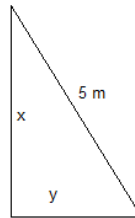


Opción A**Ejercicio 1 opción A, modelo 1 de año 2010**

[2'5 puntos] Entre todos los triángulos rectángulos de 5 metros de hipotenusa, determina los catetos del de área máxima.

Solución

Función a maximizar $A = (1/2)(x)(y)$

Relación entre las variables $x^2 + y^2 = 5^2$, de donde $y = \sqrt{25 - x^2}$, tomamos sólo la solución positiva porque es una longitud.

Función a maximizar $A(x) = (1/2)(x)(\sqrt{25 - x^2})$

Si $A'(b) = 0$ y $A''(b) < 0$, $x = b$ es un máximo de $A(x)$

$A'(x) = (1/2)[(\sqrt{25 - x^2}) - (x^2) / (\sqrt{25 - x^2})]$. De $A'(x) = 0$, tenemos $(\sqrt{25 - x^2})^2 = x^2$, es decir $2x^2 = 25$, de donde $x = \pm \sqrt{25/2}$, y como "x" es una longitud $x = \sqrt{25/2}$ m.

Las medidas de los catetos son $x = \sqrt{25/2}$ m. e $y = (\sqrt{25 - ((\sqrt{25/2})^2)}) = \sqrt{25/2}$ m., es decir es un triángulo isósceles rectángulo.

Veamos que $x = \sqrt{25/2}$ es un máximo, viendo que $A''(\sqrt{25/2}) < 0$

$A'(x) = (\sqrt{25 - x^2}) - (x^2) / (\sqrt{25 - x^2})$.

$A''(x) = (-2x) / ((\sqrt{25 - x^2}) - [2x \cdot (\sqrt{25 - x^2}) + x^3 / (\sqrt{25 - x^2})]) / (25 - x^2)$

Sustituyendo " $\sqrt{25/2}$ " por "x" en $A''(x)$ obtenemos $A''(\sqrt{25/2}) = 72/(3)^3 = -1 - [25 \cdot \sqrt{25/2} + 25/2] / (25/2) < 0$, luego es un máximo.

Ejercicio 2 opción A, modelo 1 de año 2010

[2'5 puntos] Sea $f : (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \ln(x + 2)$. Halla una primitiva F de f que verifique $F(0) = 0$. (ln denota el logaritmo neperiano).

Solución

Una primitiva $F(x)$ es $F(x) = \int \ln(x + 2).dx$, que es una integral por partes ($\int u.dv = u.v - \int v.du$)

Tomamos $u = \ln(x+2)$ de donde $du = dx/(x+2)$, y $dv = dx$ de donde $v = \int dx = x$, luego nos resulta

$F(x) = \int \ln(x + 2).dx = x \cdot \ln(x+2) - \int [x/(x+2)]dx = x \cdot \ln(x+2) - \int [(x+2-2)/(x+2)]dx = x \cdot \ln(x+2) - \int [1 - 2/(x+2)]dx = x \cdot \ln(x+2) - x + 2 \ln|x+2| + K$.

Como $F(0) = 0$, tenemos que $0 = 0 \cdot \ln(2) - 0 + 2 \cdot \ln(2) + K$, de donde $K = -2 \cdot \ln(2)$, y la primitiva pedida es:

$F(x) = x \cdot \ln(x+2) - x + 2 \ln|x+2| - 2 \cdot \ln(2)$.

Ejercicio 3 opción A, modelo 1 de año 2010

Considera el sistema

$$3x - 2y + z = 5$$

$$2x - 3y + z = -4$$

(a) [1'5 puntos] Calcula razonadamente un valor de λ para que el sistema resultante al añadirle la ecuación $x + y + \lambda z = 9$ sea compatible indeterminado.

(b) [1 punto] ¿Existe algún valor de λ para el cual el sistema resultante no tiene solución?

Solución

(a)

Para que al añadirle la ecuación $x + y + \lambda z = 9$, sea un sistema compatible indeterminado, tenemos que tener

$\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) < 3$, que es el nº de incógnitas, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes

del sistema y $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & \lambda & 9 \end{pmatrix}$ la matriz ampliada.

