

Opción A

Ejercicio 1 de la Opción A del Modelo 1 de Sobrantes de 2008

Sean $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x) = x^2 + ax + b \quad \text{y} \quad g(x) = ce^{-(x+1)}$$

Se sabe que las gráficas de f y g se cortan en el punto $(-1, 2)$ y tienen en ese punto la misma recta tangente.

(a) [2 puntos] Calcula los valores de a , b y c .

(b) [0'5 puntos] Halla la ecuación de dicha recta tangente.

Solución

(a)

$$f(x) = x^2 + ax + b \quad \text{y} \quad g(x) = ce^{-(x+1)}$$

Como se cortan en el punto $(-1, 2)$, tenemos $f(-1) = g(-1) = 2$

Como en el punto $(-1, 2)$ tienen la misma recta tangente, tienen la misma pendiente, es decir $f'(-1) = g'(-1)$

$$\text{De } f(-1) = g(-1) = 2$$

$$f(-1) = 1 - a + b = 2$$

$$g(-1) = c \cdot e^0 = 2, \text{ de donde } c = 2$$

$$\text{De } f'(-1) = g'(-1)$$

$$f'(x) = 2x + a, \text{ de donde } f'(-1) = -2 + a$$

$$g'(x) = (-1)2e^{-(x+1)}, \text{ de donde } g'(-1) = (-1)2e^0 = -2, \text{ igualando tenemos } -2 + a = -2, \text{ por tanto } a = 0.$$

Entrando en $1 - a + b = 2$ con $a = 0$, nos resulta $b = 1$.

$$\text{Las funciones son } f(x) = x^2 + 1 \quad \text{y} \quad g(x) = 2e^{-(x+1)}$$

(b)

La recta tangente a $f(x)$ en $x = -1$ es $y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1))$.

$$f(x) = x^2 + 1, f(-1) = 2.$$

$$f'(x) = 2x, f'(-1) = -2.$$

Sustituyendo tenemos que la recta tangente es $y - 2 = -2(x + 1)$

Ejercicio 2 de la Opción A del Modelo 1 de Sobrantes de 2008

[2'5 puntos] Dadas las funciones $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt[3]{x}$$

calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g .

Solución

El área pedida es $\left| \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right|$, siendo a y b las soluciones de $f(x) = g(x)$

De $f(x) = g(x)$, obtenemos $\sqrt{x} = \sqrt[3]{x}$, elevando a la sexta resulta $x^3 = x^2$, de donde $x^3 - x^2 = 0 = x^2(x - 1)$. Las soluciones son $x = 0$ (doble) y $x = 1$.

$$\text{Área} = \left| \int_0^1 (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}) dx \right| = \left| \int_0^1 (x^{1/2} - x^{1/3}) dx \right| = \left| \left[\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} - \frac{x^{1/3+1}}{1/3+1} \right]_0^1 \right| = \left| \frac{2}{3} - \frac{3}{4} \right| = \left| -\frac{1}{12} \right| = \frac{1}{12} u^2$$

Ejercicio 3 de la Opción A del Modelo 1 de Sobrantes de 2008

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$x + \lambda y - z = 0$$

$$2x + y + \lambda z = 0$$

$$x + 5y - \lambda z = \lambda + 1$$

(a) [1'5 puntos] Clasifícalo según los valores del parámetro λ .

(b) [1 punto] Resuélvelo $\lambda = -1$.

Solución

$$x + \lambda y - z = 0$$

$$2x + y + \lambda z = 0$$

$$x + 5y - \lambda z = \lambda + 1$$

(a)

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2 & 1 & \lambda \\ 1 & 5 & -\lambda \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 0 \\ 2 & 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 5 & -\lambda & \lambda+1 \end{pmatrix}$.

