

Opción A

Ejercicio nº 1 de la Opción A de Junio (modelo 2) de 2007

[2'5 puntos] Determina dos números reales positivos sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.

Solución

Es un problema de optimización, sean x e y los dos números

Relación $x + y = 10$.

Optimizar $P = x^2 \cdot y^2$

De $x + y = 10$, tengo $y = 10 - x$, luego $P = x^2 \cdot y^2 = P = x^2 \cdot (10 - x)^2 = x^2 \cdot (100 - 20x + x^2) = x^4 - 20x^3 + 100x^2$.

$P(x) = x^4 - 20x^3 + 100x^2$. Calculamos $P'(x)$, resolvemos $P'(x) = 0$ que serán los posibles máximos o mínimos (con $P''(x)$ veremos si es máximo o mínimo).

$P(x) = x^4 - 20x^3 + 100x^2$.

$P'(x) = 4x^3 - 60x^2 + 200x$.

$P'(x) = 0$, da $4x^3 - 60x^2 + 200x = 0 = x(4x^2 - 60x + 200) = 0$, de donde $x = 0$ y $4x^2 - 60x + 200 = 0$.

Simplificando $x^2 - 15x + 50 = 0$. Al resolverla sale $x = 10$ y $x = 5$.

Los posibles máximos o mínimos son 0, 5 y 10.

$P''(x) = 12x^2 - 120x + 200$

Como $P''(0) = 200 > 0$, $x = 0$ es un mínimo relativo.

Como $P''(10) = 200 > 0$, $x = 10$ es un mínimo relativo.

Como $P''(5) = -100 < 0$, $x = 5$ es un máximo relativo.

Los números son $x = 5$ e $y = 10 - 5 = 5$.

Ejercicio nº 2 de la Opción A de Junio (modelo 2) de 2007

Sean $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas mediante $f(x) = x^3 + 3x^2$ y $g(x) = x + 3$.

(a) [1'25 puntos] Esboza las gráficas de f y de g calculando sus puntos de corte.

(b) [1'25 puntos] Calcula el área de cada uno de los recintos limitados entre las gráficas de f y g .

Solución

(a)

$f(x) = x^3 + 3x^2$ y $g(x) = x + 3$.

$g(x) = x + 3$ es una recta y con dos puntos es suficiente para dibujarla

Para $x = 0$, $g(0) = 3$. Punto (0,3)

Para $g(x) = 0$, $x + 3 = 0$, de donde $x = -3$. Punto (-3,0)

$f(x) = x^3 + 3x^2$ es un cúbica.

Cortes $f(0) = 0$. Punto (0,0)

Para $f(x) = 0$, $x^3 + 3x^2 = 0 = x^2(x + 3)$, de donde $x = 0$ (doble) y $x = -3$. Puntos (-3,0) y (0,0)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$. Es decir cuando x es muy grande negativo, $f(x)$ es muy grande negativo.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$. Es decir cuando x es muy grande positivo, $f(x)$ es muy grande positivo.

Las soluciones de $f'(x) = 0$ son los extremos relativos.

$f(x) = x^3 + 3x^2$.

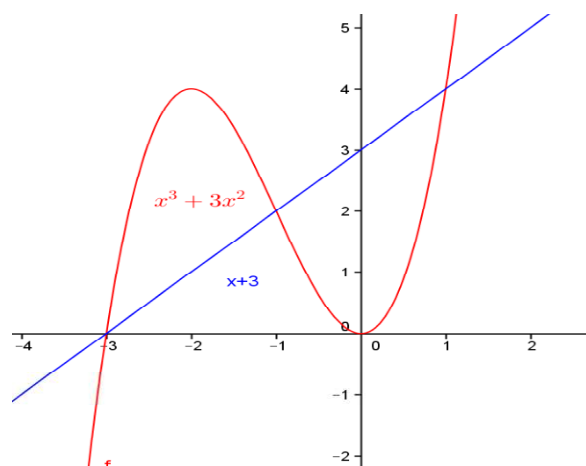
$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 = x(3x + 6)$, de donde $x = 0$ y $x = -2$ son los extremos relativos.

$f''(x) = 6x + 6$

Como $f''(0) = 6 > 0$, $x = 0$ es un mínimo relativo que vale $f(0) = 0$.

Como $f''(-2) = -6 < 0$, $x = -2$ es un máximo relativo que vale $f(-2) = 4$.

