

Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo 2 Junio 2010

Sea f la función definida como $f(x) = (ax^2 + b) / (a - x)$ para $x \neq a$.

(a) [1'5 puntos] Calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto $(2,3)$ y tenga una asíntota oblicua con pendiente -4 .

(b) [1 punto] Para el caso de $a = 2$, $b = 3$, obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$

Solución

Sea f la función definida como $f(x) = (ax^2 + b) / (a - x)$ para $x \neq a$.

(a)

Como f pasa por el punto $(2,3)$ tenemos que $f(2) = 3$.

Como f tiene una asíntota oblicua ($y = mx + n$) con pendiente -4 , me están diciendo que $m = -4$, pero también sabemos que $m = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) / x]$.

De $-4 = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) / x]$ tenemos $-4 = \lim_{x \rightarrow \infty} [(ax^2 + b) / (ax - x^2)] = -a$, luego **$a = 4$** .

De $f(2) = 3$ tenemos $3 = (4 \cdot 2^2 + b) / (4 - 2) = (16 + b) / 2$, de donde **$b = -10$** .

(b)

Si $a = 2$ y $b = 3$, tenemos $f(x) = (2x^2 + 3) / (2 - x)$ para $x \neq 2$.

La recta tangente en $x = 1$ es $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

$f(x) = (2x^2 + 3) / (2 - x)$, luego $f(1) = 5/1 = 5$

$f'(x) = [(4x) \cdot (2 - x) - (2x^2 + 3)(-1)] / (2 - x)^2$, luego $f'(1) = (4 + 5) / (1)^2 = 9$, por tanto la recta tangente pedida es $y - 5 = 9(x - 1)$.

Ejercicio 2 opción A, modelo 2 Junio 2010

[2'5 puntos] Calcula $\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x}) dx$

Sugerencia: Efectúa el cambio $\sqrt{x} = t$.

Solución

Calculamos primero la integral indefinida

$I = \int \sin(\sqrt{x}) dx = \{ \text{cambio } \sqrt{x} = t; x = t^2 \text{ y } dx = 2t dt \} = \int \sin(t) \cdot 2t dt = 2 \cdot \int t \cdot \sin(t) dt = 2 \cdot I_1$, donde I_1 es una integral por partes ($\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$)

$I_1 = \int t \cdot \sin(t) dt = \{ u = t \text{ y } dv = \sin(t) dt, \text{ de donde } du = dt \text{ y } v = \int \sin(t) dt = -\cos(t) \} = -t \cdot \cos(t) - \int -\cos(t) dt = -t \cdot \cos(t) + \sin(t)$

Luego $I = 2 \cdot I_1 = 2 \cdot [-t \cdot \cos(t) + \sin(t)] + K = \{ \text{quito cambio } \sqrt{x} = t \} =$

$= 2 \cdot [-(\sqrt{x}) \cdot \cos(\sqrt{x}) + \sin(\sqrt{x})] + K$

Calculamos ya la integral original

$\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x}) dx = 2 \cdot [-(\sqrt{x}) \cdot \cos(\sqrt{x}) + \sin(\sqrt{x})]_0^{\pi^2} =$

$= 2 \cdot [(-\sqrt{\pi^2} \cdot \cos(\sqrt{\pi^2}) + \sin(\sqrt{\pi^2})) - (-(\sqrt{0}) \cdot \cos(\sqrt{0}) + \sin(\sqrt{0}))] =$

$= 2 \cdot [((-\pi)(-1) + 0) - (0 + 0)] = 2\pi$

Ejercicio 3 opción A, modelo 2 Junio 2010

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

(a) [0'5 puntos] Indica los valores de m para los que A es invertible.

(b) [2 puntos] Resuelve la ecuación $XA - B^t = C$ para $m = 0$. (B^t es la matriz traspuesta de B)

Solución

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a)

A es invertible si y solamente si $\det(A) = |A| \neq 0$.

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{Primera} \\ \text{fila} \end{array} = 1(-m^2 - 3) - 0 + (-1)(-4m) = -m^2 + 4m - 3.$$

Si $|A| = 0$, $-m^2 + 4m - 3 = 0$. Resolviendo esta ecuación nos sale $m = 1$ y $m = 3$.
Para $m \neq 1$ y $m \neq 3$, A es invertible y existe A^{-1} .

(b)

Resuelve la ecuación $XA - B^t = C$ para $m = 0$.

$XA = B^t + C$. Como existe A^{-1} multiplicamos ambos miembros por la derecha por A^{-1} .

$XAA^{-1} = (B^t + C)A^{-1}$, operando nos queda $X = (B^t + C)A^{-1}$.

