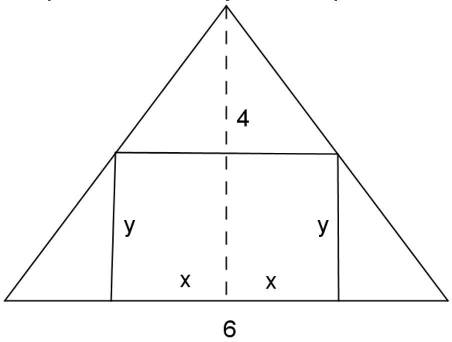
Opción A

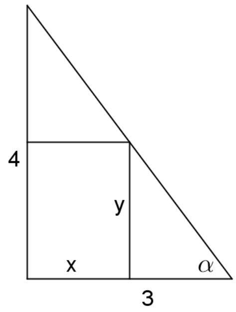
Ejercicio 1 opción A, modelo 1 Junio 2013, específico 2

[2'5 puntos] Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en un triangulo isósceles de 6 metros de base (el lado desigual) y 4 metros de alto.

Solución

Es un problema de optimización. Leyendo el problema tenemos las siguientes figuras:





La función a maximizar es Área = A(x,y) = 2x.y

Relación entre variables: tag(α) = 4/3 (Triángulo grande) = y/(3 – x) [triángulo pequeño], de donde obtenemos y/(3 – x) = 4/3, por tanto y = (12 – 4x)/3 luego A(x) = 2x.y = 2x·(12 – 4x)/3 = (24x – 8x^2)/3.

A '(x) = (1/3).(24 – 16x)

De A '(x) = 0, tenemos 24 – 16x = 0, es decir x = 3/2 = 1'5.

Luego *el rectángulo tiene de base 2x = 3 m*. y *de altura y* = (12 – 4(1'5))/3 = *2 m*.

Veamos que es un máximo, es decir A''(1'5) < 0

A ''(x) = (1/3).(–16) = -16/3 < 0, independientemente del valor de "x", luego es un máximo.

Ejercicio 2 opción A, modelo 1 Junio 2013, específico 2

Sean f y g las funciones definidas por $f(x) = 2 - x$ y $g(x) = \dfrac{2}{x+1}$ para $x \neq -1$.

a) [0'5 puntos] Calcula los puntos de corte entre las gráficas de f y g.
b) [0'5 puntos] Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes.
c) [1'5 puntos] Halla el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Solución

Sean f y g las funciones definidas por $f(x) = 2 - x$ y $g(x) = \dfrac{2}{x+1}$ para $x \neq -1$.

a)

Calcula los puntos de corte entre las gráficas de f y g.

Igualamos ambos funciones y resolvemos la ecuación que nos quede.

f(x) = g(x) $\Rightarrow$ $2 - x = \dfrac{2}{x+1}$ $\Rightarrow$ (2-x)(x+1) = 2 $\Rightarrow$ -x^2 + x + 2 = 2 $\Rightarrow$ -x^2 + x = 0 = x(-x+1), de donde tenemos las soluciones x = 0 y x = 1

b)

Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes.

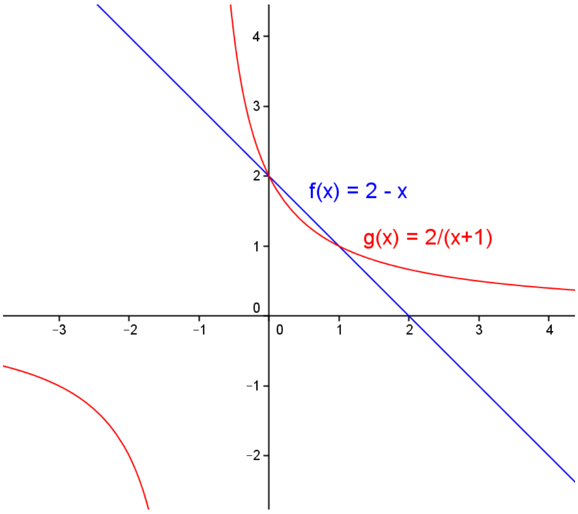
Sabemos que la gráfica de f es una recta, y con dos puntos es suficiente. El (0,2) y el (1,1).