Un esbozo de las gráficas es (en azul la recta $g(x)$ y en rojo la cúbica $f(x)$)



(b)

$$f(x) = x^3 + 3x^2 \text{ y } g(x) = x + 3.$$

Para hallar el área encerrada entre las dos funciones tenemos que ver los puntos de corte, para lo cual igualamos las funciones.

$$f(x) = g(x), \quad x^3 + 3x^2 = x + 3, \quad x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0.$$

Por Ruffini se ve que $x = 1$ es una solución, luego $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0 = (x - 1)(x^2 + 4x + 3)$.

Resolviendo $x^2 + 4x + 3 = 0$ obtenemos $x = -3$ y $x = -1$, luego f y g se cortan en -3 , -1 y 1 .

$$\text{Área} = \int_{-3}^{-1} (f(x) - g(x)) dx + \int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx =$$

$$= \int_{-3}^{-1} (x^3 + 3x^2 - x - 3) dx + \int_{-1}^1 (-x^3 - 3x^2 + x + 3) dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{x^2}{2} - 3x \right]_{-3}^{-1} + \left[-\frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-1}^1 =$$

$$= [(1/4 - 1 - 1/2 + 3) - (81/4 - 27 - 9/2 + 9)] + [(-1/4 - 1 + 1/2 + 3) - (-1/4 + 1 + 1/2 - 3)] = 4 + 4 = 8 \text{ u}^2$$

Ejercicio nº 3 de la Opción A de Junio (modelo 2) de 2007

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

(a) [1 punto] Determina la matriz $B = A^2 - 2A$

(b) [0'75 puntos] Determina los valores de λ para los que la matriz B tiene inversa.

(c) [0'75 puntos] Calcula B^{-1} para $\lambda = 1$

Solución

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$B = A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1-\lambda \\ 1+\lambda & -1+\lambda^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1-\lambda \\ -1+\lambda & \lambda^2-2\lambda-1 \end{pmatrix}$$

(b)

B tiene inversa si $\det(B) \neq 0$

$$\det(B) = |B| = \begin{vmatrix} -2 & 1-\lambda \\ -1+\lambda & \lambda^2-2\lambda-1 \end{vmatrix} = -2\lambda^2 + 4\lambda + 2 - (1-\lambda)(-1+\lambda) = -\lambda^2 + 2\lambda + 3$$

Resolviendo $-\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$ obtenemos $\lambda = -1$ y $\lambda = 3$, por tanto si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 3$ la matriz B tiene inversa.

(c)

$$B^{-1} \text{ con } \lambda = 1; B^{-1} = (1/|B|) \cdot \text{Adj}(B^t); \text{ Con } \lambda = 1, B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; \det(B) = 4; B^t = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\text{Adj}(B^t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; B^{-1} = (1/|B|) \cdot \text{Adj}(B^t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 4 de la Opción A de Junio (modelo 2) de 2007

Considera los planos de ecuaciones $x - y + z = 0$ y $x + y - z = 2$.

(a) [1 punto] Determina la recta que pasa por el punto $A(1,2,3)$ y no corta a ninguno de los planos dados.

(b) [1'5 puntos] Determina los puntos que equidistan de $A(1,2,3)$ y $B(2,1,0)$ y pertenecen a la recta intersección de los planos dados.

Solución

(a)

Plano $x - y + z = 0$, vector normal $\mathbf{n} = (1, -1, 1)$ Plano $y + x + y - z = 2$, vector normal $\mathbf{n}' = (1, 1, -1)$ Como los vectores normales $\mathbf{n}$ y $\mathbf{n}'$ no son proporcionales, los planos son secantes y se cortan en una recta

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

Como me piden una recta que no corte a ninguno de los dos planos lo que me están pidiendo es una recta "s" paralela a la recta "r", luego me sirve como vector director el de la recta "r" que es el producto vectorial de $\mathbf{n}$ con $\mathbf{n}'$.

$$\text{Recta "s", punto el } A(1, 2, 3), \text{ vector } \mathbf{u} = \mathbf{n} \times \mathbf{n}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(1 - 1) - \vec{j}(-2) + \vec{k}(2) = (0, 2, 2)$$

$$\text{La recta "s" en paramétricas es } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

(b)