Si $\det(A) = |A| \neq 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$. El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2 & 1 & \lambda \\ 1 & 5 & -\lambda \end{vmatrix} = (1)(-\lambda - 5\lambda) - (\lambda)(-2\lambda - \lambda) + (-1)(9) = 3\lambda^2 - 6\lambda - 9. \text{ (Lo he desarrollado por los adjuntos de la}$$

1ª fila)

Resolvemos $|A| = 0$, es decir $3\lambda^2 - 6\lambda - 9 = 0$, de donde $\lambda = -1$ y $\lambda = 3$

Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 3$, tenemos $|A| \neq 0$ con lo cual $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$, y por el teorema de Rouché el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$$\text{Si } \lambda = -1, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En A como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A) = 2$

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$, porque una columna es nula, tenemos $\text{rango}(A^*) = 2$

Como $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A^*)$, por el teorema de Rouché el sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.

$$\text{Si } \lambda = 3, A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

En A como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A) = 2$

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 4(1 - 6) = -20 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A^*) = 3$

Como $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$, por el teorema de Rouché el sistema es incompatible, y no tiene solución.

(b)

Nos piden resolverlo si $\lambda = -1$.

Hemos visto que como $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A^*)$, por el teorema de Rouché el sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$, tenemos sólo dos ecuaciones (las dos últimas, con las que hemos calculado el rango de A) y dos incógnitas principales..

$$2x + y - z = 0$$

$$x + 5y + z = 0. \text{ Tomamos } z = \lambda \in \mathbb{R}$$

A la 1ª ecuación le sumo la 2ª multiplicada por -2, y tenemos $-9y = 3\lambda$. De donde $y = (-1/3)\lambda$.

Sustituyendo en $x + 5y + z = 0$, nos resulta $x = (2/3)\lambda$.

La solución del sistema es $(x, y, z) = ((2/3)\lambda, (-1/3)\lambda, \lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Ejercicio 4 de la Opción A del Modelo 1 de Sobrantes de 2008

Los puntos $A(-2, 3, 1)$, $B(2, -1, 3)$ y $C(0, 1, -2)$ son vértices consecutivos del paralelogramo ABCD.

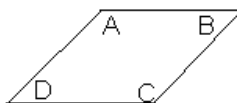
(a) [1 punto] Halla las coordenadas del vértice D.

(b) [1 punto] Encuentra la ecuación de la recta que pasa por B y es paralela a la diagonal AC.

(c) [0'5 puntos] Halla la ecuación del plano que contiene a dicho paralelogramo.

Solución

A(-2,3,1), B(2,-1,3) y C(0,1,-2) son vértices consecutivos del paralelogramo ABCD



(a)

Si ABCD son los vértices de un paralelogramo. Los vectores libres **AB** y **DC** son iguales:

$$\mathbf{AB} = (4, -4, 2)$$

$$\mathbf{DC} = (-x, 1-y, -2-z)$$

Igualando coordenadas tenemos $x = -4$, $y = 5$ y $z = -4$. El punto que falta es D(-4, 5, -4)

(b)

La recta tiene por punto el B(2,-1,3) y como vector director el **AC** = (2,-2, -3). Su ecuación continua es

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{-3}$$

(c)

Tomamos para el plano como punto el B(2,-1,3) y como vectores paralelos independientes el **BA** = (-4,4,-2) y **BC** = (-2,2,5). Su ecuación paramétrica es

$$\begin{cases} x = 2 - 4\lambda - 2\mu \\ y = -1 + 4\lambda + 2\mu \\ z = 3 - 2\lambda - 5\mu \end{cases}, \text{ con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Opción B

Ejercicio 1 de la Opción B del Modelo 1 de Sobrantes de 2008

[2'5 puntos] Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Se sabe que f tiene un máximo local en $x = 1$, que el punto $(0, 1)$ es un punto de inflexión de su gráfica y que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{9}{4}$. Calcula a , b , c y d .

Solución

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Esta función es continua y derivable, las veces que sean necesarias, en $\mathbb{R}$.