La gráfica de g es un hipérbola luego está enfrentada respecto a sus asíntotas.

Como $\lim_{x\to -1^+} \dfrac{2}{x+1}$ = 2/0$^+$ = + ∞ la recta x = -1 es una asíntota vertical de g

Como $\lim_{x\to \pm\infty} \dfrac{2}{x+1}$ = 2/(±∞) = 0, la recta y = 0 es una asíntota horizontal (A.H.) de g. En + ∞ g está por encima de y = 0 (A.H.), y en - ∞, g está por debajo de y = 0 (A.H.).

Sabemos que pasa por (0,2), (1,1) y el (-2,-2). Con estos datos es suficiente para dibujarla



c)
Halla el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Ya hemos calculado los puntos de corte de f con g que son x = 0 y x = 1, luego el área pedida es:
Área = $\int_0^1(f(x) - g(x))\cdot dx = \int_0^1(2-x - 2/(x+1))\cdot dx = [\, 2x-x^2/2-2\ln(x+1)\,]_0^1 = (2 - 1/2 - 2\ln(2)) - (0-0-0) =$
$= 3/2 - 2\ln(2) \cong 0'1137\ u^2$.

Ejercicio 3 opción A, modelo 1 Junio 2013, específico 2

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ x - y + mz &= m - 2 \\ mx + y + 3z &= m - 2 \end{aligned}$$

a) [1'75 puntos] Discute el sistema según los valores del parámetro m.
b) [0'75 puntos] Resuélvelo, si es posible, para m = 2.

Solución

a)
Discute el sistema según los valores del parámetro m.

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & m \\ m & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & m-2 \\ m & 1 & 3 & m-2 \end{pmatrix}$.

Si det(A) = |A| ≠ 0, rango(A) = rango(A^*) = 3 = nº de incógnitas. El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & m \\ m & 1 & 3 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila $= (1)(-3-m) - (2)(3-m^2) + (1)(1+m) = -3 - m - 6 + 2m^2 + 1 + m) = 2m^2 - 8.$

Resolviendo la ecuación $2m^2 - 8 = 0$, obtenemos m = -2 y m = 2.

Si **m ≠ -2 y m ≠ 2**, det(A) = |A| ≠ 0, rango(A) = rango(A^*) = 3 = nº de incógnitas. **El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

Si **m = -2**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2.

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila $= (1)(4+4) - (2)(-4-8) = 8 + 24 = 32 \neq 0$, tenemos rango($A^*$) = 3. Como rango(A) = 2 ≠ rango(A^*) = 3, **el sistema es incompatible y no tiene solución.**

Si **m = 2**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2.

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ = 0, por tener una columna de ceros tenemos rango(A^*) = 2. Como rango(A) = = rango(A^*) = 2 < número de incógnitas, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

b)

Resuélvelo, si es posible, para m = 2.

Hemos visto en el apartado anterior que si **m = 2**, rango(A) = rango(A^*) = 2, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

Como el rango es 2, sólo necesitamos 2 ecuaciones. (Tomo las del menor de A distinto de cero con el que hemos determinado el rango, es decir la 1ª y la 2ª).

$x + 2y + z = 0 \quad \rightarrow \quad x + 2y + z = 0$

$x - y + 2z = 0.\ F_2 - F_1 \rightarrow \quad -3y + z = 0$. Tomo **y = a** $\in$ R, de donde **z = 3a**, y entrando en la 1ª ecuación tenemos $x + 2(a) + (3a) = 0 \rightarrow$ **x = -5a**

Solución (x,y,z) = (-5a, a, 3a) con a $\in$ R.

Ejercicio 4 opción A, modelo 1 Junio 2013, específico 2

[2'5 puntos] Determina el punto de la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{2} = z + 1$ que equidista de los planos

$$\pi_1 \equiv x - y + 3z + 2 = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2 \equiv \begin{cases} x = -4 + \lambda - 3\mu \\ y = 1 + \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

Solución

Ponemos el plano π_2 en su forma general det(**x-a,u,v**) = 0, donde **a** = (−4,1,0), **u** = (1,1,0) y **v** = (-3,0,1).

