

Opción A

Ejercicio nº 1 de la Opción A del modelo 1, Junio de 2005

[2'5 puntos] De la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo en $x = -1$, y que su gráfica corta al eje OX en el punto de abscisa $x = -2$ y tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$. Calcula a, b, c y d sabiendo, además, que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene pendiente 9.

Solución

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene por dominio \mathbb{R} , por tanto es continua y derivable las veces que nos haga falta en \mathbb{R} .

$x = -1$ es un máximo, por tanto $f'(-1) = 0$

La gráfica corta al eje OX en $x = -2$, por tanto $f(-2) = 0$

$x = 0$ es un punto de inflexión, por tanto $f''(0) = 0$

La recta tangente en $x = 2$ tiene de pendiente 9, por tanto $f'(2) = 9$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

De $f''(0) = 0$, tenemos $0 = 0 + 2b$, de donde $b = 0$

De $f'(-1) = 0$, tenemos $0 = 3a(-1)^2 + c$, de donde $3a + c = 0$

De $f'(2) = 9$, tenemos $9 = 3a(2)^2 + c$, de donde $12a + c = 9$

Restando estas dos últimas ecuaciones tenemos $9a = 9$ de donde $a = 1$

Entrando con $a = 1$ en $3a + c = 0$, nos resulta $c = -3$

De $f(-2) = 0$, tenemos $0 = 1(-2)^3 + 0 + (-3)(-2) + d$, de donde $d = 2$

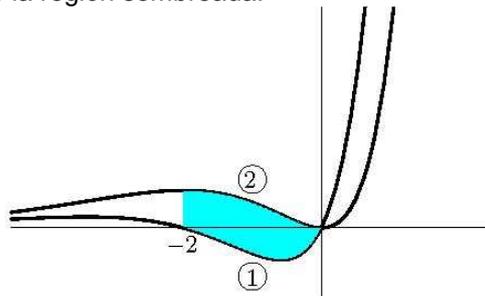
Por tanto los números pedidos son $a = 1, b = 0, c = -3$ y $d = 2$

Ejercicio nº 2 de la Opción A del modelo 1, Junio de 2005

Se sabe que las dos gráficas del dibujo corresponden a la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2e^x$ y a su función derivada f' .

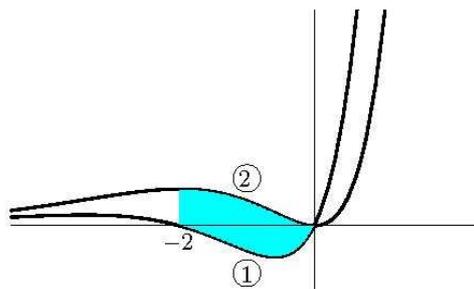
(a) [1 punto] Indica, razonando la respuesta, cuál es la gráfica de f y cuál la de f' .

(b) [1'5 puntos] Calcula el área de la región sombreada.



Solución

(a)



$$f(x) = x^2e^x$$

Esta función tiene por dominio \mathfrak{R} , es continua y derivable las veces que nos haga falta en \mathfrak{R} . También vemos que esta función $f(x)$ siempre es positiva ($f(x) > 0$), puesto que es el producto de x^2 que siempre es positiva con la exponencial e^x que siempre es positiva, por tanto la gráfica de la función $f(x)$ es la señalada con el número 2, pues está dibujada siempre por encima del eje de abscisas OX y la de su derivada $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x$ es la señalada con el número 1 pues tiene partes por encima y partes por debajo del eje OX.

Vamos a ver algunos detalles mas de $f(x)$ y de $f'(x)$ para confirmarlo, aunque lo anterior creo que está suficientemente razonado.

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^x = \infty \cdot \infty = \infty$, efectivamente cuando x tiende a $+\infty$, $f(x)$ tiene a $+\infty$, tal y como se ve en la gráfica de la figura 2.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x)^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Aplicándole la Regla de L'Hôpital tenemos $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$

Volviéndole a aplicar la Regla de L'Hôpital $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$, con lo cual la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal (A.H.) en $-\infty$, tal y como se ve en la gráfica de la figura 2.