Como tiene un máximo local en $x = 1$, nos dice que $f'(1) = 0$

Como $(0, 1)$ es un punto de inflexión, nos dice que $f(0) = 1$ y que $f''(0) = 0$.

$$\text{Además } \int_0^1 f(x)dx = \frac{9}{4}$$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c; \quad f''(x) = 6ax + 2b.$$

De $f(0) = 1$, tenemos $1 = d$, por tanto **$d = 1$**

De $f'(1) = 0$, tenemos $0 = 3a + 2b + c$

De $f''(0) = 0$, tenemos $0 = 2b$, por tanto **$b = 0$**

Sustituyendo los valores encontrados tenemos $c = -3a$, por tanto $f(x) = ax^3 - 3ax + 1$

$$\text{De } \int_0^1 f(x)dx = \frac{9}{4} \text{ resulta } \frac{9}{4} = \int_0^1 (ax^3 - 3ax + 1)dx = \left[\frac{ax^4}{4} - \frac{3ax^2}{2} + x \right]_0^1 = a/4 - (3a)/2 + 1$$

Resolviendo la ecuación $9/4 = a/4 - (3a)/2 + 1$, obtenemos **$a = -1$** y por tanto **$c = -3(-1) = 3$** .

La función pedida es $f(x) = -x^3 + 3x + 1$

Ejercicio 2 de la Opción B del Modelo 1 de Sobrantes de 2008

Sea $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $g(x) = \ln x$ ($\ln$ denota logaritmo neperiano).

(a) [0'75 puntos] Justifica que la recta de ecuación $y = (1/e)x$ es la recta tangente a la gráfica de g en el punto de abscisa $x = e$.

(b) [1'75 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de g , el eje de abscisas y la recta tangente del apartado anterior.

Solución

(a)

La recta tangente a $g(x)$ en $x = e$ es $y - g(e) = g'(e)(x - e)$.

$$g(x) = \ln(x), g(e) = \ln(e) = 1.$$

$$g'(x) = 1/x, g'(e) = 1/e.$$

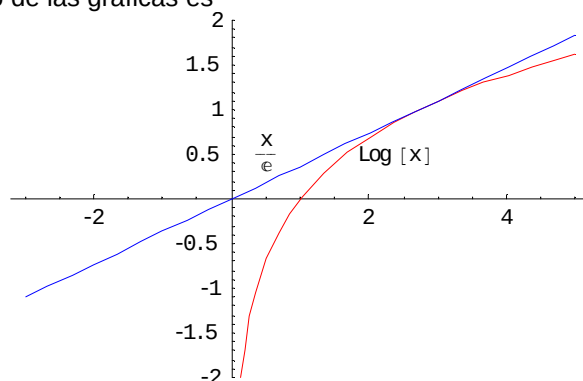
Sustituyendo tenemos que la recta tangente es $y - 1 = (1/e)(x - e)$, es decir $y = (1/e)x$.

(b)

Sabemos que $g(x) = \ln(x)$ pasa por $(1,0)$ y tiene $x = 0^+$ como asíntota vertical.

Sabemos que $y = (1/e)x$ es una recta que pasa por $(0,0)$ y coincide con $g(x) = \ln(x)$ en $x = e$, y que está por encima.

Aunque no lo piden un esbozo de las gráficas es



$$\begin{aligned} \text{El área pedida es } \text{Área} &= \int_0^e (\text{recta tangente}) dx - \int_1^e (\text{función}) dx = \int_0^e \left(\frac{x}{e}\right) dx - \int_1^e \ln(x) dx = \left[\frac{x^2}{e \cdot 2} \right]_0^e - [x \cdot \ln(x) - x]_1^e \\ &= (e^2)/(2e) - [(\ln(e) - e) - (1\ln(1) - 1)] = [(e/2) - 1] u^2 \end{aligned}$$

Recordamos que $\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x$ es una integral por partes ($\int u dv = uv - \int v du$)

$$\int \ln(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln(x) \rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{array} \right\} = x \ln(x) - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln(x) - \int dx = x \ln(x) - x$$

Ejercicio 3 de la Opción B del Modelo 1 de Sobrantes de 2008

[2'5 puntos] Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula la matriz P que verifica $AP - B = C^T$ (C^T es la matriz traspuesta de C).

