CONTINUIDAD Y LÍMITES DE FUNCIONES

1. En cada apartado, representa una función f(x) que cumpla:

a)

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$

b)

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -3$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 5$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$f(x)$ es una función par

2. Califica cada una de las siguientes aseveraciones como **cierta** (explicando en qué concepto te basas) o **falsa** (poniendo un ejemplo que la contradiga)
   a) Si f (2) = 3 necesariamente se cumple que $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$
   b) Si $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$ necesariamente se cumple que f(2) = 3
   c) Si una función está definida en todos los reales, necesariamente debe ser continua en cualquiera de sus puntos.

3. Estudia el dominio, las discontinuidades y esboza la gráfica de $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{Si } x \le -1 \\ 1-x^2 & \text{Si } -1 < x \le 2 \\ \dfrac{1}{x-3} & \text{Si } x > 2 \end{cases}$

4. Estudia el dominio, las discontinuidades y esboza la gráfica de $f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{Si } x \le -1 \\ \dfrac{3x}{4x^2-1} & \text{Si } -1 < x < 0 \\ x^2-3x & \text{Si } x \ge 0 \end{cases}$.

5. Estudia el dominio, las asíntotas de la función y representa gráficamente la función: $f(x) = \dfrac{6-x^2-x}{x^2+3x}$

6. Halla: a) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^5-1}{x^7-1}$ b) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3+8}{x^2+4x+4}$ c) $\lim_{x\to 2} \dfrac{1-\sqrt{x^2-3}}{x-2}$ d) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{2x^2-5x-3}$

7. Estudia el dominio, las discontinuidades y esboza la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+3x-4}$

8. Estudia el dominio, las asíntotas de la función y esboza la gráfica de $f(x) = \dfrac{2}{1-e^x}$

9. ¿Para qué valores de *a* la función $f(x) = \begin{cases} x+a & \text{Si } x \le 1 \\ 3-ax^2 & \text{Si } x > 1 \end{cases}$ es continua en x = 1?

10. Dada la función: $f(x) = \dfrac{ax^2+b}{x^3+2ax^2+bx+3}$ se pide:
    a) Determinar *a* y *b* sabiendo que la función *f(x)* presenta una discontinuidad evitable en el punto x = 1
    b) Definir una función *g(x)* que sea continua en x = 1 y que coincida con *f(x)* en el dominio de definición de ésta.

11. Obtener la expresión analítica de una función *f*(x) que en x = -3 tenga una discontinuidad evitable, en x = 1 tenga una discontinuidad asintótica con $\lim_{x\to +1} f(x) = +\infty$ y además $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 3$

12. Un comerciante vende determinado producto. Por cada unidad de producto cobra la cantidad de 5€. No obstante, si se le encargan mas de 10 unidades, decide disminuir el precio por unidad y cobra $\sqrt{ax^2+500}$ € por *x* unidades. Por lo tanto el precio de compra de *x* unidades viene dado por la función:

$$c(x)=\begin{cases}5x & \text{si } 0<x\leq 10\\ \sqrt{ax^2+500} & \text{si } \quad x>10\end{cases}$$

Se pide:

a) El valor de *a* para que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.

b) Define la función U(*x*) 'precio por unidad'

c) ¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compran "muchísimas" unidades?

13. La puntuación obtenida por un estudiante en un examen depende del tiempo (t expresado en horas) que haya dedicado a su preparación en los siguientes términos: $p(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{3} & \text{Si } 0\leq t\leq 15\\ \dfrac{20t}{2t+30} & \text{Si t} >15\end{cases}$

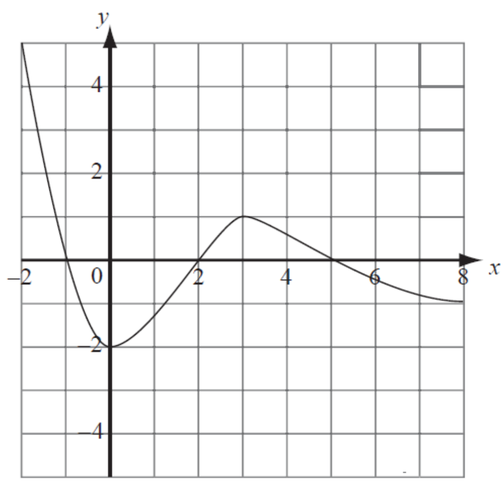
a) Comprueba que la función es continua

b) Demuestra que la función p(t) es creciente en todo su dominio. (*Sugerencia: divide 20t entre 2t + 30*)

