

TRIGONOMETRÍA

- Una escalera de mano de 5 metros de longitud está apoyada contra una pared alcanzando una altura de 3'5 metros. Halla, **razonadamente y con el mínimo número de cálculos posible**, el ángulo que forma la escalera con la pared.
- Sabiendo que $\operatorname{tg} \alpha = 2$ y que α es un ángulo agudo; halla, **razonadamente y sin utilizar la calculadora** el valor de $\operatorname{sen} \alpha$, dejando el resultado racionalizado y simplificado.

- La escalera apoyada contra la pared forma un triángulo rectángulo del que ella es la hipotenusa (que mide 5 m) y la vertical trazada desde el punto en que apoya la escalera hasta el suelo (mide 3'5 m) es el cateto contiguo al ángulo α que se nos pide. Por lo tanto:

$$\cos \alpha = \frac{3'5}{5} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{3'5}{5} = 45'57''$$

El ángulo que forma la escalera con la pared es de 45'57''

- Sabemos que $\operatorname{tg} \alpha = 2$ y que $\operatorname{sen} \alpha$ es positivo porque α , al ser agudo, pertenece al primer cuadrante.

Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ y que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$ como $\operatorname{tg} \alpha = 2$ tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas, una de las cuales (el $\operatorname{sen} \alpha$) nos piden:

Para resolverlo, despejamos $\cos \alpha$ de la segunda ecuación y lo sustituimos en la primera

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow 2 = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{2}$$

Sustituyendo en la ecuación fundamental, la única incógnita es $\operatorname{sen} \alpha$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{2} \right)^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{4} = 1 \Rightarrow 4 \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \operatorname{sen}^2 \alpha = 4 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = +\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

También podríamos obtener este valor a partir de las definiciones de seno y tangente de un ángulo agudo de la siguiente manera:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{Cateto_opuesto}}{\text{Cateto_contiguo}} \text{ y, para que } \operatorname{tg} \alpha = 2 \Rightarrow \text{Cateto_opuesto} = 2 \cdot \text{Cateto_contiguo}$$

Si tomamos, por ejemplo, $\text{Cateto_contiguo} = 1 \text{ cm} \Rightarrow \text{Cateto_opuesto} = 2 \text{ cm}$ y la hipotenusa valdrá, según el teorema de Pitágoras: $\text{Hipotenusa} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{ cm}$ por lo tanto:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{Cateto_opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{2 \text{ cm}}{\sqrt{5} \text{ cm}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$