$\pi_2 \equiv$ det(**x-a,u,v**) = 0 = $\begin{vmatrix} x+4 & y-1 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila = (x+4)(1) – (y-1)(1) + (z)(3) = x - y + 3z + 5 = 0.

Sabemos que la distancia de un punto $P(p_1,p_2,p_3)$ a un plano $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ es

$d(P, \pi) = \dfrac{|\, a(p_1)+b(p_2)+c(p_3)+d \,|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, donde | | es el valor absoluto.

Ponemos la recta "r" en forma vectorial, para lo cual necesitamos un punto suyo, el B y un vector director, el **w**.

Como "r" $\equiv \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{2} = z + 1$, un punto de la recta es el B(1,0,-1) y un vector director es **w** = (3,2,1).

La recta en forma vectorial es "r" $\equiv$ (x, y, z) = (1+3δ,2δ,-1+δ), con δ un número real cualquiera.

Un punto genérico de la recta "r" es X = (1+3δ,2δ,-1+δ).

Como me piden los puntos de "r" que equidistan de π_1 y π_2, tengo que resolver la ecuación:

$d(X, \pi_1) = d(X, \pi_2)$, con X punto genérico de "r".

Recuerdo que $\pi_1 \equiv x - y + 3z + 2 = 0$, $\pi_2 \equiv x - y + 3z + 5 = 0$ y X = (1+3δ,2δ,-1+δ).

Observamos que los planos son paralelos pues tienen el mismo vector normal (1,-1,3).

$$d(X, \pi_1) = \frac{|\,(1+3\delta) - (2\delta) + 3(-1+\delta) + 2\,|}{\sqrt{1^2+1^2+3^2}} = \frac{|\,4\delta\,|}{\sqrt{11}}$$

$d(X, \pi_2) = \dfrac{|\,(1+3\delta) - (2\delta) + 3(-1+\delta) + 5\,|}{\sqrt{1^2+1^2+3^2}} = \dfrac{|\,4\delta+3\,|}{\sqrt{11}}$

Igualando tenemos $\dfrac{|\,4\delta\,|}{\sqrt{11}} = \dfrac{|\,4\delta+3\,|}{\sqrt{11}}$, es decir $|4\delta| = |4\delta + 3|$, de donde salen dos ecuaciones:

$(4\delta) = +(4\delta + 3)$, de donde $0 = 3$, **lo cual es absurdo.**

$(4\delta) = -(4\delta + 3)$, de donde $8\delta = -3$, es decir $\delta = -3/8$, y el punto de la recta que equidista de ambos planos es $X(1+3(-3/8),2(-3/8),-1+(-3/8))$ = **$X(-1/8,-6/8,-11/8)$.**

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 1 Junio 2013, específico 2

Sea f la función definida por $f(x) = x\cdot e^{\frac{1}{x}}$ para $x \ge -1$, $x \ne 0$.

a) [1 punto] Calcula los límites laterales de f en $x = 0$.

b) [1'5 puntos] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

Solución

Sea f la función definida por $f(x) = x\cdot e^{\frac{1}{x}}$ para $x \ge -1$, $x \ne 0$.

a)

Calcula los límites laterales de f en $x = 0$.

$\lim_{x\to 0^+} x\cdot e^{\frac{1}{x}} = 0\cdot e^{\frac{1}{0^+}} = 0\cdot e^{+\infty} = 0\cdot(+\infty)$. Indeterminación.

$\lim_{x\to 0^+} x\cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1/x}$ = {+∞/+∞; le aplicamos L'Hôpital (L'H)} = $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{(-1/x^2)e^{\frac{1}{x}}}{(-1/x^2)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty$.

Luego **x = 0 es una asíntota vertical** de la gráfica de f.