En A como $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 4 \neq 0$, el rango de A ya es 2. Para que el rango de A no sea 3 su determinante ($|A|$) tiene que ser 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_2} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{fila} \end{array} = \lambda(-3-2) = -5\lambda = 0, \text{ de donde } \lambda = 0.$$

Veamos que con $\lambda = 0$ rango(A^*) = 2.

$$\text{En } A^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & \lambda & 9 \end{pmatrix} \text{ como } \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & -9 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_2} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ por tener una fila de}$$

ceros, tenemos rango(A^*) = 2.

Si $\lambda \neq 0$ por el Teorema de Rouché al ser rango(A) = rango(A^*) = 3 = nº de incógnitas, el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

Si $\lambda = 0$ por el Teorema de Rouché al ser rango(A) = rango(A^*) = 2 < nº de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.

En este ejercicio no hay ningún valor de λ para el cual el sistema sea incompatible y no tenga solución, pues tendría que darse rango(A) $\neq$ rango(A^*), lo cual no es nuestro caso.

Ejercicio 4 opción A, modelo 1 de año 2010

Considera los puntos A(1, 0, 2), B(-1, 2, 4) y la recta r definida por

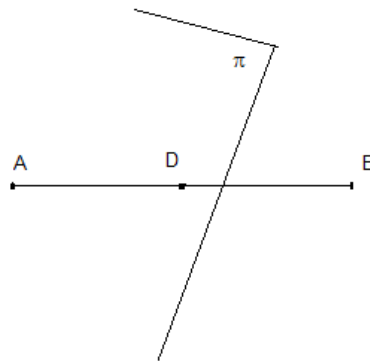
$$(x + 2)/2 = y - 1 = (z - 1)/3$$

(a) [1'5 puntos] Determina la ecuación del plano formado por los puntos que equidistan de A y de B.

(b) [1 punto] Halla la ecuación del plano paralelo a r y que contiene los puntos A y B.

Solución

(a)

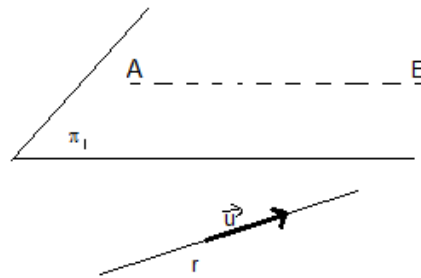


El plano que equidista de los puntos A(1,0,2) y B(-1,2,4) es el perpendicular al segmento AB en su punto medio $D = ((1-1)/2, (0+2)/2, (2+4)/2) = D(0,1,3)$

Como el plano π es perpendicular al segmento un vector normal suyo $\mathbf{n}$ es el vector $\mathbf{AB} = (-1-1, 2-0, 4-2) = (-2, 2, 2)$

Un plano paralelo es $-2x + 2y + 2z + K = 0$, como pasa por D(0,1,3), tenemos $0 + 2 + 6 + K = 0$, de donde $K = -8$, y el plano pedido es $-2x + 2y + 2z - 8 = 0$.

(b)



Como me piden un plano π_1 que contenga a los puntos A y B y además sea paralelo a la recta "r", formamos la recta que pasa por los puntos A y B, después con ella construimos el haz de planos que la contienen como generatriz, consideramos el haz de planos como un plano genérico y le imponemos la condición de que sea paralelo a la recta "r".

Recta que pasa por A y B. Punto el A(1,0,2), vector $\overrightarrow{AB} = (-2,2,2)$

Recta en continua: $(x-1)/(-2) = y/2 = (z-2)/2$. Ponemos ahora la recta en implícita.

Por un lado $(x-1)/(-2) = y/2$, de donde $x+y-1=0$

Por otro lado $y/2 = (z-2)/2$, de donde $y - z + 2 = 0$.

El haz de plano que genera es $(x+y-1) + \lambda(y - z + 2) = x + y(\lambda+1) - \lambda z + 2\lambda - 1 = 0$. Un vector genérico suyo sería $\mathbf{n} = (1, \lambda+1, -\lambda)$.