También se observa que $f(0) = 0$

Ahora nos fijamos en la gráfica de la figura 1, la de la derivada $f'(x)$

Vemos que $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -2)$, luego $f(x)$ crece en $(-\infty, -2)$ tal y como se ve en la gráfica de la figura 2.

Vemos que $f'(x) < 0$ en $(-2, 0)$, luego $f(x)$ decrece en $(-2, 0)$ tal y como se ve en la gráfica de la figura 2.

Por definición $x = -2$ es un máximo relativo de $f(x)$ tal y como se ve en la gráfica de la figura 2.

Vemos que $f'(x) > 0$ en $(0, +\infty)$, luego $f(x)$ crece en $(0, +\infty)$ tal y como se ve en la gráfica de la figura 2.

Por definición $x = 0$ es un mínimo relativo de $f(x)$ tal y como se ve en la gráfica de la figura 2.

Vemos que $f'(x)$ decrece aproximadamente en $(-\infty, -0'5)$, luego $f''(x) < 0$ en $(-\infty, -0'5)$, y por tanto la función $f(x)$ es cóncava (\cap) en $(-\infty, -0'5)$, tal y como se ve en la gráfica de la figura 2.

Vemos que $f'(x)$ crece aproximadamente en $(-0'5, +\infty)$, luego $f''(x) > 0$ en $(-0'5, +\infty)$, y por tanto la función $f(x)$ es convexa (\cup) en $(-0'5, +\infty)$, tal y como se ve en la gráfica de la figura 2.

Por definición, aproximadamente $x = -0'5$ es un punto de inflexión de $f(x)$, tal y como se ve en la gráfica de la figura 2.

(b)

El área pedida es $\int_{-2}^0 (f(x) - f'(x)) dx = \int_{-2}^0 [x^2 e^x - (x^2 e^x + 2x e^x)] dx = -2 \cdot \int_{-2}^0 x e^x dx = (*)$

Calculamos primero la integral indefinida, que es una integral por partes, y por tanto le aplicaremos la fórmula de $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

$$\int x \cdot e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x$$

Volvemos ya a la integral definida

$$(*) = -2 \int_{-2}^0 x \cdot e^x dx = -2 [x \cdot e^x - e^x]_{-2}^0 = -2[(0 - e^0) - (-2e^{-2} - e^{-2})] = 2 - 6e^{-2} \cong 1'1879 \text{ u}^2$$

Ejercicio nº 3 de la Opción A del modelo 1, Junio de 2005

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] ¿Tiene A inversa? En caso afirmativo, calcúlala

(b) [1'5 puntos] Determina la matriz X que cumple que $A \cdot X + C \cdot B^t = B \cdot B^t$, siendo B^t la matriz transpuesta de B.

Solución

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ tiene inversa si } |A| \neq 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7 \neq 0, \text{ luego } A \text{ tiene inversa } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A^t)$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \text{ luego } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A^t) = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 & 1/7 \\ 3/7 & -2/7 \end{pmatrix}$$

(b)

$$AX + CB^t = BB^t, \text{ de donde } AX = BB^t - CB^t$$

$$CB^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; BB^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 14 \end{pmatrix}$$

$$AX = BB^t - CB^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$$

Como A tiene inversa multiplicamos por la izquierda por la inversa de A la expresión $AX = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} AX = X = A^{-1} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/7 & 6/7 \\ 1/7 & -26/7 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 4 de la Opción A del modelo 1, Junio de 2005

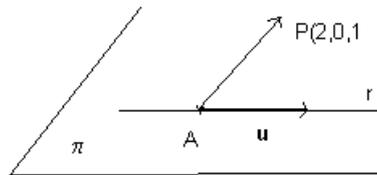
Considera el punto $P(2, 0, 1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+2y=6 \\ z=2 \end{cases}$

(a) [1 punto] Halla la ecuación del plano que contiene a P y a r.

(b) [1'5 puntos] Calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r.