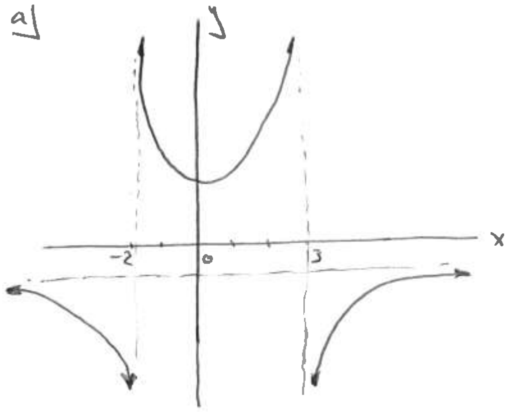
c) Comprueba que si un estudiante ha dedicado menos de 15 horas su puntuación será inferior a 5 puntos

d) Justifica que la puntuación nunca podrá ser superior a 10 puntos

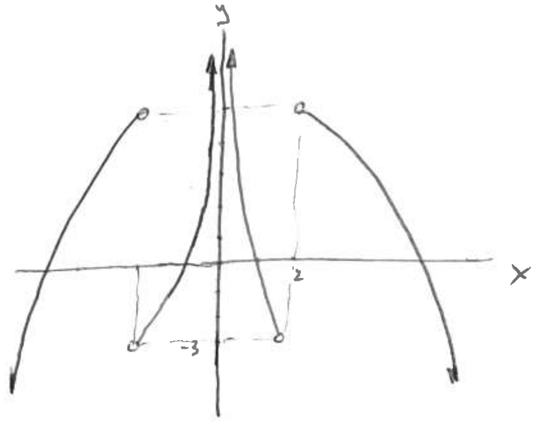
14. En el diagrama se muestra la gráfica de una función f(x) para -2 < x < 8. Esboza la gráfica de 1/f(x) rotulando las asíntotas y los puntos máximos o mínimos relativos:



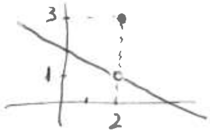
1) a)



b)

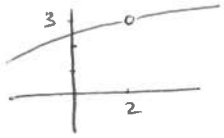


2) a) **Falsa**. Por ejemplo:



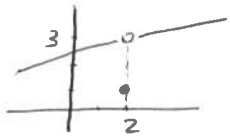
Sería $f(2)=3$, pero $\lim_{x\to 2} f(x) = 1 \neq 3$

b) **Falsa**. Por ejemplo:



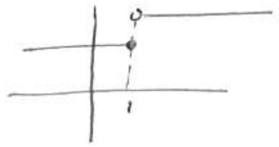
En que $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$, pero no existe $f(2)$

ó también:



En que $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$, pero $f(2) = 1 \neq 3$

c) **Falsa**. Podría tener discontinuidades:



Está definida en $\mathbb{R}$ pero no es continua en $x=1$

3) $x-3=0 \rightarrow x=3$ $\quad \text{dom} f = (-\infty,-1] \cup (-1,2] \cup (2,+\infty) - \{3\} = \boxed{\mathbb{R} - \{3\}}$

- $f(x)$ es continua en $(-\infty,-1) \cup (-1,2) \cup (2,+\infty) - \{3\}$ por tener expresiones polinómicas y racionales. No será continua en $x=3$, por anularse el denominador. Quedan por estudiar $x=-1$ y $x=2$.
- En $x=-1$:

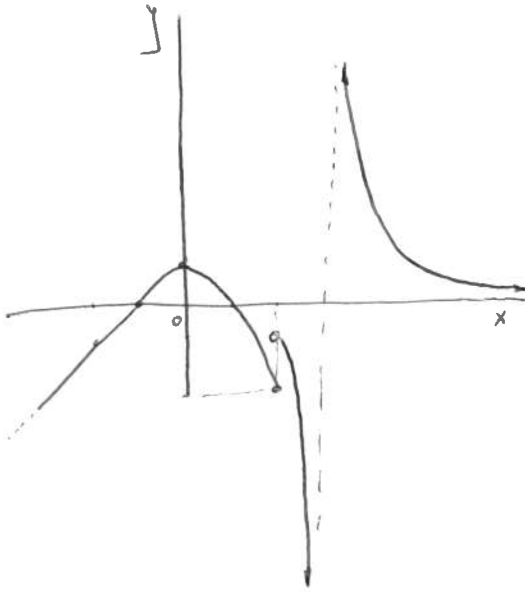
$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -1^-} f(x) = -1+1 = 0 \\ f(-1) = -1+1 = 0 \\ \lim_{x\to -1^+} f(x) = 1-(-1)^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \text{ es continua en } x=-1$$