Solución

$$\text{Como } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1(2-1) = 1 \neq 0, A \text{ tiene matriz inversa } A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^T)$$

$AP - B = C^T$, $AP = B + C^T$. Multiplicando esta expresión por la izquierda por A^{-1} tenemos $A^{-1}(AP) = A^{-1}(B + C^T)$. Operando queda $P = A^{-1}(B + C^T)$.

Hacemos los cálculos

$$(B + C^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{Adj}(A^T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = A^{-1} (B + C^T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 de la Opción B del Modelo 1 de Sobrantes de 2008

Sea la recta r dada por

$$\begin{aligned} 2x + y - mz &= 2 \\ x - y - z &= -m \end{aligned}$$

y el plano π definido por $x + my - z = 1$

(a) [1 punto] ¿Existe algún valor de m para el que π y r son paralelos ?

(b) [1 punto] ¿Para qué valor de m está la recta contenida en el plano ?

(c) [0'5 puntos] ¿Cuál es la posición relativa de la recta y el plano cuando $m = 0$?

Solución

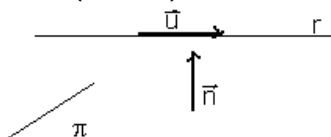
Recta $2x + y - mz = 2$

$$x - y - z = -m$$

Un vector director es el producto vectorial de los vectores normales de cada plano

$$\mathbf{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -m \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1-m) - \vec{j}(-2+m) + \vec{k}(-3) = (-1-m, +2-m, -3)$$

Plano $x + my - z = 1$. Un vector normal es $\mathbf{n} = (1, m, -1)$



(a)

Si la recta " r " es paralela al plano " π ", el vector director de " r ", $\mathbf{u}$, es perpendicular al vector normal de " π ", $\mathbf{n}$, por tanto su producto escalar es cero

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 = (-1-m, +2-m, -3) \cdot (1, m, -1) = -m^2 + m + 2 = 0. \text{ Resolviendo la ecuación resulta } m = -1 \text{ y } m = 2.$$

Es decir para $m = -1$ y $m = 2$, la recta " r " es paralela al plano " π ".

(b)

Para que la recta esté contenida en el plano, tiene que ser paralela y por el apartado (a) hemos visto que $m = -1$ o $m = 2$. Resolvemos el sistema recta – plano para $m = -1$ y $m = 2$ y aquel en el cual tenga infinitas soluciones (dos ecuaciones y tres incógnitas) será el valor de m buscado.

Si $\mathbf{m} = -1$, el sistema es

$$2x + y + z = 2$$

$$x - y - z = 1$$

$x - y - z = 1$. Si nos damos cuenta la 2ª y la 3ª ecuación son iguales y el sistema es

$$2x + y + z = 2$$

$x - y - z = 1$, Sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas. Luego para $\mathbf{m} = -1$ la recta r está contenida en el plano π .

Si $\mathbf{m} = 2$, el sistema es

$$2x + y - 2z = 2$$

$$x - y - z = -2$$

$x + 2y - z = 1$. Si sumamos la 2ª y la 3ª ecuación, y después se la restamos a la primera nos queda

$0x + 0y + 0z = 3$, lo cual es absurdo, por tanto para $\mathbf{m} = 2$ la recta es paralela al plano pero no está contenida en él.

(c)

Para $\mathbf{m} = 0$, la recta corta al plano en un punto, que se obtiene resolviendo el sistema

$$2x + y = 2$$

$$x - y - z = 0$$

$x - z = 1$. 3ª ecuación – 2ª ecuación nos resulta $y = 1$, entrando en la 1ª ecuación $x = 1/2$, y después entrando en la 2ª ecuación nos queda $z = -1/2$. El punto de corte es $(x, y, z) = (1/2, 1, -1/2)$.