$\lim_{x\to 0^-} x\cdot e^{\frac{1}{x}} = 0\cdot e^{\frac{1}{0^-}} = 0\cdot e^{-\infty} = 0\cdot \dfrac{1}{e^{+\infty}} = 0\cdot \dfrac{1}{+\infty} = 0\cdot 0 = 0$.

b)

Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

Como $\lim_{x\to 0^+} x\cdot e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, **la recta x = 0 es una asíntota vertical de f**

Como $\lim_{x\to +\infty} x\cdot e^{\frac{1}{x}} = +\infty\cdot e^{\frac{1}{+\infty}} = +\infty\cdot e^0 = +\infty\cdot 1 = +\infty$, la función f **no tiene asíntota horizontal** (A.H.) en + ∞.

Como la función está definida a partir de $x \ge -1$, no podemos hacer el estudio en - ∞.

Veamos si tiene asíntota oblicua (A.O.) $y = mx + n$, con $m = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to +\infty} (f(x) - mx)$.

$m = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{x\cdot e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^0 = 1$.

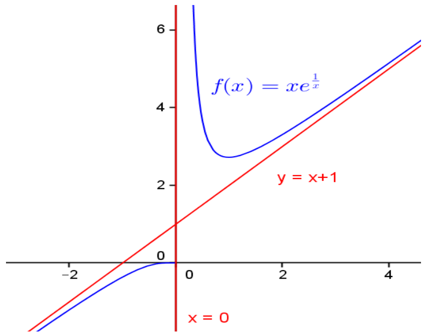
$n = \lim_{x\to +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to +\infty} \left(x\cdot e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x\to +\infty} x\cdot \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \{+\infty\cdot 0\} = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{1/x}$ = {0/0; L'H} =

$= \lim_{x\to +\infty} \dfrac{(-1/x^2)e^{\frac{1}{x}}}{(-1/x^2)} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^0 = 1$.

La A.O. en + ∞ es la recta y = $mx + n$ = **$x + 1$**.

Como $\lim_{x\to +\infty} (f(x) - \text{A.O.}) = \lim_{x\to +\infty} \left(x\cdot e^{\frac{1}{x}} - x - 1 \right) = 0^+$, la gráfica de f está por encima de la A.O: en + ∞.

Aunque no me lo piden un esbozo de la gráfica de f es:



Ejercicio 2 opción B, modelo 1 Junio 2013, específico 2

[2'5 puntos] Calcula $\int_2^4 \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x}} \cdot dx$. *Sugerencia*: se puede hacer el cambio de variable t = $\sqrt{e^x}$

Solución

Calculamos primero la integral indefinida

I = $\int \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x}} dx$ Nos dan el cambio t = $\sqrt{e^x}$, es decir $t^2 = e^x$, luego $2t \cdot dt = e^x\, dx$, y sustituyendo nos queda

I = $\int \frac{2t}{1+t} dt$, que es una integral racional. Dividimos y descomponemos en factores simples el denominador si hiciese falta.

$$\begin{array}{r|l} 2t & t+1 \\ \cline{2-2} -2t-2 & 2 \\ \cline{1-1} -2 & \end{array}$$

Recordamos que I = ∫ ((C(t)) + R(t)/(div(t))dt = ∫ 2dt + $\int \frac{-2}{t+1} dt$ = 2t – 2·ln|t + 1| = {quito el cambio t = $\sqrt{e^x}$ } =

= $2\sqrt{e^x} - 2\cdot\ln|\sqrt{e^x} + 1|$.

La integral pedida es $\int_2^4 \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x}} \cdot dx = \left[2\sqrt{e^x} - 2\ln\left|\sqrt{e^x}+1\right|\right]_2^4$ =

= $\left(2\sqrt{e^4} - 2\ln\left|\sqrt{e^4}+1\right|\right) - \left(2\sqrt{e^2} - 2\ln\left|\sqrt{e^2}+1\right|\right) \cong$ 7'714215894.

Ejercicio 3 opción B, modelo 1 Junio 2013, específico 2

Sea M una matriz cuadrada de orden 3 tal que su determinante es det(M) = 2. Calcula:
a) [0'5 puntos] El rango de M^3.
b) [0'75 puntos] El determinante de $2M^t$ (M^t es la matriz traspuesta de M).
c) [0'75 puntos] El determinante de $(M^{-1})^2$.
d) [0'5 puntos] El determinante de N, donde N es la matriz resultante de intercambiar la primera y segunda filas de M.