- En $x=2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x) = 1-2^2 = -3 \\ f(-2) = 1-2^2 = -3 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{1}{2-3} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \text{ tiene una discontinuidad de } \underline{\text{salto finito}} \text{ en } x=2$$

- En $x=3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 3^-} f(x) = \frac{1}{3^- - 3} = \frac{1}{-0} = -\infty \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = \frac{1}{3^+ - 3} = \frac{1}{+0} = +\infty \end{array}\right\} f(x) \text{ tiene una discontinuidad de } \underline{\text{salto infinito}} \text{ en } x=3$$



$\boxed{f(x) \text{ es continua en } \mathbb{R} - \{3,2\}}$

Para esbozar la gráfica: $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty + 1 = -\infty$; $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty - 3} = \frac{1}{+\infty} = 0$

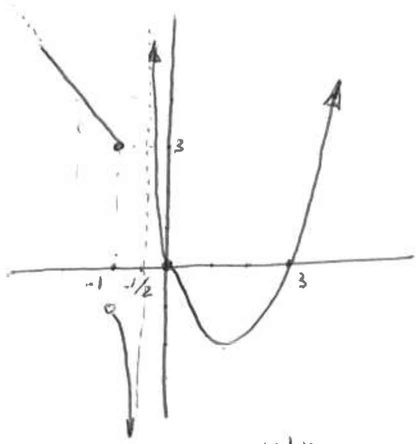
④ $4x^2-1=0$; $4x^2=1$; $x^2=\frac{1}{4}$; $x = \begin{cases}\cancel{\frac{1}{2}} & \text{porque } \frac{1}{2} \notin (-1,2] \\ -\frac{1}{2} & \end{cases}$

$\mathrm{dom} f = (-\infty,-1] \cup (-1,0) - \{-1/2\} \cup [0,+\infty) = \boxed{\mathbb{R}-\{-1/2\}}$

- $f(x)$ es continua en $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)-\{-1/2\}$ por tener expresiones polinómicas y racionales. No es continua en $x=-\frac{1}{2}$ por anularse el denominador, queda por estudiar $x=-1$, $x=0$.

- En $x=-1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 2-(-1)=3 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \frac{-3}{4-1} = \frac{-3}{3} = -1 \\ f(-1) = 2-(-1)=3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ $f(x)$ tiene una discontinuidad de salto finito en $x=-1$



- En $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \frac{0}{-1} = 0 \\ f(0) = 0^2-3\cdot 0 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0^2-3\cdot 0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ $f(x)$ es continua en $x=0$

x	y
0	0
1'5	-2'25
3	0

- $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1/2^-} f(x) = \frac{-3/2}{+0} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -1/2^+} f(x) = \frac{-3/2}{-0} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$ $f(x)$ tiene una discontinuidad de salto infinito en $x=-1/2$

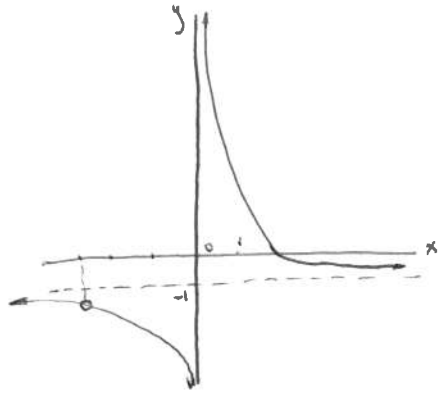
$\boxed{f(x) \text{ es continua en } \mathbb{R}-\{-1,-1/2\}}$

Para esbozar la gráfica: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2-(-\infty)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

⑤ $f(x) = \dfrac{6-x^2-x}{x^2+3x}$

$x^2+3x=0$; $x = \begin{cases} 0 \\ -3 \end{cases}$ $\boxed{\mathrm{dom} f = \mathbb{R}-\{0,-3\}}$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -1 \rightarrow$ $\boxed{\text{Asíntota Horizontal } y=-1}$