Calculamos A^{-1} , con $m = 0$

$$A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^T)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{fila} \end{array} = (-3)(1) = -3.$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 12 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^T) = \left(\frac{-1}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 12 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Calculamos } (B^t + C) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = (B^t + C)A^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{-1}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 12 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 12 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 opción A, modelo 2 Junio 2010

Considera las rectas "r" y "s" de ecuaciones

$$x - 1 = y = 1 - z \quad \text{y} \quad \begin{cases} x - 2y = -1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

(a) [0'75 puntos] Determina su punto de corte.

(b) [1 punto] Halla el ángulo que forma "r" y "s".

(c) [0'75 puntos] Determina la ecuación del plano que contiene a "r" y "s".

Solución

(a)

Ponemos las rectas en paramétricas (cada una con un parámetro distinto) y de cada una tomamos un punto y un vector

De la recta "r", que en continua es " $(x - 1)/1 = y/1 = (z - 1)/(-1)$ ", tomamos el punto

$$A(1,0,1) \text{ y el vector director } \mathbf{u} = (1,1,-1). \text{ Su ecuación paramétrica es } \begin{cases} x = 1 + a \\ y = 0 + a \\ z = 1 - a \end{cases} \text{ con "a"}$$

número real.

$$\text{De la recta "s"} \begin{cases} x - 2y = -1 \\ y + z = 1 \end{cases}, \text{ tomando } y = b \text{ (nº real) tenemos } \begin{cases} x = -1 + 2b \\ y = 0 + b \\ z = 1 - b \end{cases}. \text{ Un punto}$$

será $B(-1,0,1)$ y un vector director $\mathbf{v} = (2,1,-1)$.

Me han dicho que se cortan, no obstante vamos a comprobar que es cierto viendo que

$$\det(\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$$

$$\mathbf{AB} = (-2,0,0)$$

$$\det(\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \text{ por tener la columna } 2^a \text{ y } 3^a \text{ proporcionales.}$$

Para obtener el punto de corte igualamos ambas rectas en paramétricas, y resolvemos el sistema de 3 ecuaciones con dos incógnitas. ($x = x$, $y = y$, $z = z$)

$$1 + a = -1 + 2b$$

$$a = b$$

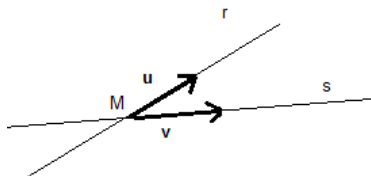
$$1 - a = 1 - b$$

Utilizamos la 1ª y la 2ª

$$1 + a = -1 + 2a, \text{ de donde } \mathbf{a = 2 = b}, \text{ que evidentemente verifica la 3ª ecuación.}$$

El punto de corte de las rectas es $M(1+2, 2, 1-2) = M(3, 2, -1)$

(b)



Sabemos que el ángulo que forman dos rectas es el menor de los ángulos que forman sus vectores de dirección, por lo cual tomamos valor absoluto en el coseno.

$\cos(r, s) = |\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})| = |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| / (|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|) = 4 / (\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}) = 4 / \sqrt{18}$. Luego el ángulo que forman las rectas es $(r, s) = \arccos[4/\sqrt{18}] \approx 19'47''12''$.

$\mathbf{u} = (1, 1, -1)$, $\mathbf{v} = (2, 1, -1)$, de donde

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2 + 1 + 1 = 4; \quad |\mathbf{u}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}, \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

(c)

Para determinar un plano π necesitamos un punto y dos vectores independiente o bien un punto y un vector normal. En nuestro caso tomamos el punto de corte $M(3, 2, -1)$ y los vectores de dirección de cada recta $\mathbf{u} = (1, 1, -1)$ y $\mathbf{v} = (2, 1, -1)$.

La ecuación del plano en paramétricas es

$$x = 3 + \lambda + 2\mu$$

$$y = 2 + \lambda + \mu$$

$$z = -1 - \lambda - \mu, \text{ con } \lambda \text{ y } \mu \text{ número reales.}$$

La ecuación general del plano π sería

$$\pi = \det(\mathbf{MX}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z+1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = (x-3)(0) - (y-2)(1) + (z+1)(-1) =$$

$$= -y - z + 1 = 0$$

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 2 Junio 2010

[2'5 puntos] Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} [(e^x - e^{\sin x}) / (x^2)]$

Solución

La Regla de L'Hopital (L'H), que dice si $\lim_{x \rightarrow a} [(f(x)/g(x))] = 0/0$, y existe $\lim_{x \rightarrow a} [(f'(x)/g'(x))]$ entonces se verifica que $\lim_{x \rightarrow a} [(f(x)/g(x))] = \lim_{x \rightarrow a} [(f'(x)/g'(x))]$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} [(e^x - e^{\sin x}) / (x^2)] = [(e^0 - e^0) / 0] = 0/0, \text{ L'H}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [(e^x - \cos(x) \cdot e^{\sin x}) / (2x)] = [(e^0 - 1 \cdot e^0) / 0] = 0/0, \text{ L'H}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [(e^x - (-\sin(x) \cdot e^{\sin x} + \cos^2(x) \cdot e^{\sin x})) / (2)] = [(e^0 - (0 \cdot e^0 - 1 \cdot e^0) / 2] = 0/2 = 0$$

Ejercicio 2 opción B, modelo 2 Junio 2010

Considera la función f dada por $f(x) = 5 - x$ y la función g definida como $g(x) = 4/x$ para $x \neq 0$.

