica razonadamente para que valor de  $x$  se obtiene la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado es mínima.



$$f(x) = S_{\Delta} + S_{\square} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot h + \left(\frac{100-x}{4}\right)^2$$

$$h = \sqrt{\frac{x^2}{9} - \frac{x^2}{36}} = \sqrt{\frac{27x^2}{36}} = \frac{3\sqrt{3}x}{6} = \frac{\sqrt{3}x}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{6}x \cdot \frac{\sqrt{3}x}{2} + \frac{(100-x)^2}{16} = \frac{\sqrt{3}}{12}x^2 + \frac{(100-x)^2}{16}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot 2x - \frac{2(100-x)}{16} = \frac{\sqrt{3}}{6}x - \frac{100-x}{8} > 0 \text{ Creciente.}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{6} > 0 \quad \frac{100-x}{8}; 4\sqrt{3}x > 300 - 3x; (4\sqrt{3} + 3)x > 300$$

$$x > \frac{300}{4\sqrt{3}+3} > 17.8 \text{ Creciente.}$$

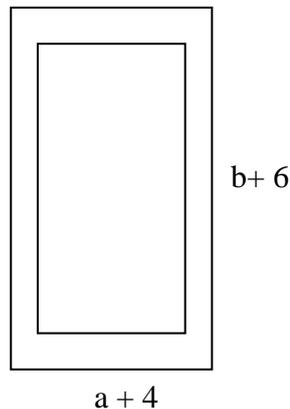
$$S_{\min} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{100-x}{8} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{100-x}{4} \rightarrow 4\sqrt{3}x = 300 - 3x \rightarrow x = \frac{300}{4\sqrt{3}+3} = 17.8$$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{8} > 0 \forall x \rightarrow x = 17.8 \text{ hay mínimo de suma de áreas.}$$

$$\text{Cómo } D: \forall x \in (0,100) \begin{cases} (0,17.8) \rightarrow y'(x_0) < 0 \rightarrow \text{Decreciente} \\ (17.8,100) \rightarrow y'(x_0) > 0 \rightarrow \text{Creciente} \end{cases}$$

**Una página ha de contener  $96 \text{ cm}^2$  de zona impresa. Los márgenes superior e inferior han de tener 3 cm de anchura y los laterales 2 cm. Halla las dimensiones de la página para que el papel requerido sea mínimo**

La gráfica será de la forma :



Si llamamos  $a$  a la anchura y  $b$  a la altura de la zona escrita, la función  $f$ , superficie total del papel, a optimizar será :

$$f(a, b) = (a + 4)(b + 6)$$

$$f(a, b) = ab + 6a + 4b + 24$$

La condición es que la zona escrita ha de tener  $96 \text{ cm}^2$ :

$$ab = 96 \rightarrow b = 96 / a$$

$$f(a, b) = a \cdot (96 / a) + 6a + 4 \cdot (96 / a) + 24 = 96 + 6a + 384 / a + 24$$

$$f(a, b) = 120 + 6a + 384 / a$$

$$f'(a, b) = 6 - 384 / a^2 \rightarrow 6 - 384 / a^2 = 0 \rightarrow 6a^2 = 384 \rightarrow a^2 = 64$$

$$a = 8 \quad \text{y} \quad b = 12$$

La solución  $a = -8$  carece de sentido porque se refiere a una longitud

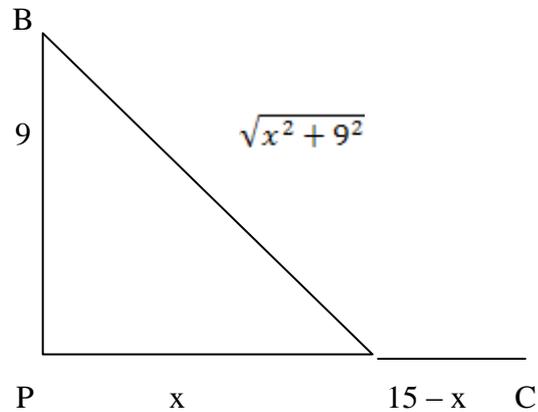
La zona escrita ha de tener 8 cm x 12 cm

El papel tendrá unas dimensiones de  $(8 + 4) \text{ cm} \times (12 + 6) \text{ cm} = 12 \times 18 = 216 \text{ cm}^2$

Un barco B está anclado a 9 km del puerto más cercano P de una costa que forma línea recta, y a 15 km del punto P hay un campamento C. un mensajero debe ir desde el barco al campamento. Teniendo en cuenta que puede remar a una velocidad de 4 km/h; halla el punto Q de la costa, entre P y C, en el que debe desembarcar, para llegar al campamento lo antes posible.