$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \frac{6}{-0} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{6}{+0} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow$$ $\boxed{\text{Asíntota Vertical } x=0}$

$\lim\limits_{x\to -3} f(x) = \frac{6-9+3}{9-9} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x\to -3} \frac{\cancel{(x+3)}(-x+2)}{x\cancel{(x+3)}} = \frac{5}{-3} \rightarrow$ Discontinuidad Evitable en $x=-3$

$$\begin{array}{r|rrr} & -1 & -1 & 6 \\ -3 & & +3 & -6 \\ \hline & -1 & 2 & \underline{|0} \end{array}$$

⑥ a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5-1}{x^7-1} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(\cancel{x-1})(x^4+x^3+x^2+x+1)}{(\cancel{x-1})(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)} = \boxed{\dfrac{5}{7}}$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x^2+4x+4} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(\cancel{x+2})(x^2-2x+4)}{(\cancel{x+2})(x+2)} =$

$= \dfrac{12}{0} = \boxed{\infty}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & 8 \\ -2 & & -2 & 4 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 4 & 4 \\ -2 & & -2 & -4 \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1-\sqrt{x^2-3}}{x-2} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(1-\sqrt{x^2-3})(1+\sqrt{x^2-3})}{(x-2)(1+\sqrt{x^2-3})} =$

$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1-(x^2-3)}{(x-2)(1+\sqrt{x^2-3})} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4-x^2}{(x-2)(1+\sqrt{x^2-3})} =$

$= \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(\cancel{x-2})(-x-2)}{(\cancel{x-2})(1+\sqrt{x^2-3})} = \dfrac{-4}{2} = \boxed{-2}$

$$\begin{array}{r|rrr} & -1 & 0 & 4 \\ 2 & & -2 & -4 \\ \hline & -1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{2x^2-5x-3} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(\cancel{x-3})(x+1)}{(\cancel{x-3})(2x+1)} = \boxed{\dfrac{4}{7}}$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -2 & -3 \\ 3 & & 3 & 3 \\ \hline & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 2 & -5 & -3 \\ 3 & & 6 & 3 \\ \hline & 2 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

⑦ $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+3x-4}$

$x^2+3x-4=0 \;;\; x = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$ $\boxed{\text{dom} f = \mathbb{R} - \{1,-4\}}$

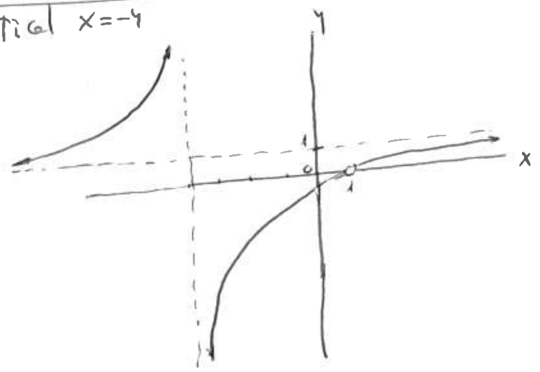
$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^{\cancel{2}}}{(\cancel{x-1})(x+4)} = \dfrac{0}{5} = 0 \to$ $\boxed{\text{Discontinuidad Evitable en } x=1}$

$\lim\limits_{x\to -4^-} f(x) = \dfrac{16+8+1}{16-12-4} = \dfrac{25}{+0} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -4^+} f(x) = \dfrac{25}{-0} = -\infty$

$\to$ $\boxed{\text{Discontinuidad de Salto Infinito en } x=-4}$

Asíntota Vertical $x=-4$



$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 1 \to$ Asíntota Horizontal $y=1$

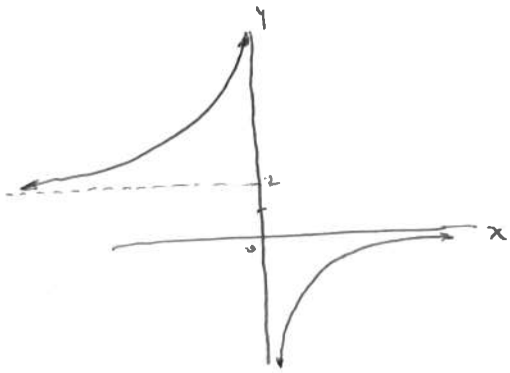
⑧ $f(x) = \dfrac{2}{1-e^x}$

$1-e^x=0 \;;\; e^x=1 \;;\; x=0 \to \boxed{\text{dom} f = \mathbb{R} - \{0\}}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \dfrac{2}{1-e^0} = \dfrac{2}{+0} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{2}{1-e^0} = \dfrac{2}{-0} = -\infty$