Los planos $x - y + z = 0$ y $x + y - z = 2$, son secantes y ya sabemos que se cortan en la recta r de

$$\text{ecuación } r \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \end{cases}, \text{ que tenía de vector director } \mathbf{u} = \mathbf{n} \times \mathbf{n}' = (0, 2, 2).$$

Un punto E de "r" lo obtenemos tomando $z = 0$, con lo cual resolviendo el sistema de la recta "r" obtenemos $x = y = 1$. El punto E es $E(1, 1, 0)$

Ponemos la recta "r" en paramétricas para tomar un punto genérico C de la recta "r"

$$\text{Recta "r" en paramétricas } r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2t \\ z = 2t \end{cases}. \text{ El punto genérico C de "r" es } C(1, 1+2t, 2t).$$

Como dicen que los puntos $A(1, 2, 3)$ y $B(2, 1, 0)$ equidistan de la recta "r", equidistan de un punto genérico suyo, el C, es decir $d(A, C) = d(B, C)$ (las distancias son iguales)

$$d(A, C) = |\mathbf{AC}| = \sqrt{0^2 + (-1 + 2t)^2 + (-3 + 2t)^2}$$

$$\mathbf{AC} = (1 - 1, 1 + 2t - 2, 2t - 3) = (0, -1 + 2t, -3 + 2t)$$

$$d(B, C) = |\mathbf{BC}| = \sqrt{1^2 + (2t)^2 + (2t)^2}$$

$$\mathbf{BC} = (1 - 2, 1 + 2t - 1, 2t - 0) = (-1, 2t, 2t)$$

Igualando tenemos $\sqrt{0^2 + (-1 + 2t)^2 + (-3 + 2t)^2} = \sqrt{1^2 + (2t)^2 + (2t)^2}$. Elevando al cuadrado y simplificando obtenemos $16t = 9$, de donde $t = 9/16$, y los puntos de la recta "r" que equidistan de A y B es solo uno el $C(1, 1+2(9/16), 2(9/16)) = C(1, 17/8, 9/8)$.

Opción B

Ejercicio nº 1 de la Opción B de Junio (modelo 2) de 2007

[2'5 puntos] Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$. Determina a y b sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión es la recta $y = 2x + 3$.

Solución

$$f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$$

Los puntos de inflexión verifican $f''(x) = 0$

$$f'(x) = 6x^2 + 24x + a$$

 $f''(x) = 12x + 24$, de $f''(x) = 0$ obtenemos $x = -2$ que es el punto de inflexión.
La recta tangente en $x = -2$ es $y - f(-2) = f'(-2)(x + 2)$ También me dicen que la recta tangente en $x = -2$ es $y = 2x + 3$, por tanto $f'(-2) = 2$.De $f'(-2) = 2$, tengo $2 = 6(-2)^2 + 24(-2) + a$. Operando obtenemos $a = 26$.

De la recta tangente $y - f(-2) = f'(-2)(x + 2)$, tenemos $y = f(-2) + 2(x + 2) = 2x + (4 + f(-2))$. Igualando esta ecuación con la recta tangente $y = 2x + 3$ tenemos: $3 = 4 + f(-2)$, de donde $f(-2) = -1$.

De $f(-2) = -1$, tengo $-1 = 2(-2)^3 + 12(-2)^2 + (26)(-2) + b$. Operando obtenemos $b = 19$.

La función es $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + 26x + 19$.

Ejercicio nº 2 de la Opción B de Junio (modelo 2) de 2007

[2'5 puntos] Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(1+x^2)$, halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas. ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

Solución

Una primitiva de $f(x)$ es $F(x) = \int f(x)dx + K$

$I = \int f(x)dx = \int \ln(1+x^2)dx$ que es una integral por partes ($\int u dv = uv - \int v du$)

$u = \ln(1+x^2)$, de donde $du = (2x)/(1+x^2)$

$dv = dx$, de donde $v = \int dx = x$

$$I = \int \ln(1+x^2)dx = x \cdot \ln(1+x^2) - \int x \cdot \frac{2x}{1+x^2} dx = x \cdot \ln(1+x^2) - 2 \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = x \cdot \ln(1+x^2) - 2I_1.$$

$I_1 = \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$, aunque sencilla es una integral racional (hay que dividir) o poner el numerador en la forma $x^2 = x^2 + 1 - 1$.

$$I_1 = \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{dividiendo por} \\ 1+x^2 \end{array} \right\} = \int \left(1 + \frac{-1}{1+x^2} \right) dx = x - \operatorname{arctg}(x)$$

$$I = x \cdot \ln(1+x^2) - 2I_1 = x \cdot \ln(1+x^2) - 2(x - \operatorname{arctg}(x))$$

$$F(x) = \int f(x)dx + K = x \cdot \ln(1+x^2) - 2(x - \operatorname{arctg}(x)) + K.$$

Como nos dicen que la primitiva $F(x)$ pasa por (0,0) tenemos $F(0) = 0$.