Solución

Sabemos que si A y B son cuadradas entonces, det(A) = |A|, |AB| = |A||B|, $|A^{-1}|$ = 1/|A| (de A.B = I, y |I|=1), $|k.A_n| = k^n.|A|$, $|A^t| = |A|$, y si $|B_3| \neq 0$, rango(B) = 3.

Sea M una matriz cuadrada de orden 3 tal que su determinante es det(M) = 2. Calcula:
a)
El rango de M^3.
Como $|M^3| = |M\cdot M\cdot M| = = |M|\cdot|M|\cdot|M| = (2)^3 = 8 \neq 0$, tenemos que rango($M^3$) = 3.
b)
El determinante de $2M^t$ (M^t es la matriz traspuesta de M).
$|2M^t| = (2)^3.|M^t| = 8.|M| = (8)(2) = 16$.
c)
El determinante de $(M^{-1})^2$.
$|(M^{-1})^2| = |(M^{-1})\cdot(M^{-1})| = |(M^{-1})\cdot|(M^{-1})| = (1/|M|)\cdot(1/|M|) = (1/|M|^2 = 1/2^2 = 1/4$.
d)
El determinante de N, donde N es la matriz resultante de intercambiar la primera y segunda filas de M.

Sabemos que si cambiamos dos filas (columnas) entre si el determinante cambia de signo
$|N| = -|M| = -2$.

Ejercicio 4 opción B, modelo 1 Junio 2013, específico 2

Considera los puntos A(0,5,3), B(−1,4,3), C(1,2,1) y D(2,3,1).
a) [1'75 puntos] Comprueba que los cuatro puntos son coplanarios y que ABCD es un rectángulo.
b) [0'75 puntos] Calcula el área de dicho rectángulo.

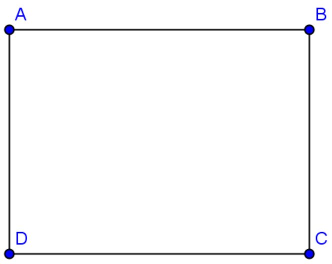
Solución

Considera los puntos A(0,5,3), B(−1,4,3), C(1,2,1) y D(2,3,1).
a)
Comprueba que los cuatro puntos son coplanarios y que ABCD es un rectángulo.

Para ver si son coplanarios, con los puntos A B y C formamos un plano y después comprobamos si el punto D pertenece a dicho plano.
La ecuación del plano está determinada por un punto, el A(0,5,3), y dos vectores independientes, el **AB** = (-1,-1,0) y **AC** = (1, -3,-2)

La ecuación general del plano es $\pi \equiv 0 = \det(\mathbf{AX}, \mathbf{AB}, \mathbf{AC}) = \begin{vmatrix} x & y-5 & z-3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila $= x(2)-(y-5)(2) + (z-3)(4) =$

$= 2x - 2y + 4z - 2 = 0$.
Como $2(2) - 2(3) + 4(1) - 2 = 0$, el punto D(2,3,1) pertenece al plano $\pi \equiv 2x - 2y + 4z - 2 = 0$, y los cuatro puntos son coplanarios.
Viendo la figura



ABCD es un rectángulo si los vectores **AB** y **DC** son iguales, y además **AB** es perpendicular ($\perp$) al **BC**.
A(0,5,3), B(−1,4,3), C(1,2,1) y D(2,3,1).
AB = (-1,-1,0), **DC** = (-1,-1,0), luego **AB** = **DC**
AB es $\perp$ al **BC** si **AB•BC** = 0 (producto escalar **•)**
AB = (-1,-1,0), **BC** = (2,-2,-2). **AB•BC** = (-1,-1,0)•(2,-2,-2) = -2 + 2 + 0 = 0, luego son perpendiculares y la figura ABCD es un rectángulo.
b)
Calcula el área de dicho rectángulo. Sabemos que el área de un rectángulo es la base por la alturra, es decir
Área = ||**DC**||·||**BC**|| = $\sqrt{1^2+1^2+0^2}\sqrt{2^2+2^2+2^2} = \sqrt{2}\sqrt{12} = \sqrt{24}$ u^2.