Asíntota Vertical $x=0$



$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \dfrac{2}{1-e^{-\infty}} = \dfrac{2}{1-0} = 2 \to$ Asíntota Horizontal $y=2$ cuando $x\to-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \dfrac{2}{1-e^{+\infty}} = \dfrac{2}{-\infty} = 0 \to$ Asíntota Horizontal $y=0$ cuando $x\to+\infty$

(13) a)

• Las expresiones son polinómica y racional, por lo tanto definidas y continuas salvo que se anule el denominador:

$2t+30=0 \rightarrow t=\cancel{-15}$ porque $-15 \not> 10$

• Sólo queda estudiar $t=15$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{t \to 15^-} P(t) = \frac{15}{3} = 5 \\ P(15) = \frac{15}{3} = 5 \\ \lim_{t \to 15^+} P(t) = \frac{20 \cdot 15}{2 \cdot 15 + 30} = \frac{300}{60} = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow P(t) \text{ también es continua en } t=15.$$

b) $\frac{t}{3}$ es creciente por tratarse de una recta con pendiente positiva: $\frac{1}{3}$

$$\frac{20t}{2t+30} = 10 - \frac{300}{2t+30}$$

$$\begin{array}{r|l} 20t & 2t+30 \\ \hline -20t-300 & 10 \\ -300 & \end{array}$$

$10 - \frac{300}{2t+30}$ va creciendo conforme aumenta t, ya que es sustraendo se hace cada vez más pequeño, aumenta el valor de la resta.

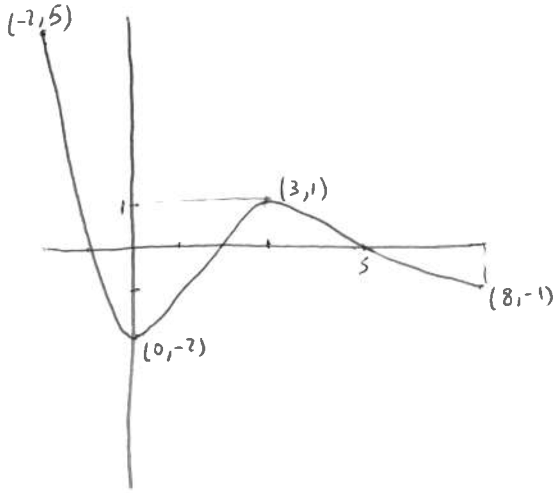
c) Al ser $P(t)$ creciente y continua, como $P(15)=5$, para $t<15 \Rightarrow P(t)<5$

d) Al ser $P(t)$ creciente y continua, su mayor valor lo alcanzaría con valores infinitos de t:

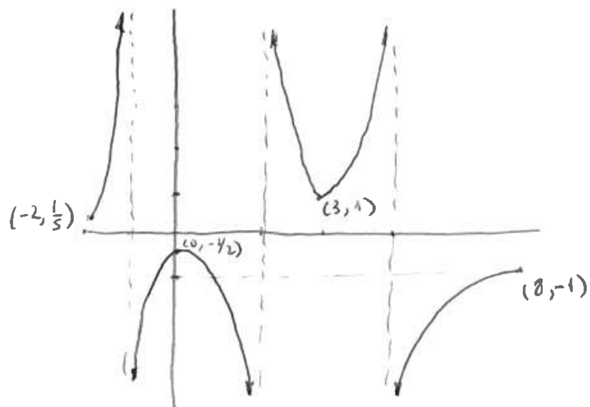
$$\lim_{t \to +\infty} P(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{20t}{2t+30} = \frac{20}{2} = \boxed{10}$$

Puntuación a la que tendería con ¡infinitas horas! de estudio.

(14)



x	f
-2	5
-1	0
0	-2
2	0
3	1
5	0
8	-1



x	1/f
-2	1/5
-1	~~X~~
0	-1/2
2	~~X~~
3	1
5	~~X~~
8	-1