Como el haz tiene que ser paralelo a la recta "r" el vector $\mathbf{n}$ tiene que ser perpendicular al vector $\mathbf{u}$ de la recta "r", es decir su producto escalar tiene que ser 0, es decir $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0 = 2 + \lambda+1 + 3(-\lambda) = -2\lambda + 3 = 0$, de donde $\lambda = 3/2$, y el plano pedido es $(x+y-1) + (3/2)(y - z + 2) = 0$.

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 1 de año 2010

Sea $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \ln(x^2 + 3x)$, donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano.

(a) [1'5 puntos] Determina, si existen, los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta de ecuación $x - 2y + 1 = 0$.

(b) [1 punto] Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=3$.

Solución

(a)

Como me piden los puntos de $f(x)$ donde la recta tangente es paralela a la recta $x - 2y + 1 = 0$, las pendientes han de ser iguales.

La recta es $y = (x+1)/2$, y su pendiente es $y' = 1/2$

La pendiente genérica de f es $f'(x) = (2x+3)/(x^2+3x)$. Igualando pendientes tenemos:

$(2x+3)/(x^2+3x) = 1/2$, de donde $x^2 - x - 6 = 0$. Resolviendo la ecuación nos sale $x = -2$ y $x = 3$. Como el dominio de la función es $(0, +\infty)$ solo nos vale $x = 3$. El único punto de la recta que cumple la condición pedida es $(3, \ln(18))$.

(b)

$f(x) = \ln(x^2 + 3x)$, de donde $f(3) = \ln(18)$

$f'(x) = (2x+3)/(x^2+3x)$, de donde $f'(3) = 1/2$

Recta tangente en "3" es $y - f(3) = f'(3)(x-3)$, es decir $y - \ln(18) = (1/2)(x-3)$

Recta normal en "3" es $y - f(3) = (-1/f'(3))(x-3)$, es decir $y - \ln(18) = -2(x-3)$

Ejercicio 2 opción B, modelo 1 de año 2010

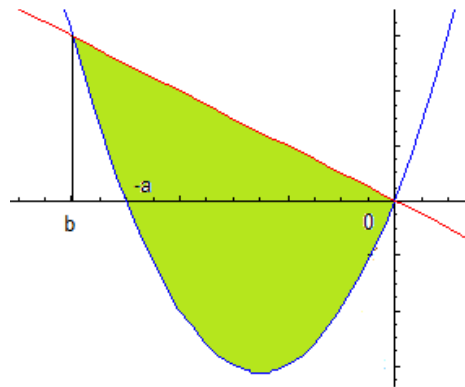
[2'5 puntos] Calcula el valor de $a > 0$ sabiendo que el área del recinto comprendido entre la parábola $y = x^2 + ax$ y la recta $y + x = 0$ vale 36 unidades cuadradas.

Solución

Sabemos que la recta $y = -x$ es la bisectriz del II y IV cuadrante.

La parábola $y = x^2 + ax$ tiene las ramas hacia arriba, corta al eje OX en $x = 0$ y $x = -a$ (soluciones de $x^2 + ax = 0$).

Un esbozo de la gráfica sería



$$\text{Área} = 36 = \int_b^0 (\text{recta} - \text{parábola}) dx$$

"b" es la solución de recta = parábola, $x^2 + ax = -x$, de donde $x^2 + x(a+1) = x(x + (a+1)) = 0$, de donde las soluciones son $x = 0$ y $x = -a - 1$, es decir

$$36 = \int_b^0 (\text{recta} - \text{parábola}) dx = \int_{-a-1}^0 (-x - x^2 - ax) dx = [-x^2/2 - x^3/3 - ax^2/2]_{-a-1}^0 = (0) - [-(-a-1)^2/2 - (-a-1)^3/3 - a(-a-1)^2] = (a^3 + 3a^2 + 3a + 1)/6 = 36, \text{ de donde } a^3 + 3a^2 + 3a - 215 = 0$$

Utilizando Ruffini, tenemos (probamos con el 5)

	1	3	3	-215
5		5	40	215
	1	8	43	0

Vemos que la raíz es 5, es decir "**a = 5**". Si intentamos resolver la ecuación $x^2 + 8x + 43 = 0$, vemos que no tiene mas soluciones reales.