(a) [1 punto] Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g indicando sus puntos de corte.

(b) [1'5 puntos] Calcula el área de dicho recinto.

Solución

$$f(x) = 5 - x \quad \text{y} \quad g(x) = 4/x$$

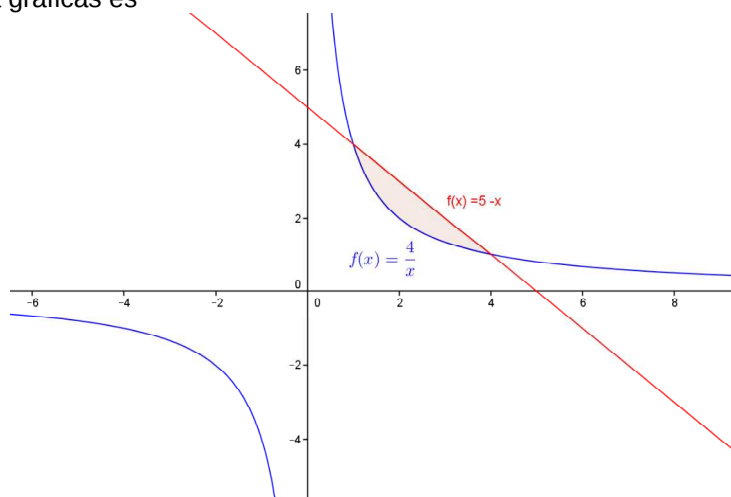
(a)

$f(x) = 5 - x$, es una recta y con dos valores de "x" es suficiente para dibujarla.

$g(x) = 4/x$, es una hipérbola de I y III cuadrante. Le doy dos valores a "x" a la derecha del 0 y dos a la izquierda del 0. Tenemos en cuenta que $x = 0$ es una asíntota vertical y la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

x	$f(x) = 5 - x$	x	$g(x) = 4/x$
5	$f(5) = 0$	1	$g(1) = 4$
0	$f(0) = 5$	2	$g(2) = 2$
		-1	$g(-1) = -4$
		-2	$g(-2) = -2$

Para ver los puntos de corte igualamos $f(x) = g(x)$, es decir $5 - x = 4/x$, de donde $5x - x^2 = 4$, es decir $x^2 - 5x + 4 = 0$. Resolviendo la ecuación obtenemos $x = 1$ y $x = 4$. Un esbozo de la gráficas es



(b)

El área del recinto limitado por las curvas $f(x)$ y $g(x)$ es

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^4 [f(x) - g(x)] dx = \int_1^4 [5 - x - 4/x] dx = [5x - x^2/2 - 4\ln|x|]_1^4 = \\ &= (20 - 8 - 4\ln|4|) - (5 - 1/2 - 4\ln|1|) = (12 - 4\ln(4)) - (9/2 - 0) = 15/2 - 4\ln(4) \text{ u}^2 \end{aligned}$$

Ejercicio 3 opción B, modelo 2 Junio 2010

Sea el siguiente sistema de ecuaciones

$$\lambda x + y + z = \lambda + 2$$

$$2x - \lambda y + z = 2$$

$$x - y + \lambda z = \lambda$$

(a) [1'75 puntos] Discútelos según los valores de λ . ¿Tiene siempre solución?

(b) [0'75 puntos] Resuelve el sistema para $\lambda = -1$.

Solución

(a)

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A^* = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & \lambda+2 \\ 2 & -\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -1 & \lambda & \lambda \end{pmatrix}.$$

Si $\det(A) = |A| \neq 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$. El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda)(-\lambda^2+1) - (1)(2\lambda-1) + (1)(-2+\lambda) = -\lambda^3 - 1. \text{ (Lo he desarrollado por los}$$

adjuntos de la 1ª fila)

Resolvemos $|A| = 0$, es decir $-\lambda^3 - 1 = 0$, de donde $\lambda^3 = -1$ y por tanto $\lambda = -1$

Si $\lambda \neq -1$, tenemos $|A| \neq 0$ con lo cual $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$, y por el teorema de Rouché el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$$\text{Si } \lambda = -1, A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

En A como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A) = 2$

En A^* como la 1ª y 3ª filas son proporcionales tenemos $\text{rango}(A^*) = 2$

Como $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A^*)$, por el teorema de Rouché el sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.