$$V_{BQ} = 4 \text{ km/h}$$

$$V_{QC} = 5 \text{ km/h}$$



$$\sqrt{x^2 + 9^2} = 4t_1$$

$$15 - x = 5t_2$$

$$t = t_1 + t_2$$

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + 81}}{4} + \frac{15 - x}{5} \quad t_{\min}$$

$$t' = \frac{1}{4} \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 81}} + \frac{1}{5} (-1) \quad t' = 0$$

$$\frac{2x}{4\sqrt{x^2 + 81}} = \frac{1}{5}; \quad 5x = 4\sqrt{x^2 + 81}$$

$$25x^2 = 16(x^2 + 81)$$

$$9x^2 = 16 \times 81; \quad x^2 = \frac{16 \times 81}{9} = 16 \times 9$$

$$x = 4 \times 3 = 12 \text{ km}$$

La distancia PQ debe ser de 12 km para que el tiempo sea mínimo.

**Un bote de conserva de tomate ha de tener una capacidad de 1 litro. Se pide la proporción entre su altura y el diámetro de su base para que la superficie de latón sea mínima**

**Función a optimizar**  $S_T = 2 \pi r^2 + 2 \pi r h = 2 \pi r (r + h)$

**Función de condicion** El volumen ha de ser de 1 litro = 1 dm<sup>3</sup>

$$V = \pi r^2 h \quad \Rightarrow \pi r^2 h = 1 \quad \Rightarrow h = 1 / \pi r^2$$

Sustituyendo este valor de  $h$  en la superficie a optimizar, obtenemos :

$$S_T = 2 \pi r^2 + 2 \pi r / \pi r^2 = 2 \pi r^2 + 2 / r \quad \text{es la función a optimizar, en función de } r$$

Derivamos  $S_T' = 4 \pi r - 2 / r^2 = (4 \pi r^3 - 2) / r^2$

$$S_T' = 0 \quad \rightarrow \quad (4 \pi r^3 - 2) = 0 \quad \rightarrow \quad r^3 = 1 / 2\pi \quad \rightarrow \quad r = \sqrt[3]{1 / 2\pi}$$

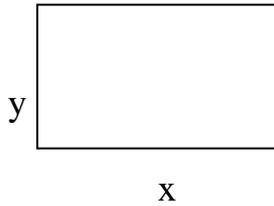
Queda tan sólo por comprobar que la superficie es mínima , calculando la  $S_T''$

$$S_T'' = 4\pi + 4 / r^3 \quad S_T''(r) = 4\pi + 4 / (1/2\pi) = 12 \pi > 0 \quad \text{luego si es minimo}$$

En el caso estudiado  $r = 0,542 \text{ dm}$  y la  $h = 1,084 \text{ dm}$

*La altura del un bote cilíndrico circular ha de ser igual que el diámetro de la base para que la superficie total sea mínima para un volumen fijo cualquiera.*

**Un pastor desea cerrar un recinto rectangular usando 100 m de cerca. ¿Cuál es la mayor área que puede encerrar?**



El perímetro es de 100 m y el área será  $S = x \cdot y$  que es lo que queremos que sea máximo.

La condición es que  $p = x + y + x + y = 2x + 2y = 100$  ;  $x + y = 50$  ;  $y = 50 - x$

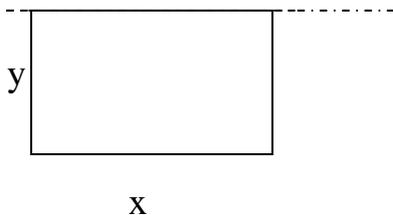
y sustituyo en S  $S = x \cdot (50 - x) = 50x - x^2$  ; derivo S.  $S' = 50 - 2x$

$$S' = 0 ; 50 - 2x = 0 ; 2x = 50 ; x = 25 ; y = 50 - 25 \quad \boxed{y = 25}$$

estas son las dimensiones del area máxima, ya que  $S'' = -2$  ;  $S''(25) = -2 < 0$  max.

El valor de  $S_{max.} = 25 \cdot 25 = 625 \text{ m}^2$

**Un pastor desea cerrar un recinto circular usando 100m de cerca nueva. Aprovecha para uno de los lados una valla ya existente (muy larga). ¿Cuál es la mayor área que puede encerrar?**



Los 100 m se usan para cerrar los tres lados libres del rectángulo.

La condición será  $x + 2y = 100$  El  $S = x \cdot y$  es lo que queremos que sea máxima.

Despejo  $x = 100 - 2y$  de la condición y sustituyo en S

$$S = (100 - 2y)y = 100 \cdot y - 2y^2 \quad S' = 100 - 4y ; S' = 0 ; 100 - 4y = 0 ; 4y = 100 ;$$

$y = 25$  y como  $S'' = -4$  ;  $S''(25) = -4 < 0$  máxima área para  $y = 25$

$$x = 100 - 2 \cdot 25 = 100 - 50 \rightarrow \boxed{x = 50}$$

El área máxima será  $S = 50 \cdot 25 = 1250 \text{ m}^2$