Ejercicio 3 opción B, modelo 1 de año 2010

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \alpha \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

- (a) [0'5 puntos] Determina los valores de α para los que A tiene inversa.
 (b) [1'25 puntos] Calcula la inversa de A para $\alpha = 1$.
 (c) [0'75 puntos] Resuelve, para $\alpha = 1$, el sistema de ecuaciones $AX = B$.

Solución

(a)

Para que A tenga inversa $A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t)$, su determinante ($|A|$) no puede ser cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \alpha \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{fila} \end{matrix} = 0 - 2(3-3\alpha) + \alpha(1-2\alpha) = -2\alpha^2 + 7\alpha - 6.$$

Si $|A| = 0$, tenemos $-2\alpha^2 + 7\alpha - 6 = 0$, y salen como soluciones $\alpha = 2$ y $\alpha = 3/2$, por tanto **si $\alpha \neq 2$ y $\alpha \neq 3/2$, existe la matriz inversa de A**

(b)

Inversa de A para $\alpha = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t). \text{ Teniendo en cuenta el resultado del apartado (a) tenemos que}$$

$$|A| = -2(1)^2 + 7(1) - 6 = -1$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}; A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(c)

Para $\alpha = 1$ existe A^{-1} y podemos multiplicar por la izquierda la expresión $A \cdot X = B$, obteniendo

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B, \text{ de donde } I \cdot X = X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 opción B, modelo 1 de año 2010

Considera los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(0, -2, 2)$, $C(-1, 0, 2)$ y $D(2, -1, 2)$.

(a) [1 punto] Calcula el volumen del tetraedro de vértices A , B , C y D .

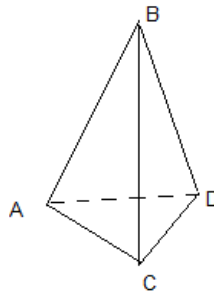
(b) [1'5 puntos] Determina la ecuación de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano que contiene a los puntos A , B y C .

Solución

(a)

$A(1, 1, 1)$, $B(0, -2, 2)$, $C(-1, 0, 2)$ y $D(2, -1, 2)$.

Sabemos que el volumen de un prisma es $1/6$ del volumen del paralelepípedo que determinan dichos vectores, el cual es el valor absoluto (lo notaremos $| \cdot |$) del producto mixto (lo notaremos con corchetes $[\cdot]$) de tres vectores con un mismo origen, en nuestro caso utilizaremos los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$.



$\overrightarrow{AB} = (-1, -3, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, -1, 1)$ y $\overrightarrow{AD} = (1, -2, 1)$

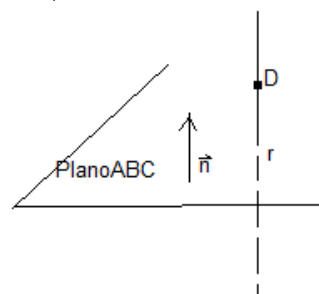
$$\text{Volumen} = (1/6) \cdot | [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] | = (1/6) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix} = (1/6) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (1/6) \cdot | +1(-2-3) | = (1/6) \cdot | -5 | = 5/6 \text{ u.v.}$$

(b)

Determinamos primero el plano que pasa por los puntos A , B y C . Tomo como punto el $A(1,1,1)$ y como vectores independientes $\overrightarrow{AB} = (-1, -3, 1)$ y $\overrightarrow{AC} = (-2, -1, 1)$

$$\text{Plano } \pi_{ABC} = \det(\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} = (x-1)(-2) - (y-1)(1) + (z-1)(-5) = -2x - y - 5z + 8 = 0. \\ \text{fila} \end{matrix}$$



La recta perpendicular al plano tiene como vector director, el vector normal del plano $\mathbf{n} = (-2, -1, 5)$

La recta pedida es $(x-2)/(-2) = (y+1)/(-1) = (z-2)/5$