De $F(0) = 0$, tenemos $0 = 0 \cdot \ln(1+0) - 2(0 - \operatorname{arctg}(0)) + K = 0 + K$, de donde $K = 0$ y la primitiva pedida es

$$F(x) = x \cdot \ln(1+x^2) - 2(x - \operatorname{arctg}(x))$$

Ejercicio nº 3 de la Opción B de Junio (modelo 2) de 2007

(a) [1 punto] Calcula la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) [1'5 puntos] Escribe en forma matricial el siguiente sistema y resuélvelo usando la matriz A^{-1} hallada en el apartado anterior.

$$\left. \begin{array}{l} x+y=1 \\ y+z=-2 \\ x+z=3 \end{array} \right\}$$

Solución

(a)
 $A^{-1} = (1/|A|) \cdot \operatorname{Adj}(A^t)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1(1+1) = 2$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \operatorname{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; A^{-1} = (1/|A|) \cdot \operatorname{Adj}(A^t) = (1/2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

El sistema $\left. \begin{array}{l} x+y=1 \\ y+z=-2 \\ x+z=3 \end{array} \right\}$ en forma matricial es $A \cdot X = B$, con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Como existe A^{-1} , multiplicando por la izquierda $A \cdot X = B$ por A^{-1} , tenemos

$$A^{-1}(A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B = (1/2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = (1/2) \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ es decir la solución es } (x,y,z) = (3,-2,0)$$

Ejercicio nº 4 de la Opción B de Junio (modelo 2) de 2007

Considera los puntos $A(0,3,-1)$ y $B(0,1,5)$.

(a) [1'25 puntos] Calcula los valores de x sabiendo que el triángulo ABC de vértices A, B y $C(x,4,3)$ tiene un ángulo recto en C.

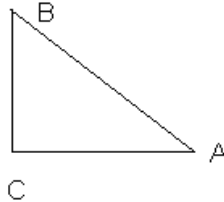
(b) [1'25 puntos] Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $(0,1,5)$ y $(3,4,3)$ y es paralelo a la recta definida por las ecuaciones
$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$
.

Solución

(a)

$A(0,3,-1)$, $B(0,1,5)$ y $C(x,4,3)$

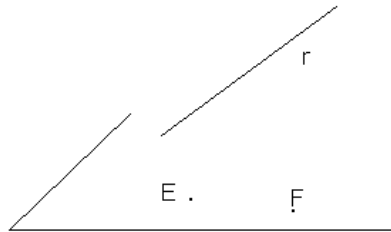
Si el triángulo es rectángulo en C el producto escalar $\mathbf{CA} \cdot \mathbf{CB}$ es cero



$$\mathbf{CA} = (-x, -1, -4); \quad \mathbf{CB} = (-x, -3, 2)$$

$$\mathbf{CA} \cdot \mathbf{CB} = x^2 + 3 - 6 = 0, \text{ de donde } x = \pm\sqrt{3}. \text{ Hay dos soluciones para "x".}$$

(b)



Para un plano necesito un punto $E(0,1,5)$ y dos vectores independientes el $\mathbf{EF} = (3-0, 4-1, 3-5) = (3,3,-2)$ y el

$$\text{director de la recta "r", que es } \mathbf{u} = \mathbf{n} \times \mathbf{n}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1) - \vec{j}(-2) + \vec{k}(3) = (-1, 2, 3)$$

Siendo $\mathbf{n}$ y $\mathbf{n}'$ los vectores normales de cada uno de los planos que determina la recta "r".

$$\begin{aligned} \text{El plano pedido es } 0 &= \det(\mathbf{x} - \mathbf{e}, \mathbf{EF}, \mathbf{u}) = \begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-5 \\ 3 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = x(9+4) - (y-1)(9-2) + (z-5)(6+3) = \\ &= 13x - 7y + 9z - 38 = 0. \end{aligned}$$