Solución

(a)



Normalmente para obtener un plano a partir de una recta y un punto exterior a la recta, se toma como punto del plano un punto de la recta, el A y como vectores el director de la recta \mathbf{u} y el \mathbf{AP} , y el plano tiene de ecuación $\det(\mathbf{x} - \mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{AP}) = 0$. Para ello se pone la recta en su ecuación paramétrica

Para poner la recta $r \equiv \begin{cases} x+2y=6 \\ z=2 \end{cases}$ en su ecuación paramétrica, tomamos $y = a \in \mathbb{R}$, con lo cual tenemos $x = 6 - 2a$, y la recta en ecuación paramétrica es $r \equiv \begin{cases} x = 6 - 2a \\ y = a \\ z = 2 \end{cases}$.

Un punto de la recta sería $A(6, 0, 2)$ y un vector director es $\mathbf{u} = (-2, 1, 0)$

El otro vector para el plano sería el vector $\mathbf{AP} = (-4, 0, -1)$

El plano pedido es $\pi \equiv \det(\mathbf{x} - \mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{AP}) = 0 = \begin{vmatrix} x-6 & y & z-2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (x-6)(-1) - y(2-0) + (z-2)(4) =$

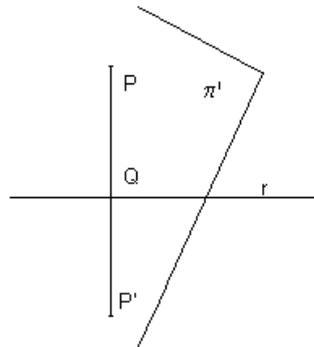
$$= -x - 2y + 4z - 2 = 0$$

Otra forma de hacerlo

Formamos el haz de planos que determinan la recta $r \equiv \begin{cases} x+2y=6 \\ z=2 \end{cases}$, que es $(x + 2y - 6) + \lambda(z - 2) = 0$, y le

imponemos la condición de que pase por el punto $P(2, 0, 1)$, y nos queda $(2+0-6) + \lambda(1-2) = 0$, de donde $\lambda = -4$, y el plano pedido es $(x + 2y - 6) + (-4)(z - 2) = 0$. Operando queda $x+2y-4z+2=0$, y como vemos nos da el mismo plano.

(b)



Para calcular el punto simétrico del punto P respecto de la recta "r", calculamos la proyección ortogonal de P sobre "r" que es el punto Q, y Q es el punto medio del segmento PP', siendo P' el punto simétrico buscado.

Para calcular el punto Q determinamos el plano π' perpendicular a la recta "r" por el punto P.

El vector normal del plano \mathbf{n} es el director de la recta $\mathbf{u} = (-2, 1, 0)$. Del apartado (a)

El plano π' es el producto escalar (\bullet) del vector \mathbf{n} con el vector $\mathbf{x} - \mathbf{p} = (x - 2, y - 0, z - 1)$ igualado a 0
 $\pi' \equiv \mathbf{n} \bullet (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0 = -2(x - 2) + 1(y - 0) + 0(z - 1) = -2x + y + 4 = 0$

Q es la intersección del plano π' con la recta "r"

La recta en su forma paramétrica es $r \equiv \begin{cases} x = 6 - 2a \\ y = a \\ z = 2 \end{cases}$, luego sustituyendo tenemos $-2(6 - 2a) + (a) + 4 = 0$,

de donde $a = 8/5$ y el punto Q es $Q(x, y, z) = Q(6 - 2(8/5), 8/5, 2) = Q(14/5, 8/5, 2)$

Q es el punto medio del segmento PP'

$(14/5, 8/5, 2) = ((x+2)/2, (y+0)/2, (z+1)/2)$

De $(x+2)/2 = 14/5$, obtenemos $x = 18/5$

De $(y+0)/2 = 8/5$, obtenemos $y = 16/5$

De $(z+1)/2 = 2$, obtenemos $z = 3$

El simétrico buscado es el punto P'(18/5, 16/5, 3)

Opción B

Ejercicio nº 1 de la Opción B del modelo 1, Junio de 2005

Sea f la función definida para $x \neq 0$ por $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

(a) [1 punto] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

(b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

(c) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f

Solución

(a)

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$, $x = 0$ es una asíntota vertical de f(x) (A.V.); $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

Como tenemos un cociente en el cual el grado del numerador es uno más que el del denominador, tenemos una asíntota oblicua (A.O.) $y = mx + n$ de f(x), y es la misma en $+\infty$ y en $-\infty$, donde

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \text{y}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Luego la asíntota oblicua es $y = x$

Veamos la posición relativa de $f(x)$ respecto a la A.O.