Por tanto el sistema siempre tiene solución

(b)

Nos piden resolverlo si $\lambda = -1$.

Hemos visto que como $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A^*)$, por el teorema de Rouché el sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < n^\circ$ de incógnitas, tenemos sólo dos ecuaciones (las dos primeras, con las que hemos calculado el rango de A) y dos incógnitas principales..

$$-x + y + z = 1$$

$$2x + y + z = 2. \text{ Tomamos } z = \lambda \text{ n}^\circ \text{ real.}$$

A la 2ª ecuación le resto la 1ª tenemos $3x = 1$. De donde $x = 1/3$.

Sustituyendo en $-x + y + z = 1$, nos resulta $-1/3 + y + \lambda = 1$, de donde $y = 4/3 - \lambda$.

La solución del sistema es $(x, y, z) = (1/3, 4/3 - \lambda, \lambda)$ con λ n° real.

Ejercicio 4 opción B, modelo 2 Junio 2010

Los puntos $P(2,0,0)$ y $Q(-1,12,4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice S

pertenece a la recta "r" de ecuación $\begin{cases} 4x + 3z = 33 \\ y = 0 \end{cases}$.

(a) [1'5 puntos] Calcula las coordenadas del punto S sabiendo que "r" es perpendicular a la recta que pasa por P y S.

(b) [1 punto] Comprueba si el triángulo es rectángulo.

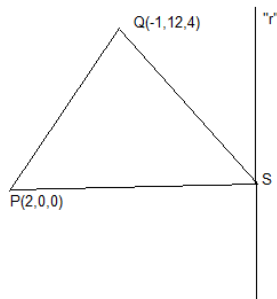
Solución

$P(2,0,0)$ y $Q(-1,12,4)$ vértices de un triángulo. El tercer vértice S pertenece a la recta "r"

de ecuación $\begin{cases} 4x + 3z = 33 \\ y = 0 \end{cases}$.

(a)

Calcula S sabiendo que "r" es perpendicular a la recta que pasa por P y S.



Ponemos la recta "r" en vectorial tomando $x = 3\lambda$ (así la ecuación es divisible por 3), con λ n° real.

$$\text{De } 4(3\lambda) + 3z = 33, \text{ tenemos } z = 11 - 4\lambda$$

La ecuación vectorial es $(x,y,z) = (3\lambda, 0, 11-4\lambda)$ con λ n° real.

Un vector director de la recta es $\mathbf{u} = (3, 0, -4)$

S es un punto genérico de "r", es decir $S(x,y,z) = S(3\lambda, 0, 11-4\lambda)$ con λ n° real.

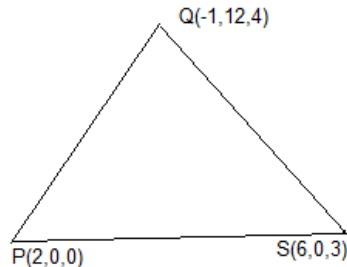
Como la recta que pasa por los puntos P y S es perpendicular a la recta "r", el vector director de "r" que es $\mathbf{u}$ tiene que ser perpendicular al vector $\mathbf{PS}$, es decir su producto escalar tiene que ser cero.

$$\mathbf{PS} = (3\lambda - 2, 0 - 0, 11 - 4\lambda - 0) = (3\lambda - 2, 0, 11 - 4\lambda)$$

$$\mathbf{PS} \cdot \mathbf{u} = 0 = 9\lambda - 6 + 0 - 44 + 16\lambda = 25\lambda - 50 = 0, \text{ de donde } \lambda = 2 \text{ y el punto pedido es } S(6, 0, 11-8) = S(6, 0, 3).$$

(b)

Para ver si el triángulo es rectángulo podemos ver si el lado mayor al cuadrado es la suma de los cuadrados de los otros dos lados (Teorema de Pitágoras), o bien si el producto escalar de los vectores que determinan los lados es cero.



$$\mathbf{PQ} = (-3, 12, 4), \text{ de donde } \|\mathbf{PQ}\| = \sqrt{3^2 + 12^2 + 4^2} = \sqrt{169} = 13$$

$$\mathbf{PS} = (4, 0, 3), \text{ de donde } \|\mathbf{PS}\| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\mathbf{QS} = (7, -12, -1), \text{ de donde } \|\mathbf{QS}\| = \sqrt{7^2 + 12^2 + 1^2} = \sqrt{194}$$

Como $[\sqrt{194}]^2 = [\sqrt{169}]^2 + [\sqrt{25}]^2$, **el triángulo es rectángulo en P.**

También podríamos ver que el producto escalar de $\mathbf{PQ}$ y $\mathbf{PS}$ es cero.