Examen de Matrices y determinantes 2ºBach CCSS

Nombre:

1.- [2017] Dada la matriz $M \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Realiza el producto $M \cdot M^t$, siendo ésta última la transpuesta de M.

b) Despeja X en la siguiente ecuación matricial $P \cdot X \quad M \cdot M^t$.

c) Si $P \quad \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, obtén la expresión de la matriz X del apartado anterior.

2.-

a) Siendo A,B y X matrices cuadradas, despeja X en la ecuación $X \cdot B \cdot A - X \cdot A \quad I$, simplificando lo más posible la expresión que resulte.
b) Siendo $A \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \; y \; B \quad \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ resuelve la ecuación $A \cdot X \quad B$.

3.- [2013] Dada la matriz $A \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 2 & 1 & a^2 - 1 \end{pmatrix}$

a) Calcular razonadamente el rango de la matriz A en función del parámetro a.
b) Explicar si la matriz tiene inversa para el caso a=1 y en caso de que exista calcularla.

4.- [2013] Dada la matriz $A \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & m \\ m & 1 & 3 \\ 1 & 7 & m \end{pmatrix}$

a) Estudia el rango de A en función de los valores del parámetro m (enteros).
b) Para m=0 halla la matriz inversa de A.

1

a) $M \cdot M^t = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (-2 \ -1) = \begin{pmatrix} 4 & +2 \\ +2 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{0'75}$

b) $P \cdot X = M \cdot M^t \rightarrow P^{-1} P X = P^{-1} M \cdot M^t \rightarrow \boxed{X = P^{-1} M M^t}$ $\boxed{0,75}$

c) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ $\boxed{0,25}$ $\quad P^{-1} = \dfrac{Adj(A)^t}{|A|} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{\underline{X}} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 22 & 11 \\ -16 & -8 \end{pmatrix}}}$

$Adj(P) = \begin{pmatrix} +4 & -3 \\ +3 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad Adj(P)^t = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad |\cancel{A}| = -8+9 = 1$

$\boxed{0,25}$ $\quad \boxed{0,25}$ $\quad \boxed{0,25}$

2

a) $X \cdot B \cdot A - X \cdot A = I \rightarrow X(BA - A) = I \rightarrow$

$\rightarrow X \cdot (BA - A) \cdot (BA-A)^{-1} = I \cdot (BA-A)^{-1} \rightarrow \boxed{X = (BA-A)^{-1}}$

$\boxed{\cancel{1,25}}$

b) $A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} A X = A^{-1} B \rightarrow X = A^{-1} B$ $\boxed{\cancel{0,25}}$

$A^{-1} = \dfrac{Adj(A)^t}{|A|} = \dfrac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & \cancel{2} 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -3/10 & 1/10 \end{pmatrix}$

$Adj(A) = \begin{pmatrix} +4 & -3 \\ +2 & +1 \end{pmatrix}$ $\quad Adj(A)^t = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad |A| = 4+6 = 10$

$\boxed{0,25}$ $\quad \boxed{0,25}$ $\quad \boxed{0,25}$

$X = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ -3/10 & 1/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/5 & 20/10 \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2x2

$\boxed{0,25}$

③ a) Aplicamos Gauss:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 2 & 1 & a^2+1 \end{pmatrix} \underset{F_3+2F_1}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & a^2+1 \end{pmatrix} \underset{F_2 \leftrightarrow F_3}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a^2+1 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \underset{F_3-aF_2}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a^2+1 \\ 0 & 0 & -a^3-a \end{pmatrix}$$

$a^2+1 \neq 0$ Siempre

$-a^3-a=0 \Rightarrow -a(a^2+1)=0 \rightarrow \boxed{a=0}$; $\boxed{a^2+1=0}$ No existe.

Para $\boxed{a=0}$ Rango de la matriz 2

Para $\boxed{a \neq 0}$ Rango de la matriz 3

Aplicación del método correctamente $\boxed{0,25}$

Obtención de los valores del parámetro $\boxed{0,5}$

Resolución del ejercicio $\boxed{0,5}$

b) $a=1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Por el apartado a) ó

por el $|A| \neq 0$ el rango de A es 3 y tiene inversa. $\boxed{0,5}$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)^t}{|A|} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}$$ $\boxed{0,25}$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ +1 & -2 & +1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad Adj(A)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{0,5}$

$|A| = -2$

(4)

a) Por determinantes:

$|1| \neq 0$ Rango de $A \geq 1$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & m \\ m & 1 & 3 \\ 1 & 7 & m \end{vmatrix} = \cancel{m} + 7m^2 + 9 - \cancel{m} - 21 - 3m^2 = 4m^2 - 12 = 0$$

$4m^2 = 12 \to m^2 = 3 \to m = \pm\sqrt{3}$

- Si $m \neq \pm\sqrt{3}$ Rango de A es 3
- Si $m = \pm\sqrt{3}$ Rango de A es 2 $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ \pm\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = 1 \pm \sqrt{3} \neq 0$

Aplicación del método correctamente $\boxed{0,25}$

Obtención de los valores del parámetro $\boxed{0,5}$

Resolución del ejercicio $\boxed{0,5}$

b) $\boxed{m = 0}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)^t}{|A|} = \boxed{\frac{-1}{12} \begin{pmatrix} -21 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}}$$ $\boxed{0,5}$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -21 & +3 & -1 \\ 0 & +0 & -4 \\ 9 & -3 & +1 \end{pmatrix}$$ $\boxed{0,25}$

$$Adj(A)^t = \begin{pmatrix} -21 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$ $\boxed{0,25}$

$|A| = 9 - 21 = -12$

$\boxed{0,25}$