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - A.O.) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$, $f(x)$ está por encima de la A.O. en $+\infty$

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - A.O.) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$, $f(x)$ está por debajo de la A.O. en $-\infty$

(b)

Para estudiar la monotonía veamos la 1ª derivada

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}; \quad f'(x) = \frac{2x(x) - (x^2 + 1)(1)}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

Resolvemos $f'(x) = 0$, luego $x^2 - 1 = 0$ y las soluciones son $x = +1$ y $x = -1$ que pueden ser los posibles máximos y mínimos

Como $f'(-2) = 3/4 > 0$, $f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1)$

No podemos sustituir en la 1ª derivada $x = 0$ porque $x = 0$ es una A.V.

Como $f'(-0.5) = -0.75/0.25 < 0$, $f(x)$ es decreciente en $(-1, 0)$ unión $(0, +1)$

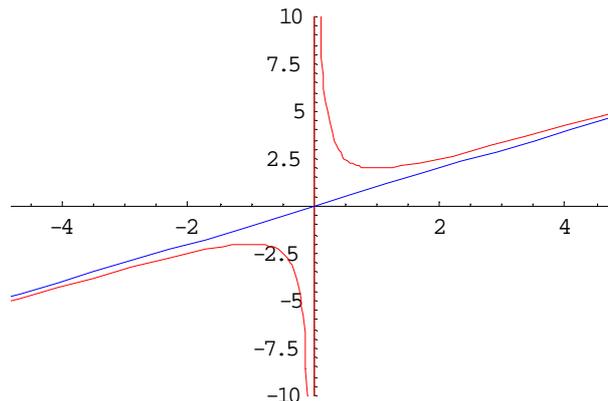
Por definición $x = -1$ es un máximo relativo de $f(x)$ que vale $f(-1) = 2/(-1) = -2$

Como $f'(2) = 3/4 > 0$, $f(x)$ es creciente en $(1, +\infty)$

Por definición $x = 1$ es un mínimo relativo de $f(x)$ que vale $f(1) = 2/(1) = 2$

(c)

Un esbozo de la gráfica es



Ejercicio nº 2 de la Opción B del modelo 1, Junio de 2005

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-x/2}$.

(a) [0.75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

(b) [1.75 puntos] Calcula el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de f , la recta de ecuación $x = 2$ y la recta tangente obtenida en (a).

Solución

(a)

$$f(x) = e^{-x/2}$$

La recta tangente en $x = 0$ es $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

$$f'(x) = e^{-x/2} \cdot (-1/2)$$

$$f(0) = e^0 = 1$$

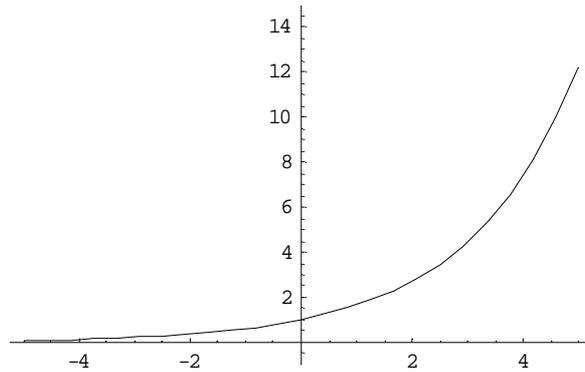
$$f'(0) = e^0 \cdot (-1/2) = (-1/2)$$

La recta tangente en $x = 0$ es $y - 1 = (-1/2)(x - 0)$, de donde $y = (-1/2)x + 1$

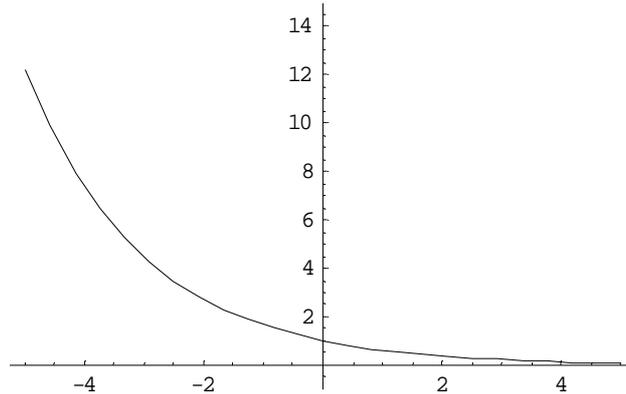
La recta tangente corta al eje OX en $y = 0$, de donde $x = 2$

(b)

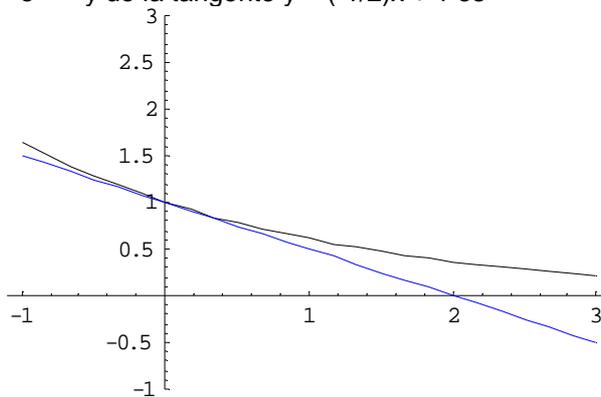
Aunque no la piden, la gráfica de $e^{-x/2}$ es muy parecida a la de e^x pero un poco más abierta



Como sabemos la grafica de $f(x) = e^{-x/2}$ es exactamente igual que la de $e^{x/2}$ pero simétrica respecto del eje OY



Y la gráfica conjunta de $f(x) = e^{-x/2}$ y de la tangente $y = (-1/2)x + 1$ es



Por tanto el área pedida es

$$\int_0^2 [e^{-x/2} - (-x/2 + 1)] dx = \int_0^2 (e^{-x/2} + x/2 - 1) dx = [-2e^{-x/2} + x^2/4 - x]_0^2 = (-2e^{-1} + 1 - 2) - (-2e^0 + 0 - 0) = (1 - 2/e) \cong 0'2642 \text{ u}^2$$

Ejercicio nº 3 de la Opción B del modelo 1, Junio de 2005

Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x+y+z &= -2 \\ -\lambda x+3y+z &= -7 \\ x+2y+(\lambda+2)z &= -5 \end{aligned}$$

- (a) [1'5 puntos] Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ
- (b) [1 punto] Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

Solución

(a)

$$\begin{aligned} x+y+z &= -2 \\ -\lambda x+3y+z &= -7 \\ x+2y+(\lambda+2)z &= -5 \end{aligned}$$

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\lambda & 3 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda+2 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ -\lambda & 3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & \lambda+2 & -5 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2 \neq 0$, por lo menos A tiene rango 2

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\lambda & 3 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda+2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 2^a C + 1^a C(-1) \\ 3^a C + 1^a C(-1) \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 3+\lambda & 1+\lambda \\ 1 & 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \\ &= (1) \begin{vmatrix} 3+\lambda & 1+\lambda \\ 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 2^a F + 1^a F(-1) \end{array} = \begin{vmatrix} 3+\lambda & 1+\lambda \\ -\lambda-2 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -(1+\lambda)(-2-\lambda) \end{aligned}$$

Si $|A| = 0$ tenemos $1 + \lambda = 0$ y $-2 - \lambda = 0$ de donde $\lambda = -1$ y $\lambda = -2$

Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq -2$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$ luego el sistema es compatible y determinado, y tiene solución única.

Si $\lambda = -1$ la matriz de los coeficientes y a matriz ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{En } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \text{ como } \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 2^a F + 1^a F(-1) \\ 3^a F + 1^a F(-1) \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (1)(-1) \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-6 + 5) = 1 \neq 0, \text{ rango de } A^* = 3$$

Como $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$, el sistema es incompatible y no tiene solución.

(b)

Si $\lambda = -2$ la matriz de los coeficientes y a matriz ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{En } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \text{ como } \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -7 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 2^a F + 1^a F(-1) \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0, \text{ por tener dos filas iguales; luego}$$

tenemos que $\text{rango de } A^* = 2$

Como $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A^*)$, el sistema es compatible e indeterminado.

Como el rango es dos tomamos solo dos ecuaciones y dos incógnitas principales.

Elijo las dos primeras.

$$x+y+z = -2$$

$$2x+3y+z = -7, \text{ tomamos } z = a \in \mathbb{R}, \text{ de donde}$$

$$x+y = -2 - a$$

$$2x+3y = -7 - a. \text{ Haciendo } 2^a \text{ ecuación} + 1^a \text{ ecuación por } (-2) \text{ tenemos}$$

$$x+y = -2 - a$$

$$y = -3 + a, \text{ de donde } x = 1 - 2a$$

La solución del sistema es $(x, y, z) = (1 - 2a, -3 + a, a)$ con $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio nº 4 de la Opción B del modelo 1, Junio de 2005

Sean los vectores $\vec{v}_1 = (0, 1, 0)$, $\vec{v}_2 = (2, 1, -1)$ y $\vec{v}_3 = (2, 3, -1)$.

(a) [0'75 puntos] ¿Son los vectores \vec{v}_1 , \vec{v}_2 y \vec{v}_3 linealmente dependientes?

(b) [0'75 puntos] ¿Para qué valores de a el vector $(4, a + 3, -2)$ puede expresarse como combinación lineal de los vectores \vec{v}_1 , \vec{v}_2 y \vec{v}_3 ?

(c) [1 punto] Calcula un vector unitario y perpendicular a \vec{v}_1 y \vec{v}_2 .

Solución

(a)

$\vec{v}_1 = (0, 1, 0)$, $\vec{v}_2 = (2, 1, -1)$ y $\vec{v}_3 = (2, 3, -1)$, son linealmente dependientes si $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = 0$

$$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = 0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (1)(-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \text{ por tener dos filas iguales.}$$

(b)

Como \vec{v}_1 , \vec{v}_2 y \vec{v}_3 son linealmente dependientes, si nos fijamos en los vectores \vec{v}_1 , \vec{v}_2 y \vec{v}_3 , dos a dos al no tener sus coordenadas proporcionales vemos que son independientes dos a dos, y que cada uno de ellos depende de los otros dos.

Me piden ver para que valores de " a " el vector $\mathbf{u} = (4, a + 3, -2)$ depende linealmente de \vec{v}_1 , \vec{v}_2 y \vec{v}_3 .

Como \vec{v}_1 , \vec{v}_2 y \vec{v}_3 son linealmente dependientes, lo único que ver que el vector \mathbf{u} depende linealmente de \vec{v}_1 y \vec{v}_2 , puesto que \vec{v}_3 depende linealmente de \vec{v}_1 y \vec{v}_2 ; es decir lo que tenemos que ver es que el determinante $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \mathbf{u})$ sea 0.

$$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \mathbf{u}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & a+3 & -2 \end{vmatrix} = (1)(-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0, \text{ por tener dos filas proporcionales, por tanto el vector } \mathbf{u}$$

depende linealmente de los vectores \vec{v}_1 , \vec{v}_2 y \vec{v}_3 , sea cual sea el valor del parámetro " a ".

(c)

Un vector perpendicular a los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 es su vector producto vectorial $\mathbf{w} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$

$$\mathbf{w} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1) - \vec{j}(0) + \vec{k}(-2) = (-1, 0, -2)$$

Un vector unitario y perpendicular a \vec{v}_1 y \vec{v}_2 sería $\mathbf{w}/\|\mathbf{w}\|$, siendo $\|\mathbf{w}\|$ el módulo del vector \mathbf{w}

$$\|\mathbf{w}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

El vector pedido es $\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$. Otro vector sería el $